aperturae maiores esse debent vel saltem non minores, quam sequens tabula ostendit:

Pro lente		Semidiameter aperturae in facie anteriori	posteriori
prima	PP	x	ix
secunda	QQ	$i\cdot\frac{bx}{\alpha}$	$ii'\cdot\frac{bx}{\alpha}$
tertia	RR	$ii'\cdot\frac{bcx}{\alpha\beta}$	$ii'i''\cdot\frac{bcx}{\alpha\beta}$
quarta	SS	$ii'i''\cdot\frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}$	$ii'i''i'''\cdot\frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}$
		etc.	

Denique ad abbreviandum ponatur:

$$P=\frac{n}{2(n-1)^2}\Big(\Big(\frac{n}{a}+\frac{2}{k+v}\Big)\Big(\frac{1}{ia}+\frac{2}{k-v}\Big)^2+\Big(\frac{n}{\alpha}-\frac{2}{k-v}\Big)\Big(\frac{i}{\alpha}-\frac{2}{k+v}\Big)^2\Big)$$

$$Q=\frac{n}{2(n-1)^2}\Big(\Big(\frac{n}{b}+\frac{2}{k'+v'}\Big)\Big(\frac{1}{i'b}+\frac{2}{k'-v'}\Big)^2+\Big(\frac{n}{\beta}-\frac{2}{k'-v'}\Big)\Big(\frac{i'}{\beta}-\frac{2}{k'+v'}\Big)^2\Big)$$

$$R=\frac{n}{2(n-1)^2}\Big(\Big(\frac{n}{c}+\frac{2}{k''+v''}\Big)\Big(\frac{1}{i''c}+\frac{2}{k''-v''}\Big)^2+\Big(\frac{n}{\gamma}-\frac{2}{k''-v''}\Big)\Big(\frac{i''}{\gamma}-\frac{2}{k''+v''}\Big)^2\Big)$$

$$S=\frac{n}{2(n-1)^2}\Big(\Big(\frac{n}{d}+\frac{2}{k'''+v'''}\Big)\Big(\frac{1}{i'''d}+\frac{2}{k'''-v'''}\Big)^2+\Big(\frac{n}{\delta}-\frac{2}{k'''-v'''}\Big)\Big(\frac{i'''}{\delta}-\frac{2}{k'''+v'''}\Big)^2\Big)$$

etc.

His positis ponamus oculum in distantia $=O$ ab ultima lente locari, ita ut post imaginem ultimam reperiatur in distantia $=l$, magnitudinem autem visam comparari cum magnitudine, qua idem obiectum nudo oculo in distantia fixa $=h$ cerneretur, ac ponatur exponens multiplicationis $=m$.

Deinde pro claritate sit gradus claritatis $=y$, ita ut y indicet semidiametrum coni luminosi in oculum intrantis.

Confusio autem aestimetur per semidiametrum confusionis supra (§ 194) definitum.

Iam pro quovis lentium numero hae tres res ita se habebunt:

I. Pro unica lente $O=\alpha+l$

1. Exponens multiplicationis $m=\frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha h}{al}$ situ inverso
2. Gradus claritatis $y=il\cdot\frac{x}{\alpha}$
3. Semidiameter confusionis $=\frac{1}{4}i\frac{\alpha}{l}x^3\cdot P.$

DIOPTRICAE

VOLUMEN PRIUS

CONTINENS

LIBRUM PRIMUM

LIBRI SECUNDI SECTIONEM PRIMAM ET SECUNDAM

DIOPTRICAE

PARS PRIMA

CONTINENS

LIBRVM PRIMVM,

DE

EXPLICATIONE

PRINCIPIORVM,

EX QVIBVS

CONSTRVCTIO TAM TELESCOPIORVM

QVAM

MICROSCOPIORVM

EST PETENDA.

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LOND.

PETROPOLI

Impensis Academiae Imperialis Scientiarum

1769.

UNITED STATES
NUCLEAR REGULATORY COMMISSION
WASHINGTON, D.C. 20555

OFFICIAL BUSINESS
PENALTY FOR PRIVATE USE, $300

FOURTH-CLASS M
POSTAGE & FEES
USNRC
WASH. D. C.
PERMIT No. G-6

INDEX CAPITUM
IN TOMO I CONTENTORUM

LIBER PRIMVS
CONTINENS
EXPLICATIONEM PRINCIPIORVM,
EX QVIBVS CONSTRVCTIO
TAM TELESCOPIORVM
QVAM
MICROSCOPIORVM
EST PETENDA.

CAPUT I

DE DIFFUSIONE IMAGINIS PER UNICAM LENTEM REPRAESENTATAE

DEFINITIO 1

1. *Imago principalis vocatur ea, quae a radiis axi lentis proximis per lentem refractis repraesentatur*

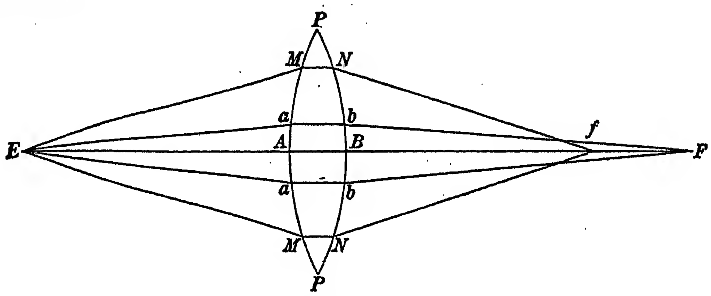

Fig. 1.

Scilicet si lentis PP (Fig. 1) axis sit EF in eaque tantum spatium minimum aAa sit apertum, per quod radiis transitus concedatur, radii a puncto lucido E emissi in uno puncto F colligentur, quod punctum imago principalis vocatur.

COROLLARIUM 1

2. Cum nempe apertura aAa sit minima, omnes radii, qui a puncto quocunque in eam incidunt, ita aequabilem patiuntur refractionem, ut omnes iterum in unum punctum colligantur, id quod non solum de puncto lucido E in axe lentis sito, sed etiam de quibusvis aliis extra axem positis est intelligendum.

COROLLARIUM 2

3. Quodsi ergo lentis apertura fuerit minima, singula cuiusvis obiecti puncta post refractionem iterum singulis punctis referentur, sicque imago principalis erit distincta et confusione carebit: siquidem confusio tum demum oritur, quando radii ex uno puncto emissi non iterum in uno puncto colliguntur.

COROLLARIUM 3

4. Et quamdiu apertura lentis aAa est minima, nihil interest, secundum quamnam figuram facies lentis sint elaboratae; quaecumque enim earum figura fuerit, quoniam tantum portiuncula minima in computum venit, ea semper ut sphaerica spectari poterit.

COROLLARIUM 4

5. Pendet ergo locus imaginis principalis primum a loco puncti lucidi E, sive id in axe sive extra axem fuerit situm; deinde a sphaericitate utriusque faciei aAa et bBb refringentis; tertio ab earum distantia AB seu lentis crassitie, et quarto a ratione refractionis, quam radii in transitu per lentem patiuntur.

SCHOLION 1

6. Refractio radiorum per huiusmodi lentium aperturas minimas transmissorum ideoque determinatio imaginum principalium satis accurate in elementis dioptricis tradi solet, quod igitur negotium hic fusius non prosequar; sed potius in eam refractionis rationem hic inquirere constitui, quando lentium apertura est modicae quantitatis, in quo imprimis ad utriusque faciei figuram est spectandum. Hic autem perpetuo lentium figuras sphaericas assumo, propterea quod haec figura vulgo lentibus induci vel saltem, nisi forte accurate successerit, intendi solet. In praxi certe nulla adhuc alia figura lentibus commode et accurate tribui poterit, atque adeo a sphaerica figura, etsi ad praxin maxime est accommodata, ab artificibus frequenter aberrari solet. A sollertioribus autem talia vitia iam plerumque satis feliciter evitantur, unde non adeo erit verendum, ne ea, quae per calculum ex hypothesi sphaericae figurae elicientur, experientiae non consentanea sint futura. Hanc ob rem hic perpetuo postulo, ut ambae facies lentium exactissime secundum sphaericam figuram sint elaboratae.

SCHOLION 2

7. Sphaerica autem figura hoc laborat incommodo, quod statim ac lenti maior apertura tribuatur, non amplius omnes radii, qui quidem ab uno obiecti puncto sunt profecti, post refractionem ad unum punctum dirigantur radiique EM longius ab axe lentis transmissi non amplius in puncto F concurrant. Unde confusionem eo maiorem nasci necesse est, quo magis hi radii remotiores ab iis, qui prope axem transeunt, declinaverint; et quoniam talis declinatio a figura sphaerica originem ducit, eo maior evadet, quo maior lenti apertura tribuatur. Quanta igitur quovis casu futura sit haec confusio, hoc capite definire constitui; quae cum ceteris paribus a quantitate aperturae pendeat, hic in perpetuum moneo me cuiusvis lentis aperturam circularem assumere, per cuius centrum axis lentis transeat: ita ut semidiameter huius circuli simul mensuram aperturae exhibeat. Ita si in superficie lentis PP spatium MAM apertum relinquatur, reliqua parte MP velamine opaco obducta, punctorum extremorum MM distantia diametrum aperturae eiusque semissis semidiametrum aperturae praebebit.

DEFINITIO 2

8. *Imago extrema est ea, quam radii per extremitatem aperturae transmissi exhibent.*

Ita si MM (Fig. 1, p. 7) sit apertura lentis radiique EM, EM a puncto lucido E circa oram aperturae transmissi conveniant in puncto f, in hoc ipso puncto f erit imago extrema.

COROLLARIUM 1

9. Si punctum lucidum E est in ipso axe lentis, nullum est dubium, quin radii inde per marginem circularem MM transeuntes iterum in uno axis puncto f concurrant imaginemque distinctam repraesentent, quae imago extrema vocatur.

SCHOLION

11. Quomodo se habeat refractio radiorum, quando punctum lucidum extra axem lentis fuerit constitutum, quaestio est non solum difficillima, sed etiam ita prolixis calculis involvitur, ut inde vix quicquam concludi possit. Ceterum in usu, ad quem lentes accommodantur, nunquam obiecta ab axe remotiora spectari solent, atque contentos esse nos oportet, dummodo obiecta in ipso axe lentis sita distincte repraesententur; neque etiam confusio, qua obiecta axi proxima afficiuntur, sensibilis esse potest: nam cum imago extrema puncti E in ipso lentis axe siti sit punctum f, nulla confusione inquinatum, etiamsi id parumper esset remotum ab axe, vix sensibilis confusio se immiscere poterit. Quam ob causam investigationes sequentes tantum ad obiecta in ipso lentis axe sita adstringam.

DEFINITIO 3

12. *Spatium diffusionis vocatur intervallum inter imaginem principalem et extremam interceptum.*

Ita si imago principalis sit in F (Fig. 1, p. 7), extrema vero in f, intervallum Ff appellatur spatium diffusionis.

COROLLARIUM 1

13. Si ergo apertura lentis MM evanescat, spatium simul diffusionis evanescit, tum enim tantum radii axi proximi transmittuntur, quibus imago distincta in F effingitur. Ex quo intelligi licet, quo maior fuerit apertura lentis, eo maius fore spatium diffusionis Ff.

COROLLARIUM 2

14. Cum in F imago a radiis axi proximis, in f autem imago a radiis circa marginem circularem MM transmissis formetur: si totam aperturam lentis infinitis circulis concentricis divisam concipiamus, radii per singulos circulos transmissi imagines intermedias exhibebunt, quibus intervallum Ff replebitur.

COROLLARIUM 3

[illegible] enim apertura primum nulla, tum vero continuo increscens stago extrema primum cum principali congruet; tum vero continuo

magis ab ea discedet, sicque, cum usque ad MM fuerit aucta, omnes illae imagines etiam nunc subsistent spatiumque Ff implebunt.

SCHOLION 1

16. Spatium hoc diffusionis causam continet confusionis, qua repraesentatio imaginis perturbatur; cum enim eiusdem puncti lucidi E infinitae imagines per intervallum Ff dispositae exhibeantur, earum commistio confusionem pariat necesse est, quae eo maior erit, quo maius fuerit spatium diffusionis Ff. Quemadmodum enim ad repraesentationem distinctam requiritur, ut omnes radii ex eodem obiecti puncto emissi iterum in unico puncto colligantur, ita, si hi radii in plura puncta coeant pluresque eiusdem puncti imagines referant, prout hae magis minusve inter se discrepant, maior inde minorve confusio nascetur. Quemadmodum autem hanc confusionem aestimari oporteat, deinceps demum explicare licebit, cum ante spatium diffusionis accurate definire docuerimus: quo circa in hoc capite, cum proposita fuerit lens quaecunque vitrea faciebus sphaericis terminata, pro quavis puncti lucidi E ab ea distantia et quavis apertura spatium diffusionis Ff investigare constitui. Quo facto eandem investigationem pro duabus pluribusve lentibus inter se coniunctis suscipi conveniet, ut tandem inde confusionem in quibusvis instrumentis dioptricis assignare valeamus.

SCHOLION 2

17. Quaestio igitur principalis huius capitis in hoc versatur, ut proposita lente PP in eiusque axe puncto lucido E, radius quicunque incidens EM consideretur eiusque per lentem refractio definiatur, unde punctum f, ubi iterum in axem incidat, assignari queat. Cum enim in eodem puncto f omnes radii per totam peripheriam circularem MM transmissi concurrant, ab his imago quaepiam puncti E in f exprimetur, quae erit extrema, si circulus MM in lente eius aperturam determinet; sin autem capiatur minor, imago quaedam intermedia habebitur. Cum autem hic duplex refractio eveniat, altera in ingressu radii EM in vitrum, altera in egressu eiusdem e vitro, quemadmodum eius directio in utraque inflectatur, seorsim est investigandum; unde duo nascuntur problemata quasi praeliminaria, ex quorum combinatione deinceps negotium conficietur. Verum quo haec problemata commodius calculo expediri queant, quaedam lemmata ex doctrina angulorum petita praemitti oportet.

LEMMA 1

18. *Si angulus Φ triginta gradus non excedat, eius sinus satis accurate erit* $\sin.\Phi = \Phi - \frac{1}{6}\Phi^3$, *si quidem in circulo, cuius radius est* $=1$, *arcus* Φ, *qui pro illius anguli mensura habetur, in partibus radii exprimatur.*

DEMONSTRATIO

Quantuscunque fuerit angulus Φ, notum est eius sinum hac serie infinita exprimi:

$$\sin.\Phi = \Phi - \frac{1}{6}\Phi^3 + \frac{1}{120}\Phi^5 - \frac{1}{5040}\Phi^7 + \text{etc.}$$

sumtis igitur tantum binis primis terminis, error committitur reliquis neglectis aequalis; si ergo statuamus $\sin.\Phi = \Phi - \frac{1}{6}\Phi^3$ hincque pro variis angulis Φ sinus colligamus, eorum comparatio cum tabulis sinuum errores manifestabit. Ita si sumatur $\Phi = 30^0$, quia arcus 180^0 valet 3,14159265, erit in partibus radii $\Phi = 0{,}52359877$ et $\frac{1}{6}\Phi^3 = 0{,}0239246$, hincque

$$\begin{aligned} \Phi - \tfrac{1}{6}\Phi^3 &= 0{,}4996741. \quad \text{At est revera} \\ \sin.\Phi &= 0{,}5000000, \quad \text{unde habetur} \\ \hline \text{error} &= 0{,}0003259, \end{aligned}$$

qui ergo ne ad $\frac{1}{3000}$ partem radii quidem assurgit. At si angulus Φ caperetur duplo minor, scilicet $\Phi = 15^0$, reperiretur

$$\begin{aligned} \Phi - \tfrac{1}{6}\Phi^3 &= 0{,}2588088, \quad \text{cum tamen sit} \\ \sin.\Phi &= 0{,}2588190 \\ \hline \text{errore existente} &= 0{,}0000102, \end{aligned}$$

qui tricies bis minor est quam casu praecedente. Cum ergo in praxi error partem adeo termillesimam radii adaequans facile tolerari possit, multo magis, si angulus Φ fuerit 30^0 minor, expressio $\Phi - \frac{1}{6}\Phi^3$ verum eius sinum exhibere censenda erit.

LEMMA 2

19. *Vicissim si anguli triginta gradibus minoris detur sinus* $=s$, *ex eo ipse angulus ita proxime definitur, ut sit in circulo, cuius radius* $=1$, *arcus eum metiens* $= s + \frac{1}{6}s^3$.

DEMONSTRATIO

Si enim Φ designet istum angulum, cuius sinus proponitur $= s$, modo vidimus esse satis exacte $s = \Phi - \frac{1}{6}\Phi^3$; hinc autem per conversionem oritur proxime $\Phi = s + \frac{1}{6}s^3$, quae expressio quantum peccet in angulo triginta graduum ut videamus, sit $s = \frac{1}{2}$, eritque $s + \frac{1}{6}s^3 = 0{,}5208333$. Cum autem numerus 3,14159265 respondeat angulo 180°, hic numerus 0,5208333 praebet angulum 29°50′30″: verus autem angulus est 30°, ita ut error sit 9′30″. Sit autem $s = \frac{1}{4}$, cui sinui respondet angulus $= 14°28'39''$, erit

$$s + \frac{1}{6}s^3 = 0{,}2526041 \quad = 14°28'23'',$$

ita ut hoc casu error non excedat 16″. Patet ergo, dum angulus minor sit 30°, hoc modo satis exacte ex dato sinu reperiri angulum.

PROBLEMA 1

20. *Si ex puncto lucido E* (Fig. 2) *in superficiem sphaericam revolutione arcus circularis AM circa axem EC genitam incidat radius EM, definire eius, postquam fuerit refractus, concursum cum axe EC.*

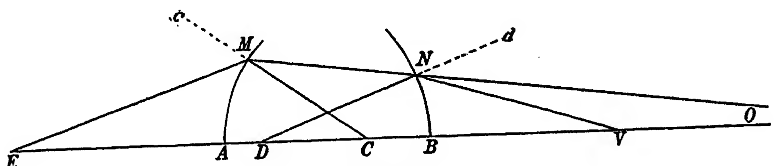

Fig. 2.

SOLUTIO

Sit C centrum superficiei sphaericae, eiusque radius $CA = CM = f$, et distantia puncti lucidi E a superficie refringente $EA = a$, tum vero sit ratio refractionis radiorum ex aere in vitrum $= n:1$. Vocetur pro radio incidente CM angulus $AEM = \Phi$, eritque huius anguli sinus $= \Phi - \frac{1}{6}\Phi^3$. Ponatur iam brevitatis gratia distantia $EC = a + f = c$, et quia in triangulo ECM dantur latera $CM = f$, $EC = c$ cum angulo $CEM = \Phi$, fiet producta CM in c

$$CM\ (f) : \text{sin. } CEM = CE\ (c) : \text{sin. } EMc$$

ideoque

$$\text{sin. } EMc = \frac{c}{f}\,\text{sin. } \Phi = \frac{c}{f}\left(\Phi - \frac{1}{6}\Phi^3\right);$$

unde ipse angulus EMc elicitur neglectis tertia altioribus potestatibus ipsius Φ:

$$EMc = \frac{c}{f}\Phi - \frac{c}{6f}\Phi^3 + \frac{c^3}{6f^3}\Phi^3 = \frac{c}{f}\Phi + \frac{c(cc-ff)}{6f^3}\Phi^3;$$

qui cum sit $= ECM + CEM$, erit

$$ECM = \frac{c-f}{f}\Phi + \frac{c(cc-ff)}{6f^3}\Phi^3.$$

Verum angulus EMc est angulus incidentiae, ac si MO referat radium refractum, erit CMO angulus refractionis, sicque per hypothesin

$$\sin. EMc : \sin. CMO = n:1,$$

unde colligitur

$$\sin. CMO = \frac{c}{nf}\left(\Phi - \frac{1}{6}\Phi^3\right)$$

hincque ipse angulus

$$CMO = \frac{c}{nf}\Phi + \frac{c(cc-nnff)}{6n^3f^3}\Phi^3,$$

quo ablato ab angulo ECM relinquitur angulus

$$COM = \frac{(n-1)c-nf}{nf}\Phi + \frac{c((n^3-1)cc-nn(n-1)ff)}{6n^3f^3}\Phi^3,$$

cuius sinus propterea erit

$$\sin. COM = \frac{(n-1)c-nf}{nf}\Phi + \frac{3(n-1)c^3+3(n-1)^2ccf-4n(n-1)cff+nnf^3}{6nnf^3}\Phi^3.$$

Iamvero ob $\sin. COM : CM\ (f) = \sin. CMO : CO$ obtinebitur

$$CO = \frac{\frac{c}{n} - \frac{c}{6n}\Phi\Phi}{\frac{(n-1)c-nf}{nf} + \frac{3(n-1)c^3+3(n-1)^2ccf-4n(n-1)cff+nnf^3}{6nnf^3}\Phi^2},$$

cuius formulae evolutio praebet:

$$CO = \frac{cf}{(n-1)c-nf} - \frac{cf\Phi\Phi}{6((n-1)c-nf)} - \frac{c(3(n-1)c^3+3(n-1)^2ccf-4n(n-1)cff+nnf^3)}{6nf((n-1)c-nf)^2}\Phi\Phi,$$

quae porro reducitur ad hanc formam:

$$CO = \frac{cf}{(n-1)c-nf} - \frac{(n-1)cc(c-f)(c+nf)}{2nf((n-1)c-nf)^2}\Phi\Phi,$$

cui si addamus $CA = f$, prodibit

$$AO = \frac{nf(c-f)}{(n-1)c-nf} - \frac{(n-1)cc(c-f)(c+nf)}{2nf((n-1)c-nf)^2}\Phi\Phi,$$

atque hinc positio radii refracti MO primo per intervallum AO modo inventum definitur, tum vero insuper ex angulo AOM, qui erit:

$$AOM = \frac{(n-1)c - nf}{nf}\Phi + \frac{c((n^3-1)cc - nn(n-1)ff)}{6n^3f^3}\Phi^3$$

sive

$$AOM = \frac{(n-1)c - nf}{nf}\Phi + \frac{(n-1)c((nn+n+1)cc - nnff)}{6n^3f^3}\Phi^3.$$

COROLLARIUM 1

21. Cum posuerimus $c = a + f$, erit

$$c - f = a \quad \text{et} \quad (n-1)c - nf = (n-1)a - f,$$

atque

$$(nn+n+1)cc - nnff = (nn+n+1)aa + 2(nn+n+1)af + (n+1)ff,$$

quibus valoribus substitutis habebimus

$$AO = \frac{naf}{(n-1)a - f} - \frac{(n-1)a(a+f)^2(a+(n+1)f)}{2nf((n-1)a-f)^2}\Phi\Phi$$

et

$$AOM = \frac{(n-1)a - f}{nf}\Phi + \frac{(n-1)(a+f)((nn+n+1)a(a+2f) + (n+1)ff)}{6n^3f^3}\Phi^3.$$

COROLLARIUM 2

22. Si M sit in extremitate aperturae, erit semidiameter aperturae $= f$ sin. $ECM = a\Phi$ satis exacte: neque enim necesse est aperturam tam exacte nosse. Unde si semidiameter aperturae ponatur $= x$, erit prope $x = a\Phi$ ideoque $\Phi = \frac{x}{a}$.

COROLLARIUM 3

23. Si accuratius rem definire velimus, quia est

$$\text{sin. } ECM = \frac{c-f}{f}\Phi + \frac{(c-f)(3c-f)}{6ff}\Phi^3 = \frac{a}{f}\Phi + \frac{a(3a+2f)}{6ff}\Phi^3,$$

erit

$$x = a\Phi + \frac{a(3a+2f)}{6f}\Phi^3 \quad \text{ideoque} \quad \Phi = \frac{x}{a} - \frac{(3a+2f)x^3}{6a^3f};$$

sed quia in valore ipsius AO non ultra secundam dimensionem ipsius Φ ascendimus, hac expressione non indigemus.

COROLLARIUM 4

24. Etsi hae expressiones tantum sunt prope verae, tamen in praxi sine errore adhiberi poterunt, dummodo anguli, qui in calculum sunt ingressi, infra 30^0 subsistant. Non solum ergo necesse est, ut angulus $AEM = \Phi$, sed etiam angulus EMc seu $\frac{c}{f}\Phi = \Phi + \frac{a}{f}\Phi$ minor sit 30 gradibus.

SCHOLION

25. Summo quidem rigore geometrico distantiam EO definire potuissemus, neque opus fuisset ad approximationes confugere: scilicet si posuissemus angulum $ECM = \omega$ et distantiam $CO = u$; devenissemus ad hanc determinationem

$$\frac{cf}{u} = -c\cos.\omega + \sqrt{(nn(c\cos.\omega - f)^2 + (nn-1)cc\sin.\omega^2)},$$

foretque

$$\cos.\omega = \frac{c}{f}\sin.\Phi^2 + \cos.\Phi\sqrt{\left(1 - \frac{cc}{ff}\sin.\Phi^2\right)}$$

et

$$\sin.\omega = \frac{c}{f}\sin.\Phi\cos.\Phi - \sin.\Phi\sqrt{\left(1 - \frac{cc}{ff}\sin.\Phi^2\right)}$$

hisque valoribus substitutis

$$\frac{cf}{u} = \frac{-cc\sin.\Phi^2}{f} - c\cos.\Phi\sqrt{\left(1 - \frac{cc}{ff}\sin.\Phi^2\right)}$$
$$+ (c\cos.\Phi - \sqrt{(ff - cc\sin.\Phi^2)})\sqrt{\left(nn - \frac{cc}{ff}\sin.\Phi^2\right)}$$

unde ponendo angulo Φ valde parvo per approximationem superior expressio eliceretur. Verum praecedens analysis magis ad praesens institutum videtur accommodata. Interim si quis propius ad veritatem accedere voluerit, ex formula vera hic exhibita adipiscetur

$$\frac{cf}{u} = (n-1)c\cos.\Phi - nf + \frac{(n-1)cc}{2nff}((n-1)f + c\cos.\Phi)\sin.\Phi^2$$
$$+ \frac{c^4}{8n^3f^4}((nn-1)^2 f + (n^3-1)c\cos.\Phi)\sin.\Phi^4$$

seu

$$\frac{cf}{u} = (n-1)c - nf + \frac{(n-1)c(c-f)(c+nf)}{2nff}\Phi\Phi$$
$$+ \frac{(n-1)c((c-f)(3(nn+n+1)c^3 + 3nn(n+2)ccf + nn(3n-4)cff) - n^3f^3c)}{24n^3f^4}\Phi^4.$$

PROBLEMA 2

26. *Si, prout in problemate praecedente invenimus, radius MO* (Fig. 2, p. 13) *in vitrum missus per superficiem sphaericam BN iterum in aerem erumpat, definire punctum V, ubi is cum axe concurret.*

SOLUTIO

Ponatur intervallum $AB = d$ sitque superficiei sphaericae BN centrum in D eiusque radius $DB = DN = g$. Quoniam igitur positio radii incidentis MNO datur, ponamus $BO = b$ et angulum $BON = \Psi$ et brevitatis ergo intervallum $DO = b + g = e$. Cum nunc in triangulo DON dentur latera $DN = g$, $DO = e$ cum angulo $BON = \Psi$, reperitur

$$\sin. DNM = \frac{e}{g} \sin. \Psi = \frac{e}{g} \Psi - \frac{e}{6g} \Psi^3$$

hincque

$$DNM = \frac{e}{g} \Psi + \frac{e(ee-gg)}{6g^3} \Psi^3 \quad \text{et} \quad ODN = \frac{e-g}{g} \Psi + \frac{e(ee-gg)}{6g^3} \Psi^3.$$

Sed hic sin. DNM est sinus incidentiae, cui respondet angulus refractionis VNd, cuius sinus propterea est ad illum ut $n:1$, unde fit

$$\sin. VNd = \frac{ne}{g} \Psi - \frac{ne}{6g} \Psi^3$$

hincque

$$VNd = \frac{ne}{g} \Psi + \frac{ne(nnee-gg)}{6g^3} \Psi^3,$$

a quo ablato angulo ODN relinquitur angulus

$$DVN = \frac{(n-1)e+g}{g} \Psi + \frac{e((n^3-1)ee-(n-1)gg)}{6g^3} \Psi^3,$$

ergo

$$\sin. DVN = \frac{(n-1)e+g}{g} \Psi + \frac{3n(n-1)e^3 - 3(n-1)^2eeg - 4(n-1)egg - g^3}{6g^3} \Psi^3.$$

Cum nunc sit sin. $DVN : g = $ sin. $VNd : DV$, erit

$$\frac{g}{DV} = \frac{(n-1)e + g + \frac{1}{6gg}(3n(n-1)e^3 - 3(n-1)^2eeg - 4(n-1)egg - g^3)\Psi^2}{ne - \frac{1}{6}ne\Psi^2},$$

quae expressio reducitur ad hanc formam:

$$\frac{g}{DV} = \frac{(n-1)e+g}{ne} + \frac{(n-1)(e-g)(ne+g)\Psi^2}{2ngg},$$

unde reciproce oritur

$$DV = \frac{neg}{(n-1)e+g} - \frac{n(n-1)ee(e-g)(ne+g)}{2g((n-1)e+g)^2}\Psi^2$$

et

$$BV = \frac{g(e-g)}{(n-1)e+g} - \frac{n(n-1)ee(e-g)(ne+g)}{2g((n-1)e+g)^2}\Psi^2.$$

Puncto autem V invento notandum est esse angulum

$$BVN = \frac{(n-1)e+g}{g}\Psi + \frac{e((n^3-1)ee-(n-1)gg)}{6g^3}\Psi^3.$$

COROLLARIUM 1

27. Cum sit $e = b+g$, erit $(n-1)e+g = (n-1)b+ng$, quo valore restituto habebimus

$$BV = \frac{bg}{(n-1)b+ng} - \frac{n(n-1)b(b+g)^2(nb+(n+1)g)}{2g((n-1)b+ng)^2}\Psi^2$$

et

$$BVN = \frac{(n-1)b+ng}{g}\Psi + \frac{(b+g)((n^3-1)(b+g)^2-(n-1)gg)}{6g^3}\Psi^3.$$

COROLLARIUM 2

28. Hae formulae etiam ex praecedentibus erui possunt, si pro litteris n, a, f scribantur $\frac{1}{n}$, $-b$ et $-g$, quoniam hoc modo casus praecedentis problematis ad hunc reducitur. Praeterea autem, qui angulus ibi erat Φ, hic est Ψ.

COROLLARIUM 3

29. Quia in praecedente problemate invenimus tam lineam AO quam angulum AOM, erit hoc problemate ad radium illum refractum MO accommodato

$$BO = b = \frac{naf}{(n-1)a-f} - d - \frac{(n-1)a(a+f)^2(a+(n+1)f)}{2nf((n-1)a-f)^2}\Phi\Phi$$

$$\Psi = \frac{(n-1)a-f}{n}\Phi + \frac{(n-1)(a+f)((nn+n+1)a(a+2f)+(n+1)ff)}{6n^3f^3}\Phi^3.$$

PROBLEMA 3

30. *Proposita lente vitrea $MABN$* (Fig. 2, p. 13) *faciebus sphaericis AM et BN terminata, si a puncto quocunque E in eius axe posito incidat in eam radius EM, definire punctum V, in quo is post geminam refractionem iterum cum axe lentis sit concursurus.*

SOLUTIO

Consideremus lentem ut utrinque convexam, sitque faciei anterioris AM radius $AC = f$, posterioris vero BN radius $BD = g$, ipsius lentis autem crassities $AB = d$. Lens porro sit vitrea, ita ut, si in eam radius lucis ex aere incidat, sit sinus incidentiae ad sinum refractionis ut n ad 1. Iam recta iungens centra utriusque faciei C et D erit axis lentis, in quo reperiatur punctum lucidum E ante lentem in distantia $AE = a$, unde sub angulo $AEM = \Phi$ in lentem incidat radius EM, qui prima refractione ita inflectatur, ut productus cum axe concurrat in O. Quodsi iam ex iis, quae problemate primo sunt inventa, ponamus

$$BO = \frac{naf}{(n-1)a-f} - d - \frac{(n-1)a(a+f)^2(a+(n+1)f)}{2nf((n-1)a-f)^2}\Phi\Phi = b$$

et

$$\text{ang. } BON = \frac{(n-1)a-f}{nf}\Phi = \Psi;$$

in valore enim anguli Ψ negligere licet terminum Φ^3 involventem, quoniam calculum tantum ad secundam potestatem ipsius Ψ extendimus; his positis in problemate secundo invenimus fore

$$BV = \frac{bg}{(n-1)b+ng} - \frac{n(n-1)b(b+g)^2(nb+(n+1)g)}{2g((n-1)b+ng)^2}\Psi\Psi$$

et

$$BVN = \frac{(n-1)b+ng}{g}\Psi.$$

Totum ergo negotium huc redit, ut isthic pro b et Ψ valores assignatos substituamus, quod quo facilius fieri possit, statuamus

$$b = P - Q\Phi\Phi \quad \text{et} \quad \Psi = R\Phi,$$

Nullum igitur est dubium, quin si statim distantiam α in calculum introduxissemus, via breviori ad eas pervenire licuisset. Ceterum quia hae formulae posteriores non amplius crassitiem lentis $AB = d$ involvunt, evidens est eas ex primo inventis nasci, si introducta distantia α crassities d eliminetur seu eius loco hic valor surrogetur:

$$d = \frac{n(n-1)a\alpha(f+g) - n(a+\alpha)fg}{(n-1)^2 a\alpha - (n-1)(ag+\alpha f) + fg} = n\,\frac{(n-1)a\alpha(f+g) - (a+\alpha)fg}{((n-1)a - f)((n-1)\alpha - g)},$$

qui labor autem ne suscipi quidem mereretur, nisi iam ante de eximio eius usu certiores essemus facti. In sequentibus igitur his elegantioribus formulis utamur, quoad negotium adhuc succinctius expedire didicerimus.

PROBLEMA 4

35. *Proposita lente quacunque faciebus sphaericis terminata, si obiectum in data ab ea distantia sit constitutum, pro data lentis apertura spatium diffusionis assignare.*

SOLUTIO

Concipiamus lentem utrinque convexam, sitque faciei anterioris MAM radius (Fig. 1) $= f$, posterioris $NBN = g$ lentisque crassities $AB = d$. Sit porro MM lentis huius apertura, cuius semidiameter sit $= x$; atque in axe

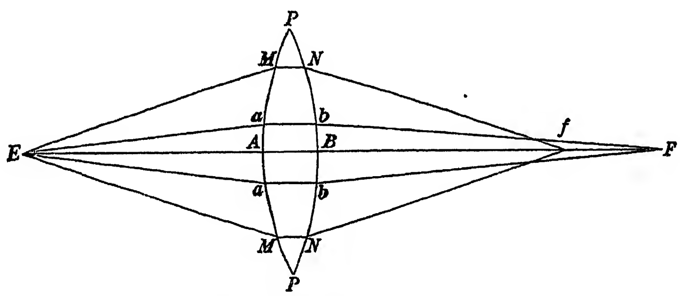

Fig. 1 (iterata).

lentis expositum sit obiectum vel saltem punctum lucidum E, cuius a lente ponatur distantia $AE = a$. Iam primo quaeramus eius imaginem principalem, quae cadat in F, atque supra (§ 31) invenimus fore

$$BF = \frac{nafg - (n-1)adg + dfg}{n(n-1)a(f+g) - nfg - (n-1)^2 ad + (n-1)df}.$$

Vocetur ergo haec distantia $= \alpha$, et si radii EM circa oram aperturae trans-

eant, erit angulus $AEM = \Phi = \frac{x}{a}$, quo valore in superioribus formulis substituto prodibit distantia imaginis extremae f a lente, scilicet:

$$Bf = \alpha - \frac{(n-1)a(a+f)^2(g-(n-1)\alpha)^2(a+(n+1)f)}{2nnfgg((n-1)a-f)^2} \cdot \frac{xx}{aa}$$
$$- \frac{(n-1)\alpha(\alpha+g)^2((n-1)a-f)^2(\alpha+(n+1)g)}{2nnffg(g-(n-1)\alpha)^2} \cdot \frac{xx}{aa},$$

ex quo colligitur spatium diffusionis quaesitum:

$$Ff = \begin{cases} + \dfrac{(n-1)a(a+f)^2(g-(n-1)\alpha)^2(a+(n+1)f)}{2nnfgg((n-1)a-f)^2} \cdot \dfrac{xx}{aa} \\[2ex] + \dfrac{(n-1)\alpha(\alpha+g)^2((n-1)a-f)^2(\alpha+(n+1)g)}{2nnffg(g-(n-1)\alpha)^2} \cdot \dfrac{xx}{aa}, \end{cases}$$

ac praeterea angulus BfN erit

$$BfN = \frac{((n-1)a-f)g}{(g-(n-1)\alpha)f} \cdot \frac{x}{a}.$$

COROLLARIUM 1

36. Quoties ergo spatium diffusionis hoc modo expressum est positivum, imago extrema propius ad lentem cadit quam principalis, seu est $Bf < BF$. Contra autem si ista expressio valorem obtineat negativum, imago extrema a lente longius erit remota principali.

COROLLARIUM 2

37. Patet hinc etiam spatium diffusionis cum apertura ita crescere, ut sit quadrato semidiametri aperturae proportionale; sequetur ergo ipsam aperturae rationem.

COROLLARIUM 3

38. Spatium diffusionis etiam hoc modo exprimi potest

$$Ff = \begin{cases} + \dfrac{(n-1)a\left(1+\frac{a}{f}\right)^2\left(1-\frac{(n-1)\alpha}{g}\right)^2\left(n+1+\frac{a}{f}\right)}{2nn\left(\frac{(n-1)a}{f}-1\right)^2} \cdot \dfrac{xx}{aa} \\[3ex] + \dfrac{(n-1)\alpha\left(1+\frac{\alpha}{g}\right)^2\left(\frac{(n-1)a}{f}-1\right)^2\left(n+1+\frac{\alpha}{g}\right)}{2nn\left(1-\frac{(n-1)\alpha}{g}\right)^2} \cdot \dfrac{xx}{aa} \end{cases}$$

et ν numeris quibuscunque, ut sit $\mu+\nu=1$; unde infinitae lentes quaesito satisfacientes obtinentur. Deinde si huius lentis semidiameter aperturae ponatur $=x$, spatium diffusionis Ff ita exprimi potest, ut sit

$$Ff=\frac{\alpha\alpha xx}{2nn(n-1)^2}\left\{\begin{array}{l}+\frac{\nu\nu}{\mu\mu}\left(\frac{n-1}{a}+\frac{n-1}{f}\right)^2\left(\frac{nn-1}{a}+\frac{n-1}{f}\right)\\+\frac{\mu\mu}{\nu\nu}\left(\frac{n-1}{\alpha}+\frac{n-1}{g}\right)^2\left(\frac{nn-1}{\alpha}+\frac{n-1}{g}\right)\end{array}\right\}$$

et

$$\text{angulus } BfN=\frac{\mu x}{(\mu-1)\alpha}.$$

Quod si iam hic pro $\frac{n-1}{f}$ et $\frac{n-1}{g}$ valores assignati substituantur, spatium diffusionis erit

$$Ff=\frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left(\frac{\nu\nu}{\mu\mu}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\nu d}\right)^2\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\nu d}\right)+\frac{\mu\mu}{\nu\nu}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\mu d}\right)^2\left(\frac{n}{\alpha}+\frac{1}{\mu d}\right)\right)$$

seu

$$Ff=\frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left\{\begin{array}{l}+\frac{\nu\nu}{\mu\mu}\left(\frac{n}{a^3}+\frac{2n+1}{\nu aad}+\frac{n+2}{\nu\nu add}+\frac{1}{\nu^3d^3}\right)\\+\frac{\mu\mu}{\nu\nu}\left(\frac{n}{\alpha^3}+\frac{2n+1}{\mu\alpha\alpha d}+\frac{n+2}{\mu\mu\alpha dd}+\frac{1}{\mu^3d^3}\right)\end{array}\right\}$$

Si crassities lentis fuerit valde parva, ne confusio fiat enormis, necesse est pro μ et ν sumi numeros vehementer magnos, alterum scilicet positivum, alterum negativum. Cum igitur sit $\mu d+\nu d=d$, statuatur

$$\mu d=\frac{d-k}{2}\quad\text{et}\quad \nu d=\frac{d+k}{2},$$

ut sit

$$\frac{n-1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{2n}{k+d}\quad\text{et}\quad\frac{n-1}{g}=\frac{1}{\alpha}-\frac{2n}{k-d}$$

seu

$$f=\frac{(n-1)a(k+d)}{2na+k+d}\quad\text{et}\quad g=\frac{(n-1)\alpha(k-d)}{k-d-2n\alpha},$$

hincque obtinetur spatium diffusionis

$$Ff=\frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left\{\begin{array}{l}+\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2\left(\frac{n}{a}+\frac{2}{k+d}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{k+d}\right)^2\\+\left(\frac{k-d}{k+d}\right)^2\left(\frac{n}{\alpha}-\frac{2}{k-d}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{k-d}\right)^2\end{array}\right\}$$

in quibus formulis parvitas crassitiei lentis $AB=d$ nullum negotium facessit; tum vero est

$$\text{angulus } BfN=\frac{k-d}{k+d}\cdot\frac{x}{\alpha}.$$

COROLLARIUM 1

42. Propositis ergo binis distantiis $AE = a$ et $BF = \alpha$ una cum crassitie lentis $AB = d$, infinitis modis lentes idoneae parari possunt, cum pro k quantitates pro lubitu sive positivae sive negativae assumi queant.

COROLLARIUM 2

43. Cum semidiameter aperturae x faciem anteriorem respiciat et angulus BfN seu BFN sit $= \frac{k-d}{k+d} \cdot \frac{x}{\alpha}$, existente distantia $BF = \alpha$, manifestum est semidiametrum aperturae posterioris faciei esse debere $= \frac{k-d}{k+d} \cdot x$ vel saltem non minorem.

COROLLARIUM 3

44. Quodsi lentis crassities tam sit parva, ut ea prae k contemni queat, formulae nostrae fient simpliciores

$$f = \frac{(n-1)ak}{k+2na} \quad \text{et} \quad g = \frac{(n-1)\alpha k}{k-2n\alpha}$$

et spatium diffusionis

$$Ff = \frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left(\left(\frac{n}{a}+\frac{2}{k}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{k}\right)^2 + \left(\frac{n}{\alpha}-\frac{2}{k}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{k}\right)^2\right)$$

$$\text{angulusque } BfN = \frac{x}{\alpha}.$$

SCHOLION

45. Sufficiat haec de spatio diffusionis in genere, quaecunque fuerit lentis crassities, tradidisse, cum non obstante his satis concinnis transformationibus calculus nimium fieret molestus, si in determinatione spatii diffusionis rationem crassitiei lentis habere vellemus. Licebit autem, ut modo vidimus, crassitiem lentis negligere non solum, quando ipsa est per se valde exigua, verum etiam dummodo prae quantitate k fuerit perparva. Atque hinc etiam in sequentibus facile iudicare poterimus, utrum crassitiem lentis recte in calculo contemserimus, nec ne? quovis enim casu consideretur quantitas pro k assumta, quae si multoties fuerit maior quam d, error nullus erit pertimescendus; contra vero si k non multum superet d, multum aberrabitur, quantumvis exigua fuerit crassities ipsa per se.

Ut fiat Ff minimum, definiri potest conveniens valor ipsius k hoc modo. Ponatur $\frac{k-d}{k+d}=z$, et pro minimo pervenitur ad hanc aequationem:

$$0=2z^4\left(\frac{n}{\alpha}+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{d}\right)^2-\frac{2nz^3}{\alpha d}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{d}\right)-\frac{z^3}{d}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{d}\right)^2$$
$$+\frac{2nz}{ad}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{d}\right)+\frac{z}{d}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{d}\right)^2-2\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{d}\right)^2$$

unde valor ipsius z erui debet.

PROBLEMA 6

46. *Neglecta lentis crassitie, si detur cum obiecti ante lentem distantia $AE=a$ tum imaginis principalis post lentem distantia $BF=\alpha$, eam definire lentem, quae pro data apertura minimam pariat diffusionem.*

SOLUTIO

Positis radiis faciei anterioris $AM=f$ et posterioris $BN=g$, utraque ut convexa spectata, vidimus omnes lentes datis distantiis a et α convenientes his formulis determinari, si scilicet pro k scribamus $2k$:

$$\frac{n-1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{n}{k} \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{g}=\frac{1}{\alpha}-\frac{n}{k}$$

denotante k quantitatem quamcunque. Tum autem spatium diffusionis ita exprimi est repertum

$$Ff=\frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left(\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{n}{\alpha}-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{k}\right)^2\right)$$

quae expressio ad hanc reducitur formam:

$$Ff=\frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(n\left(\frac{1}{aa}-\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{\alpha\alpha}\right)+\frac{2n+1}{k}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{n+2}{kk}\right).$$

Quaestio igitur huc reducitur, ut definiatur quantitas k, qua huic expressioni valor minimus concilietur; cui quidem requisito satisfacit valor

$$\frac{1}{k}=\frac{-(2n+1)}{2(n+2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{seu} \quad \frac{1}{k}=\frac{2n+1}{2(n+2)}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{a}\right)$$

quo substituto habebitur:

$$\frac{n-1}{f}=\frac{4+n-2nn}{2(n+2)a}+\frac{n(2n+1)}{2(n+2)\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{g}=\frac{4+n-2nn}{2(n+2)\alpha}+\frac{n(2n+1)}{2(n+2)a}$$

et spatium diffusionis, quod est minimum:

$$Ff=\frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(n\left(\frac{1}{aa}-\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{\alpha\alpha}\right)-\frac{(2n+1)^2}{4(n+2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)^2\right).$$

At est

$$n\left(\frac{1}{aa}-\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{\alpha\alpha}\right)=n\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{n}{a\alpha}$$

ideoque

$$Ff=\frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{4n-1}{4(n+2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{n}{a\alpha}\right)$$

quae expressio etiam in hanc formam transfunditur

$$Ff=\frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{4n-1}{4(n+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{(n-1)^2}{(n+2)a\alpha}\right)$$

seu

$$Ff=\frac{n(4n-1)\alpha\alpha xx}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{4(n-1)^2}{(4n-1)a\alpha}\right).$$

COROLLARIUM 1

47. Ut igitur lens minimum spatium diffusionis producat, eam ita formari necesse est, ut sit

$$f=\frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{n(2n+1)a+(4+n-2nn)\alpha} \quad \text{et} \quad g=\frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{n(2n+1)\alpha+(4+n-2nn)a}$$

neglecta scilicet lentis crassitie, quae quidem recte negligitur, si modo fuerit vehementer parva prae quantitate $k=\frac{2(n+2)a\alpha}{(2n+1)(a-\alpha)}$.

COROLLARIUM 2

48. Si igitur sit $a=\alpha$ seu $BF=AE$, crassities lentis, quantacunque fuerit, nihil turbat in spatio diffusionis. Pro hoc autem casu erit $f=g=(n-1)a$ et spatium diffusionis ipsum $Ff=\frac{nnxx}{(n-1)^2a}$. At quo magis distantiae a et α a se invicem discrepant seu minor fuerit quantitas $\frac{a\alpha}{a-\alpha}$, eo magis haec determinatio ob lentis crassitiem fiet erronea.

COROLLARIUM 3

49. Spatium autem hoc confusionis minimum Ff pluribus modis exhiberi potest, inter quos commodissimum eligi convenit; sunt autem praecipui:

$$\text{I. } Ff = \frac{n(4n-1)a\alpha x x}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{4(n-1)^2}{(4n-1)a\alpha}\right)$$

$$\text{II. } Ff = \frac{n(4n-1)a\alpha x x}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{4n(n+2)}{(4n-1)a\alpha}\right)$$

$$\text{III. } Ff = \frac{n(4n-1)a\alpha x x}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(\frac{1}{aa}+\frac{1}{\alpha\alpha}\right)+\frac{2(2nn+1)}{(4n-1)a\alpha}\right)$$

$$\text{IV. } Ff = \frac{n(4n-1)a\alpha x x}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(\frac{1}{aa}-\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{\alpha\alpha}\right)+\frac{(2n+1)^2}{(4n-1)a\alpha}\right)$$

COROLLARIUM 4

50. Cum ergo hoc spatium diffusionis sit minimum, si lenti alia quaecunque figura tribuatur, ita tamen, ut obiecti ad distantiam $AE=a$ remoti imaginem principalem in distantia $BF=\alpha$ exhibeat, spatium diffusionis erit maius, quam hic invenimus.

SCHOLION

51. Quia $n:1$ denotat rationem refractionis ex aere in vitrum, haec autem pro radiorum natura est variabilis, conveniet pro n medium valorem assumi, qui est $n=\frac{31}{20}$; hinc ergo erit

$$n-1=\frac{11}{20};\quad n+2=\frac{71}{20};\quad 2n+1=\frac{41}{10};\quad 4+n-2nn=\frac{140}{200};$$

hincque

$$\frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)}=\frac{1271}{781}=1{,}627401;\quad \frac{4+n-2nn}{2(n-1)(n+2)}=\frac{149}{781}=0{,}190781;$$

unde lens minimam confusionem pariens ita definietur

$$\frac{1}{f}=\frac{149}{781a}+\frac{1271}{781\alpha}=\frac{0{,}190781}{a}+\frac{1{,}627401}{\alpha},\quad \frac{1}{g}=\frac{149}{781\alpha}+\frac{1271}{781a}=\frac{0{,}190781}{\alpha}+\frac{1{,}627401}{a}$$

seu

$$f=\frac{781a\alpha}{149\alpha+1271a}=\frac{a\alpha}{0{,}190781\alpha+1{,}627401a}$$

et

$$g=\frac{781a\alpha}{149a+1271\alpha}=\frac{a\alpha}{0{,}190781a+1{,}627401\alpha}.$$

Pro spatio autem diffusionis ipso definiendo ob $4n-1=\frac{26}{5}$ erit

$$\frac{n(4n-1)}{8(n-1)^2(n+2)}=\frac{8060}{8591}=0{,}938191 \quad \text{et} \quad \frac{4(n-1)^2}{4n-1}=\frac{121}{520}=0{,}232692$$

hincque

$$Ff=0{,}938191\,\alpha\alpha xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{0{,}232692}{a\alpha}\right)$$

unde reliquae formulae facile deducuntur. Ceterum hic monendum est, quoniam valor $n=\frac{31}{20}$ ex experimentis est conclusus neque ipse pro omnibus radiorum generibus valet, superfluum fore in praxi hos numeros inventos nimis studiose observare; quin etiam ipsa natura minimi aliquam aberrationem permittit. Nihilo vero minus has fractiones decimales ad tot figuras producere visum est, quo facilius, quantum ab hac hypothesi aberretur, dignosci queat.

PROBLEMA 7

52. *Neglecta lentis crassitie, si detur cum obiecti ante lentem distantia $AE=a$ tum imaginis principalis post lentem distantia $BF=\alpha$, eam definire lentem, quae pro data apertura non minimum, sed datum pariat spatium diffusionis Ff.*

SOLUTIO

Lente utrinque ut convexa spectata sit faciei anterioris radius $=f$, posterioris $=g$; atque ut ex data distantia obiecti $AE=a$ data oriatur imaginis principalis distantia $=\alpha$, necesse est, sit in genere

$$\frac{n-1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{n}{k} \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{g}=\frac{1}{\alpha}-\frac{n}{k},$$

unde spatium diffusionis fit

$$Ff=\frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(n\left(\frac{1}{aa}-\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{\alpha\alpha}\right)+\frac{2n+1}{k}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{n+2}{kk}\right).$$

Cum autem spatium diffusionis minimum repertum sit

$$\frac{n(4n-1)\alpha\alpha xx}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{4(n-1)^2}{(4n-1)a\alpha}\right)$$

necesse est, ut illud sit maius. Statuatur ergo:

$$Ff=\frac{n(4n-1)\alpha\alpha xx}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{4(n-1)^2}{(4n-1)a\alpha}+S\right)$$

et habebitur ista aequatio:

$$4n(n+2)\left(\frac{1}{aa}-\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{\alpha\alpha}\right)+\frac{4(n+2)(2n+1)}{k}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{4(n+2)^2}{kk}$$
$$=(4n-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{4(n-1)^2}{a\alpha}+(4n-1)S,$$

quae in hanc formam redigitur

$$(2n+1)^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{4(n+2)(2n+1)}{k}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{4(n+2)^2}{kk}=(4n-1)S,$$

unde radice extracta fit

$$(2n+1)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{2(n+2)}{k}=\sqrt{(4n-1)S}$$

et

$$\frac{1}{k}=\frac{-(2n+1)}{2(n+2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{\sqrt{(4n-1)S}}{2(n+2)}.$$

Quare erit

$$\frac{n-1}{f}=\frac{1}{a}-\frac{n(2n+1)}{2(n+2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{n}{2(n+2)}\sqrt{(4n-1)S}$$
$$\frac{n-1}{g}=\frac{1}{\alpha}+\frac{n(2n+1)}{2(n+2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{n}{2(n+2)}\sqrt{(4n-1)S}$$

sive

$$f=\frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{(4+n-2nn)\alpha+n(2n+1)a+na\alpha\sqrt{(4n-1)S}}$$
$$g=\frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{(4+n-2nn)a+n(2n+1)\alpha-na\alpha\sqrt{(4n-1)S}}.$$

Oportet ergo pro S sumi quantitatem positivam, atque ut cum reliqua parte, cui iungitur, sit homogenea, ponamus

$$S=(\lambda-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2$$

ubi λ denotat numerum unitate maiorem; atque effici poterit, ut spatium diffusionis ita exprimatur

$$Ff=\frac{n(4n-1)\alpha\alpha xx}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{4(n-1)^2}{(4n-1)a\alpha}\right)$$

quod cum ut datum spectetur, numerus λ pro dato assumi poterit, ac lens hunc effectum producens ita determinabitur:

$$f = \frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{(4+n-2nn)\alpha + n(2n+1)a + n(a+\alpha)\sqrt{(4n-1)(\lambda-1)}}$$

$$g = \frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{(4+n-2nn)a + n(2n+1)\alpha - n(a+\alpha)\sqrt{(4n-1)(\lambda-1)}},$$

quod ergo, cum signum radicale ambiguo illatum involvat, duplici modo fieri poterit.

COROLLARIUM 1

53. Omnes igitur lentes, quae obiecti ad distantiam $AE = a$ remoti imaginem principalem in distantia $BF = \alpha$ repraesentant, hanc habent proprietatem, ut sit:

$$\frac{n-1}{f} + \frac{n-1}{g} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \quad \text{seu} \quad \frac{fg}{f+g} = \frac{(n-1)a\alpha}{a+\alpha},$$

et cum sit $n = \frac{31}{20}$, erit

$$\frac{fg}{f+g} = \frac{11a\alpha}{20(a+\alpha)} = \frac{0{,}55\,a\alpha}{a+\alpha}.$$

COROLLARIUM 2

54. Si ergo lens sit utrinque aeque convexa seu $f = g$, oportet esse

$$f = g = \frac{2(n-1)a\alpha}{a+\alpha} = \frac{11a\alpha}{10(a+\alpha)};$$

sin autem lens desideretur plano-convexa, ut sit $f = \infty$, capi debet

$$g = \frac{(n-1)a\alpha}{a+\alpha} = \frac{11a\alpha}{20(a+\alpha)} = \frac{0{,}55\,a\alpha}{a+\alpha}.$$

At si lens debeat esse convexo-plana seu $g = \infty$, capi oportet

$$f = \frac{(n-1)a\alpha}{a+\alpha} = \frac{11a\alpha}{20(a+\alpha)} = \frac{0{,}55\,a\alpha}{a+\alpha}.$$

SCHOLION 1

55. Substituamus pro n valorem ipsi convenientem $\frac{31}{20}$, et iam vidimus fore:

$$\frac{n(4n-1)}{8(n-1)^2(n+2)} = \frac{8060}{8591} = 0{,}938191; \qquad \frac{4(n-1)^2}{4n-1} = \frac{121}{520} = 0{,}232692;$$

$$\frac{4+n-2nn}{2(n-1)(n+2)} = \frac{149}{781} = 0{,}190781; \qquad \frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)} = \frac{1271}{781} = 1{,}627401;$$

nunc vero notari oportet esse:

$$\frac{n\sqrt{(4n-1)}}{2(n-1)(n+2)}=\frac{62\sqrt{130}}{781}=0{,}905133.$$

Quare si lens ita construatur, ut sit

$$f=\frac{a\alpha}{0{,}190781\,\alpha+1{,}627401\,a\pm 0{,}905133\,(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}}$$

$$g=\frac{a\alpha}{0{,}190781\,a+1{,}627401\,\alpha\mp 0{,}905133\,(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}},$$

erit pro eius apertura, cuius semidiameter $=x$, spatium diffusionis

$$Ff=0{,}938191\,a\alpha xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{0{,}232692}{a\alpha}\right).$$

Cum autem in posterum hi numeri frequentissime occurrant, eorum loco ad abbreviandum certis characteribus utamur; ponamus ergo

$$\frac{n(4n-1)}{8(n-1)^2(n+2)}=0{,}938191=\mu,\qquad \frac{4(n-1)^2}{4n-1}=0{,}232692=\nu,$$

$$\frac{4+n-2nn}{2(n-1)(n+2)}=0{,}190781=\varrho,\quad \frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)}=1{,}627401=\sigma,$$

$$\frac{n\sqrt{(4n-1)}}{2(n-1)(n+2)}=0{,}905133=\tau$$

seu

$$\mu=\frac{1}{4(n+2)}+\frac{1}{4(n-1)}+\frac{1}{8(n-1)^2},\qquad \varrho=\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{n+2}-1,$$

$$\sigma=1+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{n+2},\qquad \tau=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{n+2}\right)\sqrt{(4n-1)},$$

unde pro quovis alio medio pellucido hi valores supputari possunt, sicque ut prodeat spatium diffusionis

$$Ff=\mu a\alpha xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right);$$

lentis constructio erit

$$f=\frac{a\alpha}{\varrho\alpha+\sigma a\pm\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}},\quad g=\frac{a\alpha}{\varrho a+\sigma\alpha\mp\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}}.$$

Dummodo igitur λ fuerit numerus positivus unitate non minor, talis lens duplici modo effici poterit. Casu autem $\lambda=1$, quo spatium diffusionis est minimum, unica lens proposito satisfaciens construi potest.

COROLLARIUM 3

56. Si igitur lens sit utrinque aequaliter convexa ideoque

$$f = g = \frac{2(n-1)a\alpha}{a+\alpha} = \frac{11}{10} \cdot \frac{a\alpha}{a+\alpha},$$

in expressione nostra pro spatio diffusionis inventa valor ipsius λ ex aequalitate inter f et g statuta definietur, unde fit

$$(\sigma - \varrho)(a - \alpha) = 2\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda - 1)}$$

hincque

$$\lambda = 1 + \frac{0{,}629795\,\alpha\alpha - 1{,}259589\,a\alpha + 0{,}629795\,aa}{(a+\alpha)^2}.$$

COROLLARIUM 4

57. Si lens capiatur plano-convexa, ut sit:

$$f = \infty \quad \text{et} \quad g = \frac{(n-1)a\alpha}{a+\alpha} = \frac{11}{20} \cdot \frac{a\alpha}{a+\alpha},$$

pro spatio diffusionis habebitur

$$\varrho\alpha + \sigma a = \mp \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)},$$

unde in numeris colligitur

$$\lambda = 1 + \frac{0{,}044427\,\alpha\alpha + 0{,}757940\,a\alpha + 3{,}232692\,aa}{(a+\alpha)^2}.$$

COROLLARIUM 5

58. Si denique lens adhibeatur convexo-plana, ut sit:

$$g = \infty \quad \text{et} \quad f = \frac{(n-1)a\alpha}{a+\alpha} = \frac{11}{20} \cdot \frac{a\alpha}{a+\alpha},$$

pro spatio diffusionis inveniendo poni oportet

$$\varrho a + \sigma\alpha = \pm \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)},$$

unde in numeris colligimus:

$$\lambda = 1 + \frac{3{,}232692\,\alpha\alpha + 0{,}757940\,a\alpha + 0{,}044427\,aa}{(a+\alpha)^2}.$$

SCHOLION 2

59. Quod ad aperturam attinet, iam initio animadvertimus in ea maiores arcus comprehendi non debere, quam qui sint principiis stabilitis conformes. Scilicet, ut nullus angulus supra 30^0 gradus occurrat, anguli ACM (Fig. 2) et BDN certe minores 30 gradibus esse debent, cum anguli EMc et

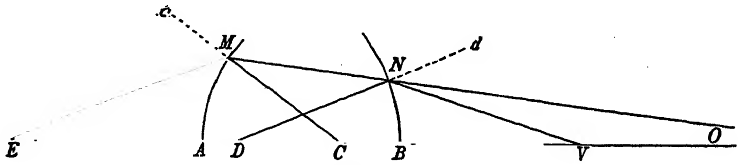

Fig. 2 (iterata).

VNd ipsis sint maiores, quorum alter cum quandoque ad duplum assurgere possit, poterimus hanc regulam statuere, ut aperturae semidiameter x neque $\frac{1}{4}f$ neque $\frac{1}{4}g$ superet. Verum quovis casu ad ipsos angulos EMc et VNd, qui sunt maximi, attendi conveniet, atque tanta apertura admitti poterit, unde neuter horum angulorum 30 gradus superans oriatur; si cautius procedere velimus, etiam angulos 20 gradibus maiores evitare poterimus, quo pacto apertura magis restringetur.

PROBLEMA 8

60. *Non neglecta lentis crassitie* AB (Fig. 3), *si pro distantia obiecti* $AE = a$ *detur distantia imaginis principalis* $BF = \alpha$, *obiectum autem parumper longius in e removeatur, definire locum imaginis principalis f.*

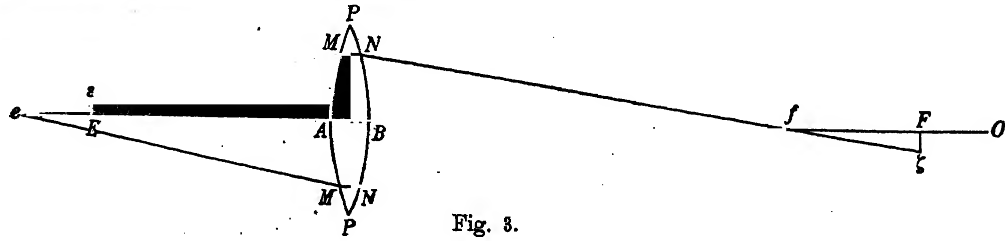

Fig. 3.

SOLUTIO

Posita lentis crassitie $AB = d$ radiisque faciei anterioris $AM = f$ et posterioris $BN = g$, supra vidimus hos radios ita a binis distantiis a et α crassitie lentis d pendere debere, ut sit

denotante k quantitatem quamcunque. Hinc ergo cum sit

$$\frac{k+d}{2n}=\frac{af}{(n-1)a-f} \quad \text{et} \quad \frac{k-d}{2n}=\frac{\alpha g}{g-(n-1)\alpha},$$

erit eliminando k

$$\frac{d}{n}=\frac{af}{(n-1)a-f}-\frac{\alpha g}{g-(n-1)\alpha}.$$

Ponamus iam distantiam $AE=a$ crescere particula $Ee=da$, ac per differentiationem inveniemus, quantum inde distantia imaginis $BF=\alpha$ immutetur; habebimus scilicet:

$$\frac{-ffda}{((n-1)a-f)^2}-\frac{ggd\alpha}{(g-(n-1)\alpha)^2}=0,$$

unde elicimus

$$d\alpha=\frac{-ff(g-(n-1)\alpha)^2}{gg((n-1)a-f)^2}da=\frac{-\alpha\alpha}{aa}da\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2.$$

Quare obiecto E per spatiolum minimum Ee longius a lente remoto, imago principalis ex F propius ad lentem admovebitur per spatiolum minimum Ff, ita ut sit

$$Ff=\frac{\alpha\alpha}{aa}\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2\cdot Ee=\frac{ff(g-(n-1)\alpha)^2}{gg((n-1)a-f)^2}\cdot Ee.$$

COROLLARIUM 1

61. Quia quantitas $\frac{\alpha\alpha}{aa}\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2$ necessario est positiva, evidens est, si obiectum longius a lente removeatur, imaginem semper propius ad lentem admoveri. Contra ergo etiam, si obiectum propius ad lentem accedat, imago longius ab ea recedet.

COROLLARIUM 2

62. Si crassities lentis d evanescat, erit $Ff=\frac{\alpha\alpha}{aa}\cdot Ee$; sin autem ea non evanescat, fieri potest, ut sit vel $Ff>\frac{\alpha\alpha}{aa}\cdot Ee$ vel $Ff<\frac{\alpha\alpha}{aa}\cdot Ee$; prius eveniet, si k sit quantitas positiva, posterius, si negativa. At si sit vel $k=\infty$ vel $k=0$, utroque casu erit $Ff=\frac{\alpha\alpha}{aa}\cdot Ee$, etiamsi crassities lentis non evanescat.

COROLLARIUM 3

63. Cum in distantiis a et α mutatio minima fieri concipiatur, spatium diffusionis nullam inde variationem subire censendum est: sive ergo obiectum in E sive e reperiatur ac semidiameter aperturae lentis in facie anteriori

fuerit $= x$, erit spatium diffusionis:

$$\frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left\{\begin{aligned}&+\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2\left(\frac{n}{a}+\frac{2}{k+d}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{k+d}\right)^2\\&+\left(\frac{k-d}{k+d}\right)^2\left(\frac{n}{\alpha}-\frac{2}{k-d}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{k-d}\right)^2\end{aligned}\right\}$$

in facie autem posteriori semidiameter aperturae debet esse $= \frac{k-d}{k+d}\cdot x$.

PROBLEMA 9

64. *Rationem definire, quam habet magnitudo imaginis ad magnitudinem obiecti non neglecta lentis crassitie.*

SOLUTIO

Sit obiecti ante lentem distantia $AE = a$ (Fig. 3, p. 36), imaginis vero $BF = \alpha$, existente lentis crassitie $= d$; ubi quidem tantum imaginem principalem spectamus neglecto spatio diffusionis. Sit iam $E\varepsilon$ obiectum, cui tribuatur magnitudo quam minima $E\varepsilon = z$, normaliter axi lentis insistens, eiusque imago in $F\zeta$ exhibebitur, cuius magnitudo $F\zeta$ quaeritur. Cum igitur punctum ζ a puncto ε oriatur, ita ut radii ab ε emissi in ζ colligantur, consideretur radius quicunque εM, qui productus cum axe in e occurrat: et perinde est, ac si hic radius ex axis puncto e emanaret. Quare is post refractionem cum axe in f concurret, ut sit $Ff = \frac{\alpha\alpha}{aa}\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2\cdot Ee$, indeque ad ζ perget: ex quo magnitudinem $F\zeta$ definire licebit. Statuatur in hunc finem $AM = x$, erit $BN = \frac{k-d}{k+d}\cdot x$; hincque colligemus has proportiones:

$$Ee : E\varepsilon = eA : AM = a : x, \qquad Ff : F\zeta = fB : BN = \alpha : \frac{k-d}{k+d}x$$

ob spatiola Ee et Ff quam minima: unde habebimus

$$\frac{Ff}{Ee}:\frac{F\zeta}{E\varepsilon} = \frac{\alpha}{a}:\frac{k-d}{k+d} = \frac{\alpha\alpha}{aa}\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2 : \frac{F\zeta}{E\varepsilon}.$$

Concluditur ergo $\frac{F\zeta}{E\varepsilon} = \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{k+d}{k-d}$, ex quo, cum magnitudo obiecti $E\varepsilon$ posita sit $= z$, erit magnitudo imaginis $F\zeta = \frac{\alpha(k+d)}{a(k-d)}\,z$.

COROLLARIUM 1

65. Secundum hanc ergo rationem diameter obiecti immutatur. Ubi notandum est, si expressio $\frac{\alpha(k+d)}{a(k-d)}$ habeat positivum valorem, obiecti imaginem situ inverso repraesentari, contra autem situ erecto, si $\frac{\alpha(k+d)}{a(k-d)}$ negativum valorem adipiscatur.

COROLLARIUM 2

66. Si crassities lentis evanescat, fit $F\zeta = \frac{\alpha}{a}z$, quo ergo casu recta iungens puncta extrema ε et ζ transit per centrum lentis. At si crassities in computum ducatur, recta $\varepsilon\zeta$ modo intra lentem, modo extra axem lentis secare poterit.

SCHOLION

67. Sic igitur omnia, quae circa unam lentem quamcunque nosse oportet, expedivimus, ut etiam crassitiei rationem habuerimus. Ac primo quidem ad binas distantias lentis quasi determinatrices spectari convenit, quae sunt obiecti distantia ante lentem $AE = a$ et imaginis principalis post lentem distantia $BF = \alpha$, quibus addi debet lentis crassities $AB = d$. His autem conditionibus infinitae lentes satisfaciunt; si enim radius faciei anterioris AM dicatur $= f$, et posterioris $BN = g$, utraque tanquam convexa considerata, constructio lentis his continetur formulis:

$$\frac{n-1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{2n}{k+d} \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{g} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2n}{k-d}$$

seu

$$f = \frac{(n-1)\,a\,(k+d)}{k+d+2na} \quad \text{et} \quad g = \frac{(n-1)\,\alpha\,(k-d)}{k-d-2n\alpha},$$

existente $n = \frac{31}{20}$; ubi k est quantitas arbitraria, hincque lentes innumerabiles quaesito satisfacientes obtinentur.

Quod si iam obiecti diameter ponatur $= z$, erit imaginis principalis repraesentatae diameter $= \frac{\alpha(k+d)}{a(k-d)}z$, quatenus imago situ inverso exhibita consideratur.

Deinde si aperturae in facie anteriori lentis semidiameter sit $= x$, spatium diffusionis, quatenus ab imagine principali ad lentem porrigitur, ita exprimetur, ut sit:

$$\frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left\{\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2\left(\frac{n}{a}+\frac{2}{k+d}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{k+d}\right)^2+\left(\frac{k-d}{k+d}\right)^2\left(\frac{n}{\alpha}-\frac{2}{k-d}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{k-d}\right)^2\right\}$$

in facie autem posteriori aperturae semidiameter debet esse $= \frac{k-d}{k+d}\cdot x$ vel saltem non minor. Quia spatium diffusionis factorem habet $\alpha\alpha xx$, brevitatis gratia id ita $P\alpha\alpha xx$ indicabimus. Haecque in genere teneantur etiam crassitiei lentis ratione habita. At si crassities lentis evanescat, formulas magis evolvere

licuit, scilicet si brevitatis gratia ponatur

$$\mu = 0{,}938191,\quad \varrho = 0{,}190781,\quad \tau = 0{,}905133,$$
$$\nu = 0{,}232692,\quad \sigma = 1{,}627401,\quad \lambda > 1 \text{ arbitr.}$$

sumaturque pro formatione lentis

$$f = \frac{a\alpha}{\varrho\alpha + \sigma a \pm \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda - 1)}},\quad g = \frac{a\alpha}{\varrho a + \sigma\alpha \mp \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}},$$

spatium diffusionis erit pro aperturae semidiametro x

$$\mu\alpha\alpha xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)$$

et obiecti diametro existente $= z$ imaginis diameter erit $= \frac{\alpha}{a}z$. His ergo pro una lente determinatis, videamus, quomodo in combinatione duarum pluriumve lentium spatium diffusionis definiatur: ut deinceps in omnis generis instrumentis dioptricis sive Telescopiis sive Microscopiis confusionem assignare modumque eam diminuendi investigare possimus.

CAPUT II

DE DIFFUSIONE IMAGINIS PER PLURES LENTES REPRAESENTATAE

PROBLEMA 1

68. *Si loco obiecti adsit imago per spatium Ee* (Fig. 4) *diffusa indeque radii per lentem PP aperturae indefinitae transmittantur, determinare spatium diffusionis Ff per hanc lentem productum.*

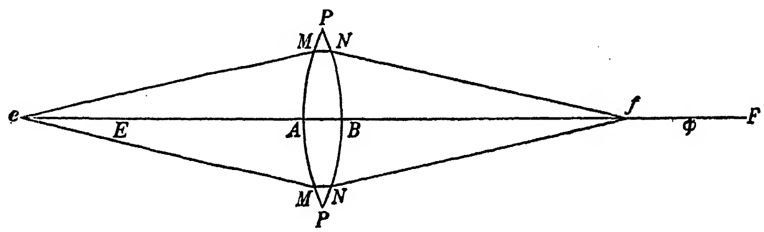

Fig. 4.

SOLUTIO

Loco obiecti veri hic consideramus imaginem iam per aliam lentem repraesentatam, quae sit diffusa per spatium Ee, ita ut in E sit imago principalis per radios axi proximos formata, in e autem imago extrema, radiis scilicet per marginem aperturae lentis praecedentis transmissis formata; qui radii cum axe constituant angulum $= \Phi$. Quare a puncto E nonnisi radii axi proximi in lentem PP emittuntur, a puncto e autem eiusmodi tantum radii, qui ad axem eA sub angulo $MeA = \Phi$ sint inclinati. Ponatur iam distantia $EA = a$, prae qua spatium diffusionis Ee ut valde parvum spectetur, lens autem PP sit eiusmodi, ut obiecti in E existentis imaginem principalem referat in distantia $BF = \alpha$, existente lentis crassitie $AB = d$. Hanc ob rem,

si ponatur faciei anterioris AM radius $= f$, posterioris $BN = g$, lente ut convexa utrinque spectata, oportet esse:

$$f = \frac{(n-1)\,a\,(k+d)}{k+d+2na} \quad \text{et} \quad g = \frac{(n-1)\,\alpha\,(k-d)}{k-d-2n\alpha},$$

ubi est $n = \frac{31}{0}$ et k quantitas arbitraria. Hinc autem, uti demonstravimus, pro aperturae semidiametro $= x$ nasceretur spatium diffusionis

$$\frac{n\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left\{\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2\left(\frac{n}{a}+\frac{2}{k+d}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{k+d}\right)^2+\left(\frac{k-d}{k+d}\right)^2\left(\frac{n}{\alpha}-\frac{2}{k-d}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{k-d}\right)^2\right\}$$

pro quo scribamus brevitatis gratia $P\alpha\alpha xx$. Iam puncti E, quia inde nonnisi radii axi proximi ad lentem emittuntur, imago exhibebitur in F, ut sit distantia $BF = \alpha$: videamus ergo, quorsum imago puncti e debeat cadere. Ac si radii ex puncto e emissi essent axi proximi, quia id a lente magis est remotum quam E, eius imago propius ad lentem caderet, puta in φ, ut esset, sicut § 60 definivimus,

$$F\varphi = \frac{\alpha\alpha}{aa}\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2 \cdot Ee;$$

in φ scilicet caderet imago principalis, si obiectum esset in e. Sed quia ab e tantum radii eM ad axem angulo $AeM = \Phi$ inclinati emittuntur, hi lenti in punctis M ab A intervallo $AM = eA \cdot \Phi = a\Phi$ remotis occurrent, quandoquidem intervallum Ee prae distantia $AE = a$ contemnimus; perinde igitur est, ac si lenti apertura tribueretur, cuius semidiameter esset $= a\Phi$, et obiecti in e existentis imago extrema definiri deberet, quae cadat in f, ita ut φf sit spatium diffusionis obiecto in e existenti et aperturae lentis, cuius semidiameter $= a\Phi$, conveniens. Hinc ergo erit intervallum $\varphi f = Paa\alpha\alpha\Phi\Phi$; et quia puncti E imago in F, puncti e autem imago in f exhibetur, erit spatium diffusionis per lentem PP productum

$$Ff = \frac{\alpha\alpha}{aa}\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2 \cdot Ee + Paa\alpha\alpha\Phi\Phi.$$

In imagine autem extrema f radii Nf ita cum axe concurrent, ut sit

$$\text{angulus } BfN = \frac{k-d}{k+d}\cdot\frac{a\Phi}{\alpha}.$$

COROLLARIUM 1

69. Si ergo imago iam diffusa per spatium Ee locum obiecti teneat respectu lentis PP, per hanc spatium diffusionis novum producitur Ff, ita ut imago principalis cadat in F, extrema vero in f; fierique poterit, ut hoc novum spatium diffusionis Ff maius sit vel minus proposito Ee.

COROLLARIUM 2

70. Aperturam lentis PP ut indefinitam assumsi, manifestum autem est sufficere, dum eius semidiameter non sit minor quam $\alpha\Phi$. Si enim esset minor, radii ex puncto e emissi plane non per lentem transitum invenirent, neque imago puncti e exprimeretur, sed imaginis Ff punctum extremum responderet imagini cuipiam intermediae spatii Ee.

COROLLARIUM 3

71. Si diameter obiecti seu potius imaginis in E sitae sit $= z$, tum imaginis inde per lentem PP in F formatae diameter erit $= \frac{\alpha(k+d)}{a(k-d)} z$; quae expressio, si sit positiva, simul declarat situm imaginis in F esse inversum respectu eius, quae est in E.

SCHOLION

72. Cum in hoc capite plures lentes sim consideraturus, pro cuiuslibet determinatione spectandae sunt primo binae distantiae determinatrices, altera obiecti seu imaginis, a qua lens radios accipit ante lentem, altera imaginis inde per lentem repraesentatae post lentem: quae distantiae ex imaginibus principalibus aestimentur. Deinde cuiusque lentis crassities in computum est ducenda. Tertio cum his lens nondum prorsus determinetur, insuper pro quaque lente accedit distantia quaedam arbitraria hactenus per litteram k indicata. Quarto vero imprimis ratio haberi deberet spatii diffusionis, quod cuique lenti pro data apertura conveniat. Quemadmodum autem ex binis distantiis determinatricibus, crassitie lentis et quantitate illa arbitraria k facies tum etiam spatium diffusionis pro apertura, cuius semidiameter ponitur $= x$, definiatur, in praecedente capite fusius est expositum. Hic igitur, cum plures lentes sint considerandae, pro singulis haec elementa sequentibus litteris indicabo:

Pro lente	Distantiae determinatrices obiecti	Distantiae determinatrices imaginis	Crassities lentis	Quantitas arbitraria	Spatium diffusionis pro aperturae semidiametro x
prima	a	α	v	k	$P\alpha\alpha xx$
secunda	b	β	v'	k'	$Q\beta\beta xx$
tertia	c	γ	v''	k''	$R\gamma\gamma xx$
quarta	d	δ	v'''	k'''	$S\delta\delta xx$
quinta	e	ε	v''''	k''''	$T\varepsilon\varepsilon xx$

Sin autem ratio refractionis in singulis lentibus discrepet, pro prima lente eam ponamus $=n$, pro secunda $=n'$, pro tertia $=n''$ etc.

Prima autem lens hic mihi perpetuo erit ea, quae obiecto est proxima, indeque recedendo reliquas lentes ordine numero: ex quo simul habebuntur distantiae lentium, scilicet secundae a prima $=\alpha+b$, tertiae a secunda $=\beta+c$, quartae a tertia $=\gamma+d$, quintae a quarta $=\delta+e$ etc., quae distantiae ex sua natura debent esse positivae, etiamsi singulae distantiae determinatrices praeter primam a, quippe quae ad ipsum obiectum necessario ante lentem primam constituendum refertur, sint quandoque negativae. Crassitiem lentium hic littera v designo, quia littera d inter distantias determinatrices, si numerus lentium ultra ternarium assurgat, reperitur. Pro crassitie autem et quantitate arbitraria iisdem litteris utor, commatibus inscriptis distinguendis ob penuriam litterarum diversarum. Ceterum observandum est me omnes lentes tanquam super communi axe dispositas assumere.

PROBLEMA 2

73. *Si radii ab obiecto $E\varepsilon$* (Fig. 5) *emissi per duas lentes PP et QQ transmittantur, definire spatium diffusionis Gg a data apertura primae lentis oriundum, ut et magnitudinem imaginis principalis in G exhibitae.*

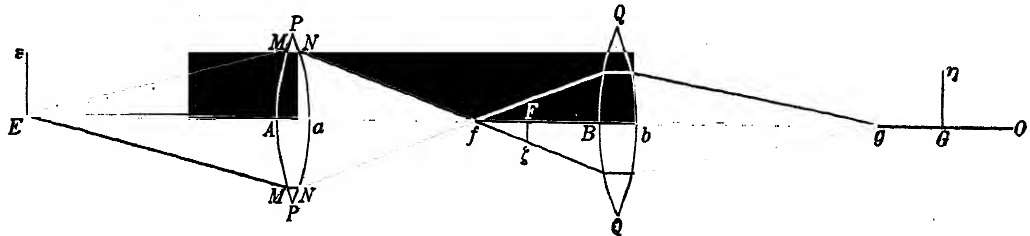

Fig. 5.

SOLUTIO

Sit obiecti magnitudo $E\varepsilon = z$, eiusque imago principalis per primam lentem PP proiiciatur in $F\zeta$ at per ambas in $G\eta$, erunt distantiae determinatrices pro lente prima PP obiecti $EA = a$, imaginis $aF = \alpha$, pro lente secunda QQ obiecti $FB = b$, imaginis $bG = \beta$. Deinde sit

pro lente PP crassities $Aa = v$, quantitas arbitraria $= k$,

pro lente QQ crassities $Bb = v'$, quantitas arbitraria $= k'$.

Denique pro apertura in anteriori facie utriusque lentis, cuius semidiameter sit $= x$,

spatium diffusionis primae lentis $PP \quad = P\alpha\alpha xx$

spatium diffusionis secundae lentis $QQ \quad = Q\beta\beta xx$.

His positis pro imagine per primam lentem proiecta $F\zeta$ erit eius magnitudo $F\zeta = \frac{\alpha(k+v)}{a(k-v)}z$ pro inversa habenda, si haec expressio fuerit positiva. Deinde si lentis primae PP semidiameter aperturae in anteriori facie ponatur $= x$, erit spatium diffusionis $Ff = P\alpha\alpha xx$ et inclinatio radiorum in f ad axem $= \frac{k-v}{k+v}\cdot\frac{x}{\alpha}$; tum vero in facie lentis PP posteriori semidiameter aperturae non minor esse debet quam $\frac{k-v}{k+v}x$. Tota iam haec imago diffusa per spatium Ff respectu alterius lentis QQ tanquam obiectum spectari debet, cuius proinde repraesentatio Gg per propositionem praecedentem determinabitur. Erit autem hic $\Phi = \frac{k-v}{k+v}\cdot\frac{x}{\alpha}$, et spatium ibi expressum $Ee = P\alpha\alpha xx$; tum vero pro a, α, k, d et P hic scribi oportet b, β, k', v' et Q, unde fiet spatium diffusionis quaesitum:

$$Gg = \frac{\beta\beta}{bb}\left(\frac{k'+v'}{k'-v'}\right)^2 P\alpha\alpha xx + \frac{bb\beta\beta}{\alpha\alpha}\left(\frac{k-v}{k+v}\right)^2 Qxx$$

sive

$$Gg = \frac{\beta\beta}{bb}\left(\frac{k'+v'}{k'-v'}\right)^2 P\alpha\alpha xx + \frac{bb}{\alpha\alpha}\left(\frac{k-v}{k+v}\right)^2 Q\beta\beta xx.$$

Radiorum porro in g incidentium inclinatio ad axem est $\left(\frac{k-v}{k+v}\right)\left(\frac{k'-v'}{k'+v'}\right)\frac{bx}{\alpha\beta}$. Denique cum sit $F\zeta = \frac{\alpha(k+v)}{a(k-v)}z$, erit magnitudo imaginis in G ut erutae consideratae:

$$G\eta = \frac{\alpha\beta}{ab}\left(\frac{k+v}{k-v}\right)\left(\frac{k'+v'}{k'-v'}\right)z.$$

COROLLARIUM 1

74. Quod ad aperturam facierum lentis QQ attinet, ea maior esse debet spatio transitus radiorum; hinc ergo erit semidiameter aperturae

$$\text{faciei anterioris} > \left(\frac{k-v}{k+v}\right)\frac{bx}{a}; \quad \text{faciei posterioris} > \left(\frac{k-v}{k+v}\right)\left(\frac{k'-v'}{k'+v'}\right)\frac{bx}{a}.$$

COROLLARIUM 2

75. Si ponatur pro lente prima PP radius faciei anterioris $=f$ et posterioris $=g$, erit posito $n=\frac{31}{20}$

$$f=\frac{(n-1)a(k+v)}{k+v+2na} \quad \text{et} \quad g=\frac{(n-1)\alpha(k-v)}{k-v-2n\alpha}.$$

Similique modo si pro lente altera QQ radius faciei anterioris ponatur $=f'$ et posterioris $=g'$, erit

$$f'=\frac{(n-1)b(k'+v')}{k'+v'+2nb} \quad \text{et} \quad g'=\frac{(n-1)\beta(k'-v')}{k'-v'-2n\beta},$$

omnibus scilicet faciebus ut convexis consideratis.

COROLLARIUM 3

76. Pro spatio autem diffusionis ab utraque lente productae erit, quemadmodum invenimus:

$$P=\frac{n}{2(n-1)^2}\left\{\left(\frac{k+v}{k-v}\right)^2\left(\frac{n}{a}+\frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{k+v}\right)^2+\left(\frac{k-v}{k+v}\right)^2\left(\frac{n}{\alpha}-\frac{2}{k-v}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{k-v}\right)^2\right\}$$

similique modo

$$Q=\frac{n}{2(n-1)^2}\left\{\left(\frac{k'+v'}{k'-v'}\right)^2\left(\frac{n}{b}+\frac{2}{k'+v'}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{k'+v'}\right)^2+\left(\frac{k'-v'}{k'+v'}\right)^2\left(\frac{n}{\beta}-\frac{2}{k'-v'}\right)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{2}{k'-v'}\right)^2\right\}.$$

Non opus est, ut omnibus lentibus eadem refractionis ratio $n:1$ tribuatur, sed simili modo pro pluribus lentibus poni potest n, n', n'', n''' etc., ut iam supra monuimus, unde nullum aliud discrimen nascitur, nisi quod in formulis pro f' et g' inventis loco n scribi debeat n' et Q statui debeat

$$=\frac{n'}{2(n'-1)^2}\left\{\left(\frac{k'+v'}{k'-v'}\right)^2\left(\frac{n'}{b}+\frac{2}{k'+v'}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{k'+v'}\right)^2+\left(\frac{k'-v'}{k'+v'}\right)^2\left(\frac{n'}{\beta}-\frac{2}{k'-v'}\right)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{2}{k'-v'}\right)^2\right\}.$$

COROLLARIUM 4

77. Sin autem crassities lentium evanescat et pro quantitate arbitraria k, k' introducamus numerum λ, λ', erit

pro lente PP

$$f = \frac{a\alpha}{\varrho\alpha + \sigma a \pm \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}}, \qquad g = \frac{a\alpha}{\varrho a + \sigma\alpha \mp \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}}$$

et

$$P = \mu\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\nu}{a\alpha}\right)$$

at pro lente QQ

$$f' = \frac{b\beta}{\varrho\beta + \sigma b \pm \tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}}, \qquad g' = \frac{b\beta}{\varrho b + \sigma\beta \mp \tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}}$$

$$Q = \mu\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \frac{\nu}{b\beta}\right).$$

In expressionibus autem inventis formulae $\left(\frac{k-v}{k+v}\right)$ et $\left(\frac{k'-v'}{k'+v'}\right)$ abeunt in unitatem.

Numerorum vero μ, ν, ϱ, σ, τ indoles in § 55 exposita est.

Si refractio lentium differat, etiam litterae μ, ν, ϱ, σ, τ diversos valores pro singulis lentibus sortientur; quae litterae si etiam commatibus a prioribus distinguantur, ut sit

$$\varrho' = \frac{1}{2(n'-1)} + \frac{1}{n'+2} - 1, \qquad \sigma' = 1 + \frac{1}{2(n'-1)} - \frac{1}{n'+2},$$

$$\tau' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2(n'-1)} + \frac{1}{n'+2}\right)\sqrt{(4n'-1)},$$

pro secunda lente erit

$$f' = \frac{b\beta}{\varrho'\beta + \sigma' b \pm \tau'(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}}, \qquad g' = \frac{b\beta}{\varrho' b + \sigma'\beta \mp \tau'(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}},$$

et ob eandem rationem erit

$$\mu' = \frac{1}{4(n'+2)} + \frac{1}{4(n'-1)} + \frac{1}{8(n'-1)^2} \quad \text{et} \quad \nu' = \frac{4(n'-1)^2}{4n'-1},$$

quod et de sequentibus lentibus est intelligendum, si forte diversa refractionis lege fuerint praeditae.

SCHOLION

78. Quo formulas in problemate inventas magis contrahamus, ut, cum ad plures lentes processerimus, succinctiores evadant, ponamus

$$\frac{k-v}{k+v}=i \quad \text{et} \quad \frac{k'-v'}{k'+v'}=i',$$

ita ut hi numeri i et i' abeant in unitatem evanescente lentium crassitie v et v'. Tum autem erit spatium diffusionis

$$Gg=\frac{1}{i'i'}\cdot\frac{\beta\beta}{bb}\cdot P\alpha\alpha xx+ii\cdot\frac{bb}{\alpha\alpha}\cdot Q\beta\beta xx$$

et radiorum in g incidentium inclinatio ad axem $=ii'\cdot\frac{bx}{\alpha\beta}$; porro magnitudo imaginis $G\eta=\frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}z$. Ac pro apertura singularum facierum erit, ut sequitur:

Semidiameter aperturae lentis	faciei anterioris	faciei posterioris
primae PP	x	ix
secundae QQ	$i\cdot\frac{bx}{\alpha}$	$ii'\cdot\frac{bx}{\alpha}$

aperturae autem hae praeter primam maiores esse debent assignatis: valores enim assignati sufficerent, si obiectum esset merum punctum in axe positum; quando autem habet magnitudinem, radii ab eius terminis per primam faciem ingressi latius divagantur et ad sequentes facies maiorem aperturam exigunt.

PROBLEMA 3

79. *Si radii ab obiecto $E\varepsilon$* (Fig. 6) *emissi per tres lentes PP, QQ et RR refringantur, definire spatium diffusionis Hh ob datam aperturam lentis primae oriundum, ut et magnitudinem imaginis principalis in H exhibitae.*

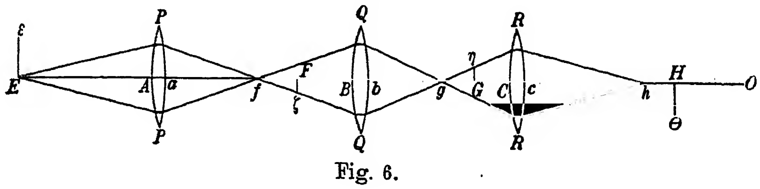

Fig. 6.

SOLUTIO

Posita obiecti magnitudine $E\varepsilon=z$ cadat eius imago principalis per lentem primam PP in $F\zeta$, dehinc per secundam QQ in $G\eta$, tum vero per tertiam

RR in $H\theta$. Erunt ergo distantiae determinatrices

pro lente PP obiecti $EA = a$, imaginis $aF = \alpha$,
pro lente QQ obiecti $FB = b$, imaginis $bG = \beta$,
pro lente RR obiecti $GC = c$, imaginis $cH = \gamma$.

Deinde sit

pro lente PP crassities $Aa = v$, quantitas arbitraria $= k$,
pro lente QQ crassities $Bb = v'$, quantitas arbitraria $= k'$,
pro lente RR crassities $Cc = v''$, quantitas arbitraria $= k''$,

ac ponatur brevitatis gratia:

$$\frac{k-v}{k+v} = i, \quad \frac{k'-v'}{k'+v'} = i', \quad \frac{k''-v''}{k''+v''} = i''.$$

Denique pro quavis lente, si esset singularis eiusque aperturae semidiameter esset $= x$, sit

spatium diffusionis primae lentis PP $= P\alpha\alpha xx$
„ „ secundae lentis QQ $= Q\beta\beta xx$
„ „ tertiae lentis RR $= R\gamma\gamma xx$.

Iam in praecedente problemate invenimus fore spatium diffusionis per duas lentes priores productum

$$Gg = \frac{1}{i'i'} \cdot \frac{\beta\beta}{bb} \cdot P\alpha\alpha xx + ii \cdot \frac{bb}{\alpha\alpha} \cdot Q\beta\beta xx$$

et radiorum in g concurrentium inclinationem ad axem $= ii' \cdot \frac{bx}{\alpha\beta}$, imaginisque in G magnitudinem $G\eta = \frac{1}{ii'} \cdot \frac{\alpha\beta}{ab} z$. Haec igitur si ad problema 1 transferantur, ibi loco

$$Ee, \quad \frac{\alpha\alpha}{aa}, \quad \left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2, \quad Paa\alpha\alpha \quad \text{et} \quad \Phi \qquad \text{scribi debebit}$$
$$Gg, \quad \frac{\gamma\gamma}{cc}, \quad \frac{1}{i''i''}, \quad Rcc\gamma\gamma \quad \text{et} \quad ii' \cdot \frac{bx}{\alpha\beta},$$

hincque spatium diffusionis per tres lentes productum orietur:

$$Hh = \frac{1}{i'i' \cdot i''i''} \cdot \frac{\beta\beta\gamma\gamma}{bbcc} \cdot P\alpha\alpha xx + \frac{ii}{i''i''} \cdot \frac{bb\gamma\gamma}{\alpha\alpha cc} \cdot Q\beta\beta xx + ii \cdot i'i' \cdot \frac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta} \cdot R\gamma\gamma xx;$$

at radiorum in h concurrentium inclinatio ad axem erit $= ii'i'' \cdot \frac{bcx}{\alpha\beta\gamma}$. Denique imaginis in H formatae magnitudo erit $H\theta = \frac{1}{ii'i''} \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} z$ ad situm inversum relata.

COROLLARIUM 1

80. Quod ad aperturas singularum facierum attinet, eas sequenti modo comparatas esse convenit:

Semidiameter aperturae lentis	faciei anterioris	faciei posterioris
primae PP	x	ix
secundae QQ	$i \cdot \frac{bx}{\alpha}$	$ii' \cdot \frac{bx}{\alpha}$
tertiae RR	$ii' \cdot \frac{bcx}{\alpha\beta}$	$ii'i'' \cdot \frac{bcx}{\alpha\beta}$

his scilicet valoribus non debent esse minores.

COROLLARIUM 2

81. Si inclinatio radiorum in h concurrentium ad axem vocetur $= \Phi$, cum sit $\Phi = ii'i'' \cdot \frac{bcx}{\alpha\beta\gamma}$ et $H\theta = \frac{1}{ii'i''} \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} z$, erit $\Phi \cdot H\theta = \frac{xz}{a}$; quae proprietas pro lentium numero quantumvis magno locum habet.

COROLLARIUM 3

82. Quemadmodum radii singularum facierum determinandi sint, ex praecedentibus facile liquet:

Erit nempe pro	Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris
lente prima PP	$\frac{(n-1)a(k+v)}{k+v+2na}$	$\frac{(n-1)\alpha(k-v)}{k-v-2n\alpha}$
lente secunda QQ	$\frac{(n-1)b(k'+v')}{k'+v'+2nb}$	$\frac{(n-1)\beta(k'-v')}{k'-v'-2n\beta}$
lente tertia RR	$\frac{(n-1)c(k''+v'')}{k''+v''+2nc}$	$\frac{(n-1)\gamma(k''-v'')}{k''-v''-2n\gamma}$

existente pro vitro $n = \frac{31}{20}$.

COROLLARIUM 4

83. Tum vero valores literarum P, Q, R ita se habebunt

$$P=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{ii}\left(\frac{n}{a}+\frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{k+v}\right)^2+ii\;\left(\frac{n}{\alpha}-\frac{2}{k-v}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{k-v}\right)^2\right)$$

$$Q=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{i'i'}\left(\frac{n}{b}+\frac{2}{k'+v'}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{k'+v'}\right)^2+i'i'\left(\frac{n}{\beta}-\frac{2}{k'-v'}\right)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{2}{k'-v'}\right)^2\right)$$

$$R=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{i''i''}\left(\frac{n}{c}+\frac{2}{k''+v''}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{2}{k''+v''}\right)^2+i''i''\left(\frac{n}{\gamma}-\frac{2}{k''-v''}\right)\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{2}{k''-v''}\right)^2\right)$$

quibus valoribus spatia diffusionis definiuntur.

Si refractio differat:

litteris	P	Q	R
tribuatur refractio	n	n'	n''.

COROLLARIUM 5

84. Iuvabit etiam spatia diffusionis, prout per unam, duas ac tres lentes producuntur, inter se comparasse, quod ita commodissime fieri videtur:

$$Ff=\alpha\alpha xx\cdot P,\qquad Gg=\beta\beta xx\left(\frac{1}{i'i'}\cdot\frac{\alpha\alpha}{bb}\cdot P+ii\cdot\frac{bb}{\alpha\alpha}\cdot Q\right)$$

$$Hh=\gamma\gamma xx\left(\frac{1}{i'i'\cdot i''i''}\cdot\frac{\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc}\cdot P+\frac{ii}{i''i''}\cdot\frac{bb\beta\beta}{\alpha\alpha cc}\cdot Q+ii\cdot i'i'\cdot\frac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta}\cdot R\right).$$

SCHOLION

85. Hinc facile perspicitur, quomodo determinatio spatii diffusionis ad plures lentes extendi debeat; unde problema generale statim ad numerum lentium quemcunque accommodabo, idque pro quacunque lentium crassitie.

PROBLEMA 4

86. *Si radii ab obiecto $E\varepsilon$ emissi per lentes quotcunque PP, QQ, RR, SS etc. super communi axe dispositas refringantur, definire spatium diffusionis a data apertura lentis primae oriundum, ut et magnitudinem imaginis repraesentatae.*

SOLUTIO

Posita obiecti magnitudine $E\varepsilon=z$ imagines eius principales contemplemur: cadat igitur eius imago principalis per lentem primam PP in $F\zeta$, deinde per secundam QQ in $G\eta$, tum per tertiam RR in $H\theta$, porro per quar-

tam SS in $I\iota$, per quintam TT in $K\varkappa$ etc. Hinc pro singulis lentibus habebimus distantias determinatrices, quas ita litteris indicemus:

Pro lente PP obiecti $EA = a$, imaginis $aF = \alpha$, crassitiem $Aa = v$,
pro lente QQ obiecti $FB = b$, imaginis $bG = \beta$, crassitiem $Bb = v'$,
pro lente RR obiecti $GC = c$, imaginis $cH = \gamma$, crassitiem $Cc = v''$,
pro lente SS obiecti $HD = d$, imaginis $dI = \delta$, crassitiem $Dd = v'''$,
pro lente TT obiecti $IE = e$, imaginis $eK = \varepsilon$, crassitiem $Ee = v''''$
etc.

Deinde cum determinatio cuiusvis lentis non solum has distantias determinatrices cum crassitie cuiusque sed etiam quantitatem quandam arbitrariam involvat, a qua spatium diffusionis cuiusque pendet, ponamus, si quaelibet lens esset solitaria eiusque aperturae semidiameter $= x$:

Pro lente		Quant. arbitr.	Spatium diffussionis
prima	PP	k	$P\alpha\alpha xx$
secunda	QQ	k'	$Q\beta\beta xx$
tertia	RR	k''	$R\gamma\gamma xx$
quarta	SS	k'''	$S\delta\delta xx$
quinta	TT	k''''	$T\varepsilon\varepsilon xx$

etc.

Hinc ergo constructio cuiusque lentis ita se habebit posito $n = \frac{31}{20}$; vel si refractio differat, cuique lenti suus tribuatur valor, primae n, secundae n', tertiae n'' etc.

Erit nempe pro		Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris
lente prima	PP	$\dfrac{(n-1)a(k+v)}{k+v+2na}$	$\dfrac{(n-1)\alpha(k-v)}{k-v-2n\alpha}$
lente secunda	QQ	$\dfrac{(n-1)b(k'+v')}{k'+v'+2nb}$	$\dfrac{(n-1)\beta(k'-v')}{k'-v'-2n\beta}$
lente tertia	RR	$\dfrac{(n-1)c(k''+v'')}{k''+v''+2nc}$	$\dfrac{(n-1)\gamma(k''-v'')}{k''-v''-2n\gamma}$
lente quarta	SS	$\dfrac{(n-1)d(k'''+v''')}{k'''+v'''+2nd}$	$\dfrac{(n-1)\delta(k'''-v''')}{k'''-v'''-2n\delta}$
lente quinta	TT	$\dfrac{(n-1)e(k''''+v'''')}{k''''+v''''+2ne}$	$\dfrac{(n-1)\varepsilon(k''''-v'''')}{k''''-v''''-2n\varepsilon}$

etc.

at si ponamus brevitatis gratia:

$$\frac{k-v}{k+v}=i,\quad \frac{k'-v'}{k'+v'}=i',\quad \frac{k''-v''}{k''+v''}=i'',\quad \frac{k'''-v'''}{k'''+v'''}=i''',\quad \frac{k''''-v''''}{k''''+v''''}=i''''\ \text{etc.},$$

pro spatiis diffusionis habebimus hos valores:

$$P=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{ii}\left(\frac{n}{a}+\frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{k+v}\right)^2+\ ii\ \left(\frac{n}{\alpha}-\frac{2}{k-v}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{k-v}\right)^2\right)$$

$$Q=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{i'i'}\left(\frac{n}{b}+\frac{2}{k'+v'}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{k'+v'}\right)^2+\ i'i'\ \left(\frac{n}{\beta}-\frac{2}{k'-v'}\right)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{2}{k'-v'}\right)^2\right)$$

$$R=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{i''i''}\left(\frac{n}{c}+\frac{2}{k''+v''}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{2}{k''+v''}\right)^2+i''i''\left(\frac{n}{\gamma}-\frac{2}{k''-v''}\right)\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{2}{k''-v''}\right)^2\right)$$

$$S=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{i'''i'''}\left(\frac{n}{d}+\frac{2}{k'''+v'''}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{2}{k'''+v'''}\right)^2+i'''i'''\left(\frac{n}{\delta}-\frac{2}{k'''-v'''}\right)\left(\frac{1}{\delta}-\frac{2}{k'''-v'''}\right)^2\right)$$

$$T=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{i''''i''''}\left(\frac{n}{e}+\frac{2}{k''''+v''''}\right)\left(\frac{1}{e}+\frac{2}{k''''+v''''}\right)^2+i''''i''''\left(\frac{n}{\varepsilon}-\frac{2}{k''''-v''''}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{2}{k''''-v''''}\right)^2\right)$$

etc.

His constitutis pro magnitudine singularum imaginum habebimus:

pro una lente imaginem	$F\zeta=\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{\alpha}{a}z$	ad situm inversum
pro duabus lentibus	$G\eta=\dfrac{1}{ii'}\cdot\dfrac{\alpha\beta}{ab}z$	ad situm erectum
pro tribus lentibus	$H\theta=\dfrac{1}{ii'i''}\cdot\dfrac{\alpha\beta\gamma}{abc}z$	ad situm inversum
pro quatuor lentibus	$I\iota=\dfrac{1}{ii'i''i'''}\cdot\dfrac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd}z$	ad situm erectum
pro quinque lentibus	$K\varkappa=\dfrac{1}{ii'i''i'''i''''}\cdot\dfrac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{abcde}z$	ad situm inversum

etc.

Denique dum aperturae lentium non sint minores, quam sequentes formulae exhibent:

Semidiameter aperturae lentis	faciei anterioris	faciei posterioris
primae PP	x	$i\cdot x$
secundae QQ	$i\cdot\dfrac{bx}{\alpha}$	$ii'\cdot\dfrac{bx}{\alpha}$
tertiae RR	$ii'\cdot\dfrac{bcx}{\alpha\beta}$	$ii'i''\cdot\dfrac{bcx}{\alpha\beta}$
quartae SS	$ii'i''\cdot\dfrac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}$	$ii'i''i'''\cdot\dfrac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}$
quintae TT	$ii'i''i'''\cdot\dfrac{bcdex}{\alpha\beta\gamma\delta}$	$ii'i''i'''i''''\cdot\dfrac{bcdex}{\alpha\beta\gamma\delta}$

etc.,

erit, ut sequitur, pro quolibet lentium numero:

I. Pro una lente

spatium diffusionis: $Ff = \alpha\alpha xx \cdot P,$

inclinatio radiorum in f concurrentium ad axem $= i \cdot \frac{x}{\alpha}.$

II. Pro duabus lentibus

spatium diffusionis: $Gg = \beta\beta xx \left(\frac{1}{i'i'} \cdot \frac{\alpha\alpha}{bb} \cdot P + ii \cdot \frac{bb}{\alpha\alpha} \cdot Q\right)$

et radiorum in g concurrentium inclinatio ad axem $= ii' \cdot \frac{bx}{\alpha\beta}.$

III. Pro tribus lentibus

spatium diffusionis:

$$Hh = \gamma\gamma xx \left(\frac{1}{i'i' \cdot i''i''} \cdot \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc} \cdot P + \frac{ii}{i''i''} \cdot \frac{bb\beta\beta}{\alpha\alpha cc} \cdot Q + ii \cdot i'i' \cdot \frac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta} \cdot R\right)$$

et radiorum in h concurrentium inclinatio ad axem $= ii'i'' \cdot \frac{bcx}{\alpha\beta\gamma}.$

IV. Pro quatuor lentibus

spatium diffusionis:

$$Ii = \delta\delta xx \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{i'i' \cdot i''i'' \cdot i'''i'''} \cdot \frac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{bbccdd} \cdot P + \frac{ii}{i''i'' \cdot i'''i'''} \cdot \frac{bb\beta\beta\gamma\gamma}{\alpha\alpha ccdd} \cdot Q \\ + \frac{ii \cdot i'i'}{i'''i'''} \cdot \frac{bbcc\gamma\gamma}{\alpha\alpha\beta\beta dd} \cdot R + ii \cdot i'i' \cdot i''i'' \cdot \frac{bbccdd}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma} \cdot S \end{array}\right\}$$

et radiorum in i concurrentium inclinatio ad axem $= ii'i''i''' \cdot \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma\delta}.$

V. Pro quinque lentibus

spatium diffusionis:

$$Kk = \varepsilon\varepsilon xx \left\{\begin{array}{l} + \frac{1}{i'i' \cdot i''i'' \cdot i'''i''' \cdot i''''i''''} \cdot \frac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}{bbccddee} \cdot P + \frac{ii}{i''i'' \cdot i'''i''' \cdot i''''i''''} : \frac{bb\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}{\alpha\alpha ccddee} \cdot Q \\ + \frac{ii \cdot i'i'}{i'''i''' \cdot i''''i''''} \cdot \frac{bbcc\gamma\gamma\delta\delta}{\alpha\alpha\beta\beta ddee} \cdot R + \frac{ii \cdot i'i' \cdot i''i''}{i''''i''''} \cdot \frac{bbccdd\delta\delta}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma ee} \cdot S \\ + ii \cdot i'i' \cdot i''i'' \cdot i'''i''' \cdot \frac{bbccddee}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta} \cdot T \end{array}\right\}$$

et radiorum in k concurrentium inclinatio ad axem $= ii'i''i'''i'''' \cdot \frac{bcdex}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}.$

Unde progressio harum formularum ad plures adhuc lentes satis est manifesta. Si in lentibus ratio refractionis sit diversa atque ad singulas lentes ordine his litteris indicetur n, n', n'', n''' etc., haec diversitas facile ad formulas hic inventas accommodabitur. Primum enim haec correctio oc-

currit in formulis pro radiis lentium, ita ut, quemadmodum formulae f et g pro prima lente numerum n involvunt, ita pro secunda lente numerus n', pro tertia n'' et ita porro introducatur. Similem correctionem etiam requirunt valores litterarum P, Q, R, S etc., et loco litterae n, quae in valore P occurrit, in valoribus Q, R, S etc. scribi oportet n', n'', n''' etc.

COROLLARIUM 1

87. Si obiectum sit tantum punctum in axe positum, sufficit, ut lentium aperturae sint tantae, quantas assignavimus; sin autem obiectum habeat quandam magnitudinem, tum aperturae praeter primam eo magis mensuras assignatas superare debent, quo maior fuerit obiecti magnitudo z.

COROLLARIUM 2

88. In expressione spatii diffusionis quadratum semidiametri aperturae primae faciei xx primo multiplicatur per quadratum distantiae postremae imaginis ab ultima lentium: quae ergo si fuerit infinita, etiam spatium diffusionis fit infinitum.

COROLLARIUM 3

89. Ceteris ergo paribus, quotcunque fuerint lentes, spatium diffusionis semper est proportionale quadrato diametri aperturae primae faciei, hoc est ipsi huic aperturae. Unde diametro aperturae primae faciei ad semissem redacto, spatium diffusionis quadruplo fiet minus.

SCHOLION

90. Consideravimus hic statim loca singularum imaginum principalium tanquam data, ex iisque structuram cuiusque lentis quantitatem arbitrariam introducendo determinavimus. Quod si vero ipsae lentes fuerint datae, ita ut tam radii ambarum facierum cuiusque quam crassities una cum earum intervallis cognoscantur, tum ope formularum exhibitarum vicissim distantiae determinatrices innotescunt. Sint scilicet radii facierum anterioris et posterioris primae lentis PP f, g, secundae lentis QQ f', g', tertiae lentis RR f'', g'' etc., crassitie earum existente v, v', v'' etc., tum vero dentur distantiae $aB = F$; $bC = G$; $cD = H$ etc. Praeterea autem distantia obiecti ante lentem

primam sit $AE = a$, ac sequenti modo omnia elementa ad problema superius necessaria elicientur:

1. $\frac{n-1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{2n}{k+v}$, hinc reperitur k; 2. $\frac{n-1}{g} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2n}{k-v}$, hinc vero α;

3. $F = \alpha + b$, unde $b = F - \alpha$;

4. $\frac{n-1}{f'} = \frac{1}{b} + \frac{2n}{k'+v'}$, hinc reperitur k'; 5. $\frac{n-1}{g'} = \frac{1}{\beta} - \frac{2n}{k'-v'}$, hinc vero porro β;

6. $G = \beta + c$, unde $c = G - \beta$;

7. $\frac{n-1}{f''} = \frac{1}{c} + \frac{2n}{k''+v''}$, hinc reperitur k''; 8. $\frac{n-1}{g''} = \frac{1}{\gamma} - \frac{2n}{k''-v''}$, hinc vero γ;

9. $H = \gamma + d$, unde $d = H - \gamma$

etc.

Utcunque ergo lentes datae fuerint dispositae super axe communi, si ante eas constituatur obiectum in data distantia $AE = a$, inde singulae distantiae determinatrices α, b, β, c, γ etc. cum arbitrariis k, k', k'', k''' etc. facile definiuntur, ex iisque porro spatium diffusionis cum reliquis phaenomenis in solutione problematis commemoratis assignabitur. Operae pretium autem erit casum, quo crassities lentium ut evanescens spectatur, accuratius evolvisse.

PROBLEMA 5

91. *Si crassities lentium evanescat et quotcunque huiusmodi lentes super communi axe fuerint dispositae, ante quas existat obiectum $E\varepsilon$, definire spatium diffusionis, per quod imago erit dissipata, ut et magnitudinem imaginis.*

SOLUTIO

Sit obiecti magnitudo $E\varepsilon = z$, cuius imagines principales successive cadant in $F\zeta$, $G\eta$, $H\theta$, $I\iota$, $K\varkappa$ etc., hincque pro singulis lentibus sequentes habebimus distantias determinatrices, cum imago per quamvis lentem repraesentata respectu lentis sequentis vicem obiecti gerat:

Pro lente PP distantia obiecti $EA = a$, distantia imaginis $aF = \alpha$,
pro lente QQ distantia obiecti $FB = b$, distantia imaginis $bG = \beta$,
pro lente RR distantia obiecti $GC = c$, distantia imaginis $cH = \gamma$,
pro lente SS distantia obiecti $HD = d$, distantia imaginis $dI = \delta$,
pro lente TT distantia obiecti $IE = e$, distantia imaginis $eK = \varepsilon$

etc.

Porro autem sint numeri arbitrarii unitate maiores cuiusque lentis figuram determinantes, λ pro lente PP, λ' pro QQ, λ'' pro RR, λ''' pro SS, λ'''' pro TT etc., ita ut ponendo brevitatis gratia

$$\varrho = 0{,}190781, \qquad \sigma = 1{,}627401, \qquad \tau = 0{,}905133$$

$$\text{pro lente } PP \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{\varrho\alpha + \sigma a \pm \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \\ \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{\varrho a + \sigma\alpha \mp \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } QQ \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{b\beta}{\varrho\beta + \sigma b \pm \tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \\ \text{posterioris} = \dfrac{b\beta}{\varrho b + \sigma\beta \mp \tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } RR \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{c\gamma}{\varrho\gamma + \sigma c \pm \tau(c+\gamma)\sqrt{(\lambda''-1)}} \\ \text{posterioris} = \dfrac{c\gamma}{\varrho c + \sigma\gamma \mp \tau(c+\gamma)\sqrt{(\lambda''-1)}} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } SS \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{d\delta}{\varrho\delta + \sigma d \pm \tau(d+\delta)\sqrt{(\lambda'''-1)}} \\ \text{posterioris} = \dfrac{d\delta}{\varrho d + \sigma\delta \mp \tau(d+\delta)\sqrt{(\lambda'''-1)}} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } TT \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{e\varepsilon}{\varrho\varepsilon + \sigma e \pm \tau(e+\varepsilon)\sqrt{(\lambda''''-1)}} \\ \text{posterioris} = \dfrac{e\varepsilon}{\varrho e + \sigma\varepsilon \mp \tau(e+\varepsilon)\sqrt{(\lambda''''-1)}} \end{cases}$$

etc.

Deinde si quaelibet lens cum binis suis distantiis determinatricibus seorsim consideretur eiusque aperturae semidiameter foret $= x$, posito $\mu = 0{,}938191$ et $\nu = 0{,}232692$ esset spatium diffusionis

$$\text{lentis } PP = \mu\alpha\alpha xx\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\nu}{a\alpha}\right)$$

$$\text{lentis } QQ = \mu\beta\beta xx\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \frac{\nu}{b\beta}\right)$$

$$\text{lentis } RR = \mu\gamma\gamma xx\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda''\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 + \frac{\nu}{c\gamma}\right)$$

$$\text{lentis } SS = \mu\delta\delta xx\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{\delta}\right)\left(\lambda'''\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{\delta}\right)^2 + \frac{\nu}{d\delta}\right)$$

$$\text{lentis } TT = \mu\varepsilon\varepsilon xx\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda''''\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{\nu}{e\varepsilon}\right)$$

etc.

His constitutis pro magnitudine singularum imaginum habebimus

pro una lente $F\zeta = \frac{\alpha}{a}z$ situ inverso,

pro duabus lentibus $G\eta = \frac{\alpha\beta}{ab}z$ situ erecto,

pro tribus lentibus $H\theta = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}z$ situ inverso,

pro quatuor lentibus $I\iota = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd}z$ situ erecto,

pro quinque lentibus $K\varkappa = \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{abcde}z$ situ inverso

etc.

At si semidiameter aperturae primae lentis PP ponatur $= x$, necesse est, ut reliquarum lentium aperturae superent sequentes valores:

Semidiameter aperturae

lentis secundae $QQ > \frac{b}{\alpha}x$, lentis tertiae $RR > \frac{bc}{\alpha\beta}x$,

lentis quartae $SS > \frac{bcd}{\alpha\beta\gamma}x$, lentis quintae $TT > \frac{bcde}{\alpha\beta\gamma\delta}x$

etc.

Hinc spatium diffusionis pro quolibet lentium numero ita se habebit:

I. Pro una lente

spatium diffusionis: $Ff = \mu\alpha\alpha xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)$

radiorum in f concurrentium inclinatio ad axem $= \frac{x}{\alpha}$.

II. Pro duabus lentibus

spatium diffusionis:

$$Gg = \mu\beta\beta xx\left\{\begin{aligned}&+\frac{\alpha\alpha}{bb}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)\\ &+\frac{bb}{\alpha\alpha}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu}{b\beta}\right)\end{aligned}\right\}$$

et radiorum in g concurrentium inclinatio ad axem $= \frac{bx}{\alpha\beta}$.

III. Pro tribus lentibus

spatium diffusionis:

$$Hh = \mu\gamma\gamma xx \left\{ \begin{array}{l} +\dfrac{\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\nu}{a\alpha}\right) \\ +\dfrac{bb\beta\beta}{\alpha\alpha cc}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{\beta}\right)^2+\dfrac{\nu}{b\beta}\right) \\ +\dfrac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda''\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{\gamma}\right)^2+\dfrac{\nu}{c\gamma}\right) \end{array} \right\}$$

et radiorum in h concurrentium inclinatio ad axem $\frac{bcx}{\alpha\beta\gamma}$.

IV. Pro quatuor lentibus

spatium diffusionis:

$$Ii = \mu\delta\delta xx \left\{ \begin{array}{l} +\dfrac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{bbccdd}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\nu}{a\alpha}\right) \\ +\dfrac{bb\beta\beta\gamma\gamma}{\alpha\alpha ccdd}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{\beta}\right)^2+\dfrac{\nu}{b\beta}\right) \\ +\dfrac{bbcc\gamma\gamma}{\alpha\alpha\beta\beta dd}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda''\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{\gamma}\right)^2+\dfrac{\nu}{c\gamma}\right) \\ +\dfrac{bbccdd}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}\left(\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{\delta}\right)\left(\lambda'''\left(\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{\delta}\right)^2+\dfrac{\nu}{d\delta}\right) \end{array} \right\}$$

et radiorum in i concurrentium inclinatio ad axem $=\frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma\delta}$.

V. Pro quinque lentibus

spatium diffusionis:

$$Kk = \mu\varepsilon\varepsilon xx \left\{ \begin{array}{l} +\dfrac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}{bbccddee}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\nu}{a\alpha}\right) \\ +\dfrac{lb\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}{\alpha\alpha ccddee}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{\beta}\right)^2+\dfrac{\nu}{b\beta}\right) \\ +\dfrac{bbcc\gamma\gamma\delta\delta}{\alpha\alpha\beta\beta ddee}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda''\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{\gamma}\right)^2+\dfrac{\nu}{c\gamma}\right) \\ +\dfrac{bbccdd\delta\delta}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma ee}\left(\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{\delta}\right)\left(\lambda'''\left(\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{\delta}\right)^2+\dfrac{\nu}{d\delta}\right) \\ +\dfrac{bbccddee}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}\left(\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda''''\left(\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^2+\dfrac{\nu}{e\varepsilon}\right) \end{array} \right\}$$

et radiorum in k concurrentium inclinatio ad axem $=\frac{bcdex}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$; neque ergo casus, quibus plures occurrunt lentes, ulla amplius laborant difficultate.

Si lentes ratione refractionis discrepent ad easque referendae sint litterae n, n', n'', n''' etc., formulae in hoc problemate inventae sequenti modo facile ad hunc casum latius patentem adcommodabuntur. Primo scilicet in formulis pro radiis facierum inventis litterae ϱ, σ et τ tantum ad primam lentem pertinent, earumque loco pro secunda lente scribi oportet ϱ', σ' et τ', pro tertia autem ϱ'', σ'' et τ'' et ita porro. Praeterea vero spatia diffusionis hinc aliquam mutationem requirunt, eritque spatium diffusionis:

I. Pro una lente

$$\alpha\alpha xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\mu\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)$$

II. Pro duabus lentibus

$$\beta\beta xx\left\{\frac{\mu\alpha\alpha}{bb}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)+\frac{\mu' bb}{\alpha\alpha}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu'}{b\beta}\right)\right\}$$

III. Pro tribus lentibus

$$\gamma\gamma xx\left\{\begin{aligned}&+\frac{\mu\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)\\&+\frac{\mu' bb\beta\beta}{\alpha\alpha cc}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu'}{b\beta}\right)\\&+\frac{\mu'' bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda''\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)^2+\frac{\nu''}{c\gamma}\right)\end{aligned}\right\}$$

IV. Pro quatuor lentibus

$$\delta\delta xx\left\{\begin{aligned}&+\frac{\mu\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{bbccdd}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)\\&+\frac{\mu' bb\beta\beta\gamma\gamma}{\alpha\alpha ccdd}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu'}{b\beta}\right)\\&+\frac{\mu'' bbcc\gamma\gamma}{\alpha\alpha\beta\beta dd}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda''\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)^2+\frac{\nu''}{c\gamma}\right)\\&+\frac{\mu''' bbccdd}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{\delta}\right)\left(\lambda'''\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{\delta}\right)^2+\frac{\nu'''}{d\delta}\right)\end{aligned}\right\}$$

valores autem harum litterarum μ', ν', μ'', ν'' etc. iam supra definivimus § 77.

COROLLARIUM 1

92. Si lentis primae PP ponatur radius faciei anterioris $=f$ et posterioris $=g$, erit

$$\frac{1}{f}=\frac{\varrho}{a}+\frac{\sigma}{\alpha}\pm\tau\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\Big)\sqrt{(\lambda-1)},\quad \frac{1}{g}=\frac{\varrho}{\alpha}+\frac{\sigma}{a}\mp\tau\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\Big)\sqrt{(\lambda-1)},$$

unde, si detur distantia obiecti $EA=a$, primo invenitur α ex hac aequatione

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{g}=(\varrho+\sigma)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\Big)=1{,}818182\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\Big)=\frac{20}{11}\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\Big).$$

Inventa autem distantia α numerus λ reperitur ex hac aequatione

$$\frac{1}{f}-\frac{1}{g}+(\sigma-\varrho)\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\Big)=2\tau\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\Big)\sqrt{(\lambda-1)}.$$

COROLLARIUM 2

93. Deinde si distantia secundae lentis a prima sit $=F$, ob $F=\alpha+b$ habetur $b=F-\alpha$; qua distantia b cognita, si pro lente secunda datus sit radius faciei anterioris $=f'$ et posterioris $=g'$, habebuntur iterum duae aequationes

$$\frac{1}{f'}=\frac{\varrho}{b}+\frac{\sigma}{\beta}\pm\tau\Big(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\Big)\sqrt{(\lambda'-1)},\quad \frac{1}{g'}=\frac{\varrho}{\beta}+\frac{\sigma}{b}\mp\tau\Big(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\Big)\sqrt{(\lambda'-1)},$$

ex quibus cum distantiam β tum numerum λ' definire licet. Similique modo ex forma sequentium lentium earumque distantia reliqua elementa innotescent.

COROLLARIUM 3

94. Si singulae lentes ad minimum spatium diffusionis fuerint accommodatae, erit $\lambda=1$, $\lambda'=1$, $\lambda''=1$, $\lambda'''=1$ etc.; sin autem hae lentes alia forma fuerint praeditae, isti numeri erunt unitate maiores.

SCHOLION

95. Quo plures fuerint lentes, eo pluribus constabit membris spatium diffusionis ab iis productum; neque tamen propterea aucto lentium numero spatium diffusionis necessario augetur. Cum enim quantitates α, b, β, c, γ, d, δ etc. valores quoque negativos recipere queant, dummodo binarum summae $\alpha+b$; $\beta+c$; $\gamma+d$; $\delta+e$ etc. utpote lentium distantiae maneant

positivae, fieri potest, ut unum vel aliquot membra fiant negativa hincque spatium diffusionis diminuatur, quin etiam interdum prorsus evanescat, quo casu repraesentatio sine dubio erit perfectissima. Verum in instrumentis dioptricis ad visionem instructis veluti Telescopiis ac Microscopiis non tam hoc, quod definivimus, spatium diffusionis quam confusio in ipsa visione orta spectari debet; quae autem, etsi a spatio diffusionis plurimum differt, tamen ex eo definiri potest, uti mox explicabimus. Ante autem conveniet lentes compositas seu multiplicatas considerare, cuiusmodi oriuntur, si duae pluresve lentes, quarum crassities tam est parva, ut negligi queat, immediate iungantur, quo quidem pacto instar lentium simplicium spectari possunt; verum tali coniunctione effici potest, ut spatium diffusionis multo fiat minus, quam si lens simplex adhiberetur, atque adeo evanescat valorque numeri λ istiusmodi lenti compositae conveniens unitate minor sit proditurus, unde maxima commoda ad confusionem diminuendam obtinebuntur.

CAPUT III

DE LENTIBUS COMPOSITIS SEU MULTIPLICATIS

DEFINITIO 1

96. *Lens duplicata oritur, si duae lentes super communi axe sibi immediate iungantur.*

Crassitiem hic utriusque lentis tanquam nullam assumo, et quia distantia inter lentes nulla ponitur, crassities etiam lentis duplicatae pro nulla haberi poterit.

COROLLARIUM 1

97. Binae ergo lentes PP et QQ (Fig. 7) sibi ad contactum fere coniunctae lentem duplicatam constituunt; de qua tamen notandum est eius crassitiem minus tuto negligi posse quam utriusque lentis simplicis seorsim

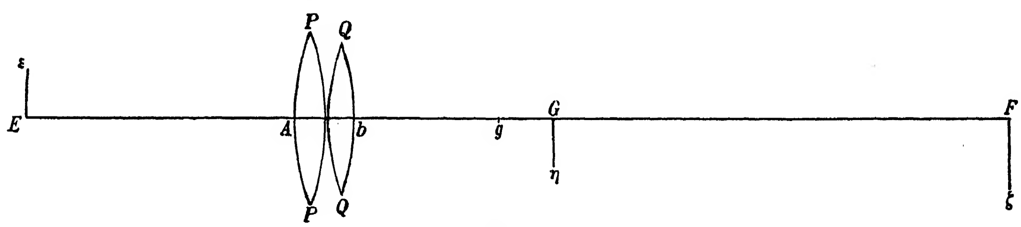

Fig. 7.

sumtae. Si enim lentes immediate se in puncto contingerent, phaenomena colorum a NEUTONO observata essent metuenda; tum vero etiam ostendemus, quomodo ratio distantiae inter binas lentes haberi possit.

COROLLARIUM 2

98. Si lentis anterioris PP distantiae determinatrices sint a et α, lentis posterioris vero QQ b et β, necesse est, ut sit $\alpha + b = 0$ seu $\alpha = -b$. Tum

vero obiecti ante lentem ad distantiam $AE = a$ positi imago principalis repraesentabitur post lentem ad distantiam $bG = \beta$.

COROLLARIUM 3

99. Erunt ergo a et β quasi distantiae determinatrices lentis duplicatae; ac sumendo α vel b ad libitum infinita paria lentium pro his distantiis exhiberi possunt. Cum deinde utraque lens praeterea numerum indefinitum λ recipiat, insuper infinita varietas locum habet.

COROLLARIUM 4

100. Quia crassities pro nihilo reputatur, aperturae in singulis faciebus eadem est ratio; scilicet si in prima facie semidiameter aperturae sit $= x$, in reliquis quoque faciebus apertura eadem vel saltem non minor esse debet.

SCHOLION

101. Non opus est, ut lentes plane ad contactum coniungantur, quoniam forte refractionis lex turbari posset: hoc autem vel minima interposita distantia evitabitur, id quod ad institutum nostrum sufficit, cum etiam crassities utriusque non omnino sit nulla.

PROBLEMA 1

102. *Omnes lentes duplicatas describere, quibus obiectum $E\varepsilon$* (Fig. 7, p. 63) *in data ante lentem distantia AE propositum post lentem in data distantia bG repraesentetur, simulque diffusionem imaginis Gg pro data lentis apertura definire.*

SOLUTIO

Sit distantia obiecti $AE = a$, imaginis principalis $bG = \beta$, tum vero lentis primae PP distantiae determinatrices a et α, lentis posterioris vero QQ b et β; iam quia distantia lentium est nulla, erit $\alpha + b = 0$ seu $\alpha = -b$. Hinc si obiecti magnitudo sit $E\varepsilon = z$, erit imaginis principalis magnitudo $G\eta = \frac{\beta}{a} z$ pro situ inverso. Cum porro utraque lens infinitis modis formari possit, sit λ numerus arbitrarius pro prima PP et λ' pro secunda QQ, quarum ergo constructio ita se habebit:

$$\text{Pro lente } PP \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{\varrho\alpha + \sigma a \pm \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \\ \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{\varrho a + \sigma\alpha \mp \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } QQ \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{\beta b}{\varrho\beta + \sigma b \pm \tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \\ \text{posterioris} = \dfrac{b\beta}{\varrho b + \sigma\beta \mp \tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}}. \end{cases}$$

Si ratio refractionis sit diversa, pro secunda lente scribi debet ϱ', σ' et τ' loco ϱ, σ et τ.

Pro spatio autem diffusionis Gg inveniendo sit semidiameter aperturae lentis duplicatae $= x$, eritque

$$Gg = \mu\beta\beta xx\left\{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu}{b\beta}\right)\right\}$$

et radiorum in g concurrentium inclinatio ad axem $= \frac{x}{\beta}\cdot$ Si ratio refractionis discrepet, in parte ex lente secunda orta scribatur μ', ν' loco μ, ν.

COROLLARIUM 1

103. Huius ergo lentis duplicatae distantiae determinatrices sunt a et β, praeterea vero duo numeri arbitrarii λ et λ' una cum distantia α vel b eius perfectam determinationem constituunt, unde in huiusmodi lentibus multo maior varietas locum habet quam in lentibus simplicibus.

COROLLARIUM 2

104. Si ex eisdem distantiis determinatricibus a et β adiungendo numero arbitrario λ^0 lens simplex construatur, ea imaginem eadem magnitudine $G\eta = \frac{\beta}{a}z$ referet; sed pro eadem apertura, cuius semidiameter $= x$, habebitur spatium diffusionis

$$Gg = \mu\beta\beta xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda^0\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu}{a\beta}\right).$$

COROLLARIUM 3

105. Fieri ergo poterit, ut lens duplicata modo maiorem, modo minorem diffusionem gignat. Lens autem simplex minimam parit diffusionem, si $\lambda^0 = 1$; ergo tum lentes duplicatae simplicibus erunt praeferendae, cum adhuc minorem diffusionem producent.

SCHOLION

106. Concipi quidem semper poterit lens simplex eandem diffusionem gignens ac lens duplicata, si pro numero λ^0 omnes valores admittamus; quomodocunque enim lens duplicata fuerit comparata, si spatium diffusionis inde productum huic ex lente simplici nato aequale statuatur, determinatus valor pro numero λ^0 elicitur: qui si fuerit positivus et unitate maior, realis lens simplex aequivalens exhiberi poterit, sin autem prodeat unitate minor vel adeo negativus, lens simplex inter imaginaria erit referenda. Quando autem fit $\lambda^0 > 1$, evidens est lentem simplicem eundem plane effectum esse edituram ac duplicatam, ideoque semper expediet lente simplici potius uti quam duplicata; quodsi vero prodierit $\lambda^0 < 1$, quo casu lens simplex fit imaginaria, tum lentes duplicatae effectum praestabunt a simplicibus non expectandum, qui adeo cum insigni hoc commodo, quod spatium diffusionis futurum sit minus, erit coniunctus. Talibus ergo lentibus duplicatis maximo cum successu uti poterimus, eoque magis eae simplicibus erunt anteponendae, quo minor fuerit valor numeri λ^0 iis respondens.

PROBLEMA 2

107. *Data lente duplicata ad binas distantias determinatrices* $AE = a$ (Fig. 7, pag. 63) *et* $bG = \beta$ *relata, pro iisdem distantiis definire lentem simplicem, quae pro eadem apertura eandem diffusionem imaginis producat.*

SOLUTIO

Totum ergo negotium huc redit, ut spatium diffusionis Gg a lente simplici productum (§ 104) aequale ponatur spatio diffusionis a lente duplicata orto, cuius expressio in problemate praecedente (§ 102) est inventa, indeque valor numeri λ^0 pro constructione lentis simplicis eliciatur. Quae investigatio quo commodius institui possit, ponamus:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{f-1}{a} + \frac{f}{\beta}, \quad \text{eritque} \quad \frac{1}{b} = \frac{-f+1}{a} - \frac{f}{\beta},$$

ita ut loco quantitatis a vel b numerum f introducamus, eritque

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}=(1-f)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)$$

unde spatium diffusionis lente duplicata ortum prodit:

$$Gg=\mu\beta\beta xx\left\{\begin{array}{c} f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda ff\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\nu\left(\frac{f-1}{aa}+\frac{f}{a\beta}\right)\right) \\ +(1-f)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'(1-f)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\nu\left(\frac{1-f}{a\beta}-\frac{f}{\beta\beta}\right)\right)\end{array}\right\}$$

quae expressio reducitur ad hanc formam:

$$Gg=\mu\beta\beta xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left\{\begin{array}{c}\left(\lambda f^3+\lambda'(1-f)^3\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2 \\ +\nu\left(\frac{f(f-1)}{aa}+\frac{1-2f+2ff}{a\beta}+\frac{f(f-1)}{\beta\beta}\right)\end{array}\right\}$$

Verum postremum membrum

$$\frac{f(f-1)}{aa}+\frac{1-2f+2ff}{a\beta}+\frac{f(f-1)}{\beta\beta} \quad \text{mutatur in} \quad f(f-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{1}{a\beta},$$

sicque habebimus pro lente duplicata:

$$Gg=\mu\beta\beta xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left\{\left(\lambda f^3+\lambda'(1-f)^3-\nu f(1-f)\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu}{a\beta}\right\}$$

quae forma iam facillime cum spatio diffusionis lentis simplicis comparatur indeque manifesto colligitur:

$$\lambda^0=\lambda f^3+\lambda'(1-f)^3-\nu f(1-f).$$

Cum autem loco quantitatum a et b numerum f introduxerimus, constructio lentis duplicatae ita se habebit:

Pro lente		Radius faciei
prima PP	anterioris	$=\dfrac{a\beta}{(\varrho-\sigma(1-f))\beta+\sigma fa\pm\tau f(a+\beta)\sqrt{(\lambda-1)}}$
	posterioris	$=\dfrac{a\beta}{(\sigma-\varrho(1-f))\beta+\varrho fa\mp\tau f(a+\beta)\sqrt{(\lambda-1)}}$
secunda QQ	anterioris	$=\dfrac{a\beta}{(\sigma-\varrho f)a+\varrho(1-f)\beta\pm\tau(1-f)(a+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}}$
	posterioris	$=\dfrac{a\beta}{(\varrho-\sigma f)a+\sigma(1-f)\beta\mp\tau(1-f)(a+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}}.$

Tum vero invento numero λ^0 constructio lentis simplicis aequivalentis erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{\alpha\beta}{\varrho\beta+\sigma\alpha\pm\tau(\alpha+\beta)\sqrt{(\lambda^0-1)}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{\alpha\beta}{\varrho\beta+\sigma\alpha\mp\tau(\alpha+\beta)\sqrt{(\lambda^0-1)}}.\end{cases}$$

COROLLARIUM 1

108. Quoties ergo fuerit

$$\lambda f^3+\lambda'(1-f)^3-\nu f(1-f)>1,$$

semper lens simplex parari potest duplicatae aequivalens, iisque ergo casibus praestabit lente simplici uti potius quam lente duplicata.

COROLLARIUM 2

109. Verum si fuerit

$$\lambda f^3+\lambda'(1-f)^3-\nu f(1-f)<1,$$

ob $\lambda^0<1$ constructio lentis simplicis fit impossibilis, ac lens duplicata minorem pariet diffusionem, quam per ullam lentem simplicem obtineri potest.

COROLLARIUM 3

110. Si esset $f=0$, prodiret $\lambda^0=\lambda'$, et in lente duplicata anterior nullam refractionem produceret ob facies parallelas, resque eodem rediret, ac si posterior sola adesset. Sin autem sumatur $f=1$, fit $\lambda^0=\lambda$, et lens posterior superflua; utroque ergo casu nullum lucrum impetratur.

COROLLARIUM 4

111. Cum autem numeri λ et λ' unitate nequeant esse minores sitque $\nu=0{,}232692$, patet pro f nullum valorem inter limites 0 et 1 assumi posse, unde fiat $\lambda^0=0$. At si f extra hos limites capiatur, utique pro λ et λ' eiusmodi numeri unitate maiores assignari poterunt, ut fiat $\lambda^0=0$.

SCHOLION 1

112. Ratione ergo numeri f tres casus lentium duplicatarum considerari conveniet, prout vel f intra limites 0 et 1 continetur, vel fuerit $f>1$, vel $f<0$. Primo casu evenire non potest, ut fiat $\lambda^0=0$; sed plurimum interesset

eam determinasse lentem duplicatam, pro qua λ^0 minimum obtineat valorem, qui quo magis infra unitatem cadat, eo perfectior lens erit censenda maioreque iure simplicibus anteferenda. Binis reliquis vero casibus $f > 1$ et $f < 0$ eiusmodi adeo lentes duplicatae parari poterunt, quae praebeant $\lambda^0 = 0$, quae ergo pro perfectissimis essent habendae. Verum hic quoque ad praxin est respiciendum, quae cum semper a praeceptis theoriae aberrare soleat, evenire potest, ut levi errore commisso numerus λ^0 non solum non evanescat, sed adeo unitatem excedat, quo casu utique expediret lente uti simplici.

SCHOLION 2

113. Cum tanti sit momenti rationem aberrationis, a qua praxis vix liberari potest, habere, eam etiam in lentibus simplicibus perpendi conveniet. Postulavimus autem pro datis distantiis determinatricibus lentem construi posse, in qua numerus λ datum obtineat valorem, dum ne sit unitate minor; hic igitur observari oportet, quo maior fuerit λ, eo difficilius fore errorem evitare; si enim in constructione levissimus error committatur, alius eo magis diversus valor pro λ orietur, quo maior fuerit λ. Verum e contrario, cum unitas sit minimus valor, quem λ recipere potest, ex natura minimi liquet, etiamsi in praxi a praescripta regula notabiliter recedatur, tamen inde vix sensibile discrimen in valorem λ esse redundaturum. Ex quo concludimus felicissimo cum successu eiusmodi lentes simplices parari posse, pro quibus futurum sit $\lambda = 1$, neque hic errores praxeos, nisi fuerint enormes, admodum esse pertimescendos. Deinde quo minus numerus λ unitatem superare debeat, eo certiores esse poterimus de successu, sed non eo gradu, quo casu $\lambda = 1$; at si opus sit eiusmodi lente, pro qua valor ipsius λ debeat esse numerus satis magnus, difficillime per praxin satisfiet ac fortasse ingentem lentium numerum parare oportebit, antequam una obtineatur scopo satisfaciens. Quamobrem, si praxi consulere velimus, vix alias lentes exigere debemus, nisi pro quibus numerus λ vel sit unitas ipsa vel parumper maior. Sin autem ad insigne aliquod commodum aliae lentes requirantur, labori non erit parcendum, cum fortasse non nisi post plurimos conatus irritos voti tandem compotes reddi queamus.

PROBLEMA 3

114. *Definire eam lentem duplicatam, pro qua, si numerus f intra limites* 0 *et* 1 *accipiatur, numerus λ^0 minimum adipiscatur valorem.*

SOLUTIO

Positis iisdem, quae in praecedentibus problematibus sunt constituta, invenimus esse

$$\lambda^0 = \lambda f^3 + \lambda'(1-f)^3 - \nu f(1-f),$$

ubi, cum f intra limites 0 et 1 assumi debeat, ambo termini λf^3 et $\lambda'(1-f)^3$ erunt positivi. Quare ut λ^0 omnium minimum valorem nanciscatur, necesse est utrique numero λ et λ' minimum valorem, cuius est capax, tribui.

Sit ergo $\lambda = 1$ et $\lambda' = 1$, ac habebimus

$$\lambda^0 = 1 - 3f + 3ff - \nu f + \nu ff = 1 - (3+\nu)f(1-f),$$

quae expressio ut minima reddatur, oportet fieri $f(1-f)$ maximum, id quod fit sumendo $f = \frac{1}{2}$; hincque oritur

$$\lambda^0 = 1 - \frac{1}{4}(3+\nu) = \frac{1-\nu}{4} = 0{,}191827.$$

Quare constructio huius lentis duplicatae ita se habebit:

$$\text{Pro lente } PP \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{2\alpha\beta}{(2\varrho-\sigma)\beta+\sigma\alpha} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{2\alpha\beta}{(2\sigma-\varrho)\beta+\varrho\alpha} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } QQ \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{2\alpha\beta}{(2\sigma-\varrho)\alpha+\varrho\beta} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{2\alpha\beta}{(2\varrho-\sigma)\alpha+\sigma\beta} \end{cases}$$

et si aperturae semidiameter sit $= x$, erit spatium diffusionis

$$Gg = \mu\beta\beta xx\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\left(0{,}191827\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2 + \frac{\nu}{\alpha\beta}\right).$$

Si eiusmodi vitro utamur, pro quo est $n = 1{,}60 = \frac{8}{5}$, tum ob $\nu = \frac{4}{15}$ prodiret $\lambda^0 = 0{,}183333$, ideoque haec vitri species adhuc minorem confusionem pareret.

COROLLARIUM 1

115. Si pro iisdem distantiis determinatricibus α et β lens simplex minimam diffusionem pariens construatur, quod fit sumendo

$$\text{radium faciei anterioris} = \frac{\alpha\beta}{\varrho\beta+\sigma\alpha}, \quad \text{posterioris} = \frac{\alpha\beta}{\varrho\alpha+\sigma\beta},$$

spatium diffusionis foret $\mu\beta\beta xx\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu}{\alpha\beta}\right)$.

COROLLARIUM 2

116. Apparet ergo a lente duplicata descripta multo minorem oriri diffusionem quam a lente simplici, etiamsi haec iam ad minimam diffusionem sit instructa. Cum enim ceterae partes sint pares, coefficiens membri $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2$ plus quam quintuplo minor est in duplicata quam in simplici.

COROLLARIUM 3

117. Si ponamus $\lambda = 1$ et $\lambda' = 1$, vel saltem $\lambda' = \lambda$, minor valor pro λ^0 obtineri nequit, quam invenimus, etiamsi pro f alios valores admittere velimus. Unde si utraque lens per se iam minimam diffusionem pariat, pro lente duplicata valor ipsius λ^0 minor quam 0,191827 fieri nequit.

SCHOLION

118. Huiusmodi ergo lentes duplicatae maxime sunt notatu dignae, cum loco simplicium adhibitae multo minorem diffusionem pariant, ex quo in constructione Telescopiorum et Microscopiorum earum amplissimus erit usus. Neque vero hac insigni proprietate sunt praeditae, sed etiam earum constructio in praxi minimis difficultatibus est obnoxia: propterea quod, etsi a praescriptis regulis parumper aberretur, effectus tamen inde vix ullam mutationem patiatur. Sive enim in constructione utriusque seorsim levis error committatur, valores numerorum λ et λ' unitatem haud sensibiliter excedent sive in quantitate f valor iustus $f = \frac{1}{2}$ non exacte observetur, error vix sentietur, quoniam hi numeri ex natura minimi sunt eruti. Quomodocunque autem a regulis praescriptis aberretur, valor ipsius λ^0 inde paulisper maior prodibit. Veluti si eiusmodi errores committantur, ut sit

$$\lambda = 1 + \frac{1}{10}, \quad \lambda' = 1 + \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{20},$$

prodibit $\lambda^0 = 0{,}191827 + 0{,}03383$ seu $\lambda^0 = 0{,}2257$[1]), ita ut discrimen partem tantum tricesimam[2]) unitatis conficiat. Facile autem intelligitur, dummodo λ^0 prodeat minus quam $\frac{1}{4}$, quod nunquam non facile praestari posse videtur,

1) Editio princeps: $\lambda^0 = 0{,}191827 + 0{,}02558$ *seu* $\lambda^0 = 0{,}2174$. Correxit E. Ch.
2) Editio princeps: *quadragesimam.* Correxit E. Ch.

ab his lentibus duplicatis insignem utilitatem expectandam esse. Etsi ergo eiusmodi lentes duplicatae confici possunt, pro quibus numerus λ^0 plane evanescat, ob harum lubricam constructionem illae istis anteferendae videntur, ut mox clarius patebit.

PROBLEMA 4

119. *Pro datis distantiis determinatricibus $AE = a$ et $bG = \beta$ eas lentes duplicatas invenire, in quibus sit $\lambda^0 = 0$.*

SOLUTIO

Cum fieri nequeat $\lambda^0 = 0$, nisi numerus f extra limites 0 et 1 accipiatur, simulque numeri λ et λ' fuerint inaequales, ita ut alterutra saltem lens non debeat seorsim minimam diffusionem parare, ponamus esse vel $f > 1$ vel $f < 0$. Sit ergo primo $f = 1 + \xi$, et cum sit $\lambda^0 = \lambda(1+\xi)^3 - \lambda'\xi^3 + \nu\xi(1+\xi)$, ut fiat $\lambda^0 = 0$, oportet esse

$$\lambda' = \lambda\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^3 + \frac{\nu(1+\xi)}{\xi^2},$$

unde λ' necessario unitatem superabit; cuius valor ne prodeat nimis magnus, sumi conveniet $\lambda = 1$, ita ut sit

$$\lambda' = \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^3 + \frac{0{,}232692(1+\xi)}{\xi^2} \quad \text{et} \quad \lambda = 1.$$

Quicunque ergo valor ipsi ξ tribuatur, lens duplicata habetur, pro qua sit $\lambda^0 = 0$, ac propterea spatium diffusionis $= \mu\beta\beta xx\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right)\frac{\nu}{a\beta}$. Videamus nonnullos casus speciales:

$$f = \tfrac{3}{2};\ \xi = \tfrac{1}{2};\ \lambda = 1 \text{ et } \lambda' = 28{,}396152$$
$$f = 2;\ \xi = 1;\ \lambda = 1 \text{ et } \lambda' = 8{,}465384$$
$$f = 3;\ \xi = 2;\ \lambda = 1 \text{ et } \lambda' = 3{,}549519$$
$$f = 4;\ \xi = 3;\ \lambda = 1 \text{ et } \lambda' = 2{,}473789$$
$$f = 5;\ \xi = 4;\ \lambda = 1 \text{ et } \lambda' = 2{,}025841$$
$$f = 6;\ \xi = 5;\ \lambda = 1 \text{ et } \lambda' = 1{,}783846$$

etc.

Pro altero casu sit $f = -\xi$, ideoque $\lambda^0 = -\lambda\xi^3 + \lambda'(1+\xi)^3 + \nu\xi(1+\xi)$, unde facto $\lambda^0 = 0$ prodit

$$\lambda = \lambda'\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^3 + \frac{\nu(1+\xi)}{\xi^2}.$$

Statui ergo conveniet $\lambda' = 1$, ac pro λ notentur casus sequentes:

$$\begin{array}{llll}
f = -\frac{1}{2}; & \xi = \frac{1}{2}; & \lambda = 28{,}396152 & \text{et } \lambda' = 1\\
f = -1; & \xi = 1; & \lambda = 8{,}465384 & \text{et } \lambda' = 1\\
f = -2; & \xi = 2; & \lambda = 3{,}549519 & \text{et } \lambda' = 1\\
f = -3; & \xi = 3; & \lambda = 2{,}473789 & \text{et } \lambda' = 1\\
f = -4; & \xi = 4; & \lambda = 2{,}025841 & \text{et } \lambda' = 1\\
f = -5; & \xi = 5; & \lambda = 1{,}783846 & \text{et } \lambda' = 1
\end{array}$$

sicque patet infinitis modis huiusmodi lentes duplicatas parari posse, pro quibus sit $\lambda^0 = 0$ et spatium diffusionis

$$Gg = \mu\beta'\beta xx\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\frac{\nu}{\alpha\beta}.$$

SCHOLION 1

120. Si huiusmodi lentes accuratissime parari possent, nullum est dubium, quin praecedentibus essent anteferendae, propterea quod diffusio iis adhuc magis diminuitur. Verum dolendum est, quod minimus error in earum constructione commissus omnem fere usum destruat. Quo hoc facilius diiudicare queamus, examinemus eum casum, quo est

$$f = 5, \quad \lambda = 1 \quad \text{et} \quad \lambda' = 2{,}025841$$

hincque

$$\lambda^0 = \lambda f^3 - \lambda'(f-1)^3 + \nu f(f-1) = 0.$$

Ponamus autem in constructione errorem esse commissum, ut revera non sit $f = 5$, sed $f = 5\frac{1}{10}$, dum numeri λ et λ' suos iustos valores obtineant: ob hunc autem vix vitandum errorem non fit $\lambda^0 = 0$, sed adeo $\lambda^0 = -2{,}011$; sicque haec lens duplicata simplicibus longe est postponenda; simili modo si f esset $= 5$, sed vel λ vel λ' tantillum a praescripto valore aberraret, enorme statim discrimen in valorem ipsius λ^0 redundaret. Minus quidem error metuendus videtur in ea specie, qua $\lambda = 1$, $\lambda' = 28{,}396152$ et $f = \frac{3}{2}$; sed prae-

SUPPLEMENTUM I[1])

DE LENTIBUS DUPLICATIS

Si pro lente anteriori ratio refractionis sit $n:1$, pro lente posteriori vero alia ratio $n':1$ locum habeat, problemata hic tractata sequenti modo resolvi poterunt.

PRO PROBLEMATE 1

Si pro numeris ϱ, σ et τ, qui ex n oriuntur, quaerantur simili modo ex n' valores ϱ', σ' et τ', erunt

$$\text{pro lente } PP \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{\varrho\alpha+\sigma a\pm\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{\varrho a+\sigma\alpha\mp\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } QQ \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{b\beta}{\varrho'\beta+\sigma' b\pm\tau'(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{b\beta}{\varrho' b+\sigma'\beta\mp\tau'(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \end{cases}$$

et definitis simili modo valoribus μ', ν' ex ratione $n':1$ reperietur spatium diffusionis

$$\beta\beta xx\left\{\mu\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)+\mu'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu'}{b\beta}\right)\right\};$$

reliqua manent ut in problemate.

PRO PROBLEMATE 2

Quoniam hic duae vitri species occurrunt, ponamus lentem simplicem quaesitam ex alio quocunque vitri genere parari, cuius ratio refractionis sit $n^0:1$, unde prodeant numeri μ^0 et ν^0; superfluum autem foret numeros ϱ^0, σ^0 et τ^0 computari, quoniam radii facierum fiunt imaginarii, ita ut eos exprimere non sit opus, et quoniam pro hac lente simplici aequivalente numerus λ^0 est introductus, erit huius lentis spatium diffusionis

$$\beta\beta xx\cdot\mu^0\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda^0\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu^0}{a\beta}\right)$$

1) Hoc supplementum attinet ad § 96—121. E. Ch.

terquam quod lens simplex posterior difficillime parari queat, pro qua λ' praecise valorem assignatum consequatur, talis lens ad usum dioptricum plane est inepta ob ingentem alterius faciei curvaturam. Quae cum ita sint, quia tam exiguus error in paratione huiusmodi lentium commissus facit, ut λ^0 adeo supra unitatem excrescat, vix sperare poterimus, ut unquam talis lens duplicata perficiatur, pro qua λ^0 usque ad $\frac{1}{5}$ diminuatur. In lentibus autem praecedentis generis successus vix fallere poterit, nisi in praxi enormiter a praescripta regula aberretur: ex quo his solis lentibus duplicatis cum fructu uti licebit, dum contra eae, quas in praesente problemate descripsimus, penitus profligandae videntur.

SCHOLION 2

121. Pro datis ergo binis distantiis determinatricibus a et β semper eiusmodi lens duplicata parari potest, ex qua nascatur spatium diffusionis

$$Gg = \mu\beta\beta xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda^0\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu}{a\beta}\right)$$

ita ut λ^0 numerum quemcunque denotare possit. Ad hoc enim satisfieri oportet huic aequationi:

$$\lambda^0 = \lambda f^3 + \lambda'(1-f)^3 - \nu f(1-f),$$

id quod semper fieri potest, cum f plane ab arbitrio nostro pendeat et numeri λ et λ' tantum non unitate minores accipi debeant. Definitis autem his tribus numeris λ, λ' et f ita, ut λ^0 datum valorem obtineat, binae lentes simplices, ex quibus duplicata est componenda, secundum formulas § 107 datas confici debent. Ubi quidem tenenda sunt ea, quae modo observavimus, in praxi eas lentes facillime obtineri, quando numeri λ et λ' unitatem parum superant, f vero propemodum $\frac{1}{2}$ denotat, cum contra, quo magis hi numeri ab istis terminis recedant, eo maius sit periculum, ne effectus enormiter fallat. Ceterum cum diffusionem a lente duplicata oriundam ad eandem formam reduxerimus, qua diffusio lentis simplicis exprimitur, inde id commodi consequimur, ut simili modo diffusionem a lentibus magis multiplicatis ortam definire valeamus.

SUPPLEMENTUM I[1])

DE LENTIBUS DUPLICATIS

Si pro lente anteriori ratio refractionis sit $n:1$, pro lente posteriori vero alia ratio $n':1$ locum habeat, problemata hic tractata sequenti modo resolvi poterunt.

PRO PROBLEMATE 1

Si pro numeris ϱ, σ et τ, qui ex n oriuntur, quaerantur simili modo ex n' valores ϱ', σ' et τ', erunt

$$\text{pro lente } PP \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{a\alpha}{\varrho\alpha + \sigma a \pm \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{a\alpha}{\varrho a + \sigma\alpha \mp \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } QQ \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{b\beta}{\varrho'\beta + \sigma' b \pm \tau'(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{b\beta}{\varrho' b + \sigma'\beta \mp \tau'(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \end{cases}$$

et definitis simili modo valoribus μ', ν' ex ratione $n':1$ reperietur spatium diffusionis

$$\beta\beta xx\left\{\mu\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)+\mu'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu'}{b\beta}\right)\right\};$$

reliqua manent ut in problemate.

PRO PROBLEMATE 2

Quoniam hic duae vitri species occurrunt, ponamus lentem simplicem quaesitam ex alio quocunque vitri genere parari, cuius ratio refractionis sit $n^0:1$, unde prodeant numeri μ^0 et ν^0; superfluum autem foret numeros ϱ^0, σ^0 et τ^0 computari, quoniam radii facierum fiunt imaginarii, ita ut eos exprimere non sit opus, et quoniam pro hac lente simplici aequivalente numerus λ^0 est introductus, erit huius lentis spatium diffusionis

$$\beta\beta xx\cdot\mu^0\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda^0\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu^0}{a\beta}\right)$$

1) Hoc supplementum attinet ad § 96—121. E. Ch.

terquam quod lens simplex posterior difficillime parari queat, pro qua λ' praecise valorem assignatum consequatur, talis lens ad usum dioptricum plane est inepta ob ingentem alterius faciei curvaturam. Quae cum ita sint, quia tam exiguus error in paratione huiusmodi lentium commissus facit, ut λ^0 adeo supra unitatem excrescat, vix sperare poterimus, ut unquam talis lens duplicata perficiatur, pro qua λ^0 usque ad $\frac{1}{5}$ diminuatur. In lentibus autem praecedentis generis successus vix fallere poterit, nisi in praxi enormiter a praescripta regula aberretur: ex quo his solis lentibus duplicatis cum fructu uti licebit, dum contra eae, quas in praesente problemate descripsimus, penitus profligandae videntur.

SCHOLION 2

121. Pro datis ergo binis distantiis determinatricibus a et β semper eiusmodi lens duplicata parari potest, ex qua nascatur spatium diffusionis

$$Gg = \mu\beta\beta xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda^0\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu}{a\beta}\right)$$

ita ut λ^0 numerum quemcunque denotare possit. Ad hoc enim satisfieri oportet huic aequationi:

$$\lambda^0 = \lambda f^3 + \lambda'(1-f)^3 - \nu f(1-f),$$

id quod semper fieri potest, cum f plane ab arbitrio nostro pendeat et numeri λ et λ' tantum non unitate minores accipi debeant. Definitis autem his tribus numeris λ, λ' et f ita, ut λ^0 datum valorem obtineat, binae lentes simplices, ex quibus duplicata est componenda, secundum formulas § 107 datas confici debent. Ubi quidem tenenda sunt ea, quae modo observavimus, in praxi eas lentes facillime obtineri, quando numeri λ et λ' unitatem parum superant, f vero propemodum $\frac{1}{2}$ denotat, cum contra, quo magis hi numeri ab istis terminis recedant, eo maius sit periculum, ne effectus enormiter fallat. Ceterum cum diffusionem a lente duplicata oriundam ad eandem formam reduxerimus, qua diffusio lentis simplicis exprimitur, inde id commodi consequimur, ut simili modo diffusionem a lentibus magis multiplicatis ortam definire valeamus.

SUPPLEMENTUM I[1])

DE LENTIBUS DUPLICATIS

Si pro lente anteriori ratio refractionis sit $n:1$, pro lente posteriori vero alia ratio $n':1$ locum habeat, problemata hic tractata sequenti modo resolvi poterunt.

PRO PROBLEMATE 1

Si pro numeris ϱ, σ et τ, qui ex n oriuntur, quaerantur simili modo ex n' valores ϱ', σ' et τ', erunt

$$\text{pro lente } PP \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{\varrho\alpha+\sigma a\pm\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{\varrho a+\sigma\alpha\mp\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } QQ \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{b\beta}{\varrho'\beta+\sigma' b\pm\tau'(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{b\beta}{\varrho' b+\sigma'\beta\mp\tau'(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \end{cases}$$

et definitis simili modo valoribus μ', ν' ex ratione $n':1$ reperietur spatium diffusionis

$$\beta\beta xx\left\{\mu\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)+\mu'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu'}{b\beta}\right)\right\};$$

reliqua manent ut in problemate.

PRO PROBLEMATE 2

Quoniam hic duae vitri species occurrunt, ponamus lentem simplicem quaesitam ex alio quocunque vitri genere parari, cuius ratio refractionis sit $n^0:1$, unde prodeant numeri μ^0 et ν^0; superfluum autem foret numeros ϱ^0, σ^0 et τ^0 computari, quoniam radii facierum fiunt imaginarii, ita ut eos exprimere non sit opus, et quoniam pro hac lente simplici aequivalente numerus λ^0 est introductus, erit huius lentis spatium diffusionis

$$\beta\beta xx\cdot\mu^0\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda^0\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu^0}{a\beta}\right)$$

1) Hoc supplementum attinet ad § 96—121. E. Ch.

quod ut cum spatio diffusionis lentis duplicatae aequale fiat, ponatur, uti in problemate est factum,

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{f-1}{a}+\frac{f}{\beta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{b}=\frac{1-f}{a}-\frac{f}{\beta},$$

ut prodeat

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=f\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\Big) \quad \text{et} \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}=(1-f)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\Big)$$

unde pervenietur ad hanc aequationem

$$\mu f\Big(\lambda f^2\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\Big)^2+\nu\Big(\frac{f-1}{a^2}+\frac{f}{a\beta}\Big)\Big)$$
$$+\mu'(1-f)\Big(\lambda'(1-f)^2\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\Big)^2+\nu'\Big(\frac{1-f}{a\beta}-\frac{f}{\beta^2}\Big)\Big)=\mu^0\Big(\lambda^0\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\Big)^2+\frac{\nu^0}{a\beta}\Big)$$

quae ita repraesentari potest

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\Big)^2\Big(\mu\lambda f^3+\mu'\lambda'(1-f)^3\Big)+\Big(\frac{f-1}{a}+\frac{f}{\beta}\Big)\Big(\frac{\mu\nu f}{a}-\frac{\mu'\nu'(1-f)}{\beta}\Big)$$
$$=\mu^0\lambda^0\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\Big)^2+\frac{\nu^0\mu^0}{a\beta}.$$

Unde

$$\lambda^0=\frac{\mu\lambda f^3+\mu'\lambda'(1-f)^3}{\mu^0}+\frac{aa\beta\beta}{\mu^0(a+\beta)^2}\Big(\Big(\frac{f-1}{a}+\frac{f}{\beta}\Big)\Big(\frac{\mu\nu f}{a}-\frac{\mu'\nu'(1-f)}{\beta}\Big)-\frac{\nu^0\mu^0}{a\beta}\Big).$$

Denique si ex ratione refractionis $n':1$ computentur numeri ϱ', σ' et τ', radii facierum lentis duplicatae erunt

pro lente

$$PP \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{a\beta}{(\varrho-\sigma(1-f))\beta+\sigma f a\pm\tau f(a+\beta)\sqrt{(\lambda-1)}} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\beta}{(\sigma-\varrho(1-f))\beta+\varrho f a\mp\tau f(a+\beta)\sqrt{(\lambda-1)}} \end{cases}$$

$$QQ \text{ radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{a\beta}{(\sigma'-\varrho' f)a+\varrho'(1-f)\beta\pm\tau'(1-f)(a+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\beta}{(\varrho'-\sigma' f)a+\sigma'(1-f)\beta\mp\tau'(1-f)(a+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}}. \end{cases}$$

AD PROBLEMA 3

Hoc problema non solum pro diversa refractione n et n' hic generalius pertractabo, sed etiam rationem distantiae inter binas lentes habebo. Primum

igitur utramque lentem ad distantias determinatrices lentis duplicatae, a et β, revocabo, ponendo

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}=g\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)$$

ut sit

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{f-1}{a}+\frac{f}{\beta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{b}=\frac{g}{a}+\frac{g-1}{\beta}$$

hincque

$$\alpha=\frac{a\beta}{fa+(f-1)\beta} \quad \text{et} \quad b=\frac{a\beta}{(g-1)a+g\beta}$$

ideoque distantia lentium

$$\alpha+b=\frac{a\beta(f+g-1)(a+\beta)}{(fa+(f-1)\beta)((g-1)a+g\beta)},$$

quae si deberet esse $=0$, capi oporteret $g=1-f$; sed si distantiam aliquam inter lentes admittamus, statuamus $f+g-1=\omega$, denotante ω fractionem quandam minimam, sive positivam sive negativam, ut distantia lentium prodeat positiva et valde parva. Cum hinc igitur sit $g=1+\omega-f$, erit lentium distantia

$$\alpha+b=\frac{a\beta(a+\beta)\omega}{(fa+(f-1)\beta)((\omega-f)a+(1+\omega-f)\beta)}.$$

Spatium autem diffusionis nunc ita exprimetur:

$$\beta\beta xx\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\begin{Bmatrix}+\lambda\mu f^3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\lambda'\mu' g^3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2\\ +\frac{\mu\nu f}{a}\left(\frac{f-1}{a}+\frac{f}{\beta}\right)+\frac{\mu'\nu' g}{\beta}\left(\frac{g}{a}+\frac{g-1}{\beta}\right)\end{Bmatrix}$$

quae cum in hoc problemate ita tractari debeat, ut tam f quam g positive sumantur et haec formula minima reddatur, evidens est litteris λ et λ' minimos valores tribui debere, scilicet $\lambda=1$ et $\lambda'=1$; deinde pro hoc casu minimi f et g convenienter definiantur, ubi, quia $f+g-1=\omega$ ideoque constans in differentiatione, habebimus $dg=-df$; unde obtinebimus hanc aequationem

$$(3\mu f^2-3\mu' g^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\mu\nu}{a}\left(\frac{2f-1}{a}+\frac{2f}{\beta}\right)-\frac{\mu'\nu'}{\beta}\left(\frac{2g}{a}+\frac{2g-1}{\beta}\right)=0,$$

cui proxime satisfit ponendo $f=g=\frac{1+\omega}{2}$, quibus valoribus substitutis spatium

diffusionis ipsum minimum erit proxime

$$\frac{\beta^2 x^2(1+\omega)}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2(1+\omega)^2(\mu+\mu') \\ +\frac{2\mu\nu}{a}\left(\frac{\omega-1}{a}+\frac{1+\omega}{\beta}\right)\quad+\frac{2\mu'\nu'}{\beta}\left(\frac{1+\omega}{a}+\frac{\omega-1}{\beta}\right)\end{array}\right\}$$

Tum vero distantia lentium erit

$$\alpha+b=\frac{4a\beta(a+\beta)\omega}{((1+\omega)a+(\omega-1)\beta)((\omega-1)a+(1+\omega)\beta)}=\frac{4a\beta(a+\beta)\omega}{-(1-\omega^2)(a^2+\beta^2)+2(1+\omega^2)a\beta},$$

cuius denominator cum sit negativus ob ω minimum, necesse est fractionem ω sumi debere negativam; hincque adeo spatium diffusionis minus reddetur.

COROLLARIUM

Si ergo distantia obiecti a fuerit infinita seu $a=\infty$, habebitur primo distantia lentium $=\frac{-4\beta\omega}{1-\omega^2}$ et secundo spatium diffusionis

$$\frac{x^2(1+\omega)}{8\beta}\left((1+\omega)^2(\mu+\mu')-2\mu'\nu'(1-\omega)\right)$$

quod, cum ω debeat esse negativum, non mediocriter minus erit, quam si distantia lentium esset nulla.

AD PROBLEMA 4

In hoc problemate etiam distantiam lentium non negligamus; factaque reductione, ut ante, statuamus spatium diffusionis plane evanescens; id quod fieri nequit, nisi altera litterarum f et g sit negativa, quod cum etiam fiat, quando confusio a diversa radiorum refrangibilitate oriunda ad nihilum redigi debet, ut infra videbimus; hic casus multo magis evolutionem meretur. Ponatur igitur $g=-\zeta f$, ubi ζ ex illa conditione determinatur, ut primo pro distantia lentium sit

$$\alpha+b=\frac{-a\beta(a+\beta)(f-\zeta f-1)}{(fa+(f-1)\beta)((\zeta f+1)a+\zeta f\beta)},$$

et posito $f+g-1=\omega$ prodeat $f-\zeta f=1+\omega$ ideoque

$$f=\frac{1+\omega}{1-\zeta}\quad\text{et}\quad g=\frac{-\zeta(1+\omega)}{1-\zeta}$$

sicque

$$\alpha + b = \frac{-a\beta(a+\beta)\omega(1-\zeta)^2}{((1+\omega)a+(\omega+\zeta)\beta)((1+\omega\zeta)a+\zeta(1+\omega)\beta)},$$

ac si in denominatore ω reiiciatur, erit

$$\alpha + b = \frac{-a\beta(a+\beta)(1-\zeta)^2\omega}{(a+\zeta\beta)^2}$$

sicque patet ω negative capi debere.

Posito autem $g = -\zeta f$ fit spatium diffusionis

$$\beta^2 x^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left\{\begin{array}{c}(\lambda\mu f^3 - \lambda'\mu'\zeta^3 f^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2 \\ +\frac{\mu\nu f}{a}\left(\frac{f-1}{a}+\frac{f}{\beta}\right)-\frac{\mu'\nu'\zeta f}{\beta}\left(\frac{-\zeta f}{a}-\frac{(\zeta f+1)}{\beta}\right)\end{array}\right\}$$

ad nihilum redigendum; unde sequitur fore

$$\lambda' = \frac{\lambda\mu}{\mu'\zeta^3} + \frac{\mu\nu\cdot a\cdot\beta^2}{\mu'\zeta^3 f^2(a+\beta)^2}\left(\frac{f-1}{a}+\frac{f}{\beta}\right) + \frac{\nu'\cdot a^2\beta}{\zeta^2 f^2\cdot(a+\beta)^2}\left(+\frac{\zeta f}{a}+\frac{\zeta f+1}{\beta}\right)$$

qui valor cum debeat esse maior unitate, si forte eveniat, ut minor prodeat, tunc non λ' sed λ definiri conveniet, ubi notandum est esse $f = \frac{1+\omega}{1-\zeta}$. Hincque per formulas ante datas facile eruuntur radii facierum utriusque lentis.

Etsi formula superius data pro spatio diffusionis iam ad casum, quo distantia lentium est nulla, est adcommodata, tamen, quia hic distantiam minimam assumimus, nullus inde error est metuendus.[1])

DEFINITIO 2

122. *Lens triplicata est, quae consistit ex tribus lentibus simplicibus sibi immediate iunctis ad communem axem.*

Hic quidem etiam crassitiem negligo, etiamsi necessario maior sit quam in lentibus duplicatis. In supplemento autem ostendetur, quomodo etiam distantiarum inter lentes ratio sit habenda.

COROLLARIUM

123. Potest ergo lens triplicata considerari quasi composita ex lente duplicata et lente simplici, hocque duplici modo, prout vel binae anteriores vel binae posteriores lentem duplicatam constituere concipiuntur.

1) Finis supplementi I. E. Ch.

reducetur id ad hanc formam

$$Hh = \mu\gamma\gamma xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\left(\lambda f^3+\lambda' g^3+\lambda'' h^3-\nu(1-f)(1-g)(1-h)\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)^2+\frac{\nu}{a\gamma}\right).$$

Radiorum autem in h concurrentium inclinatio ad axem erit $=\frac{x}{\gamma}$.

COROLLARIUM 1

126. Haec igitur lens triplicata idem producit spatium diffusionis, quod produceret lens simplex ad easdem distantias determinatrices instructa, numero eius arbitrario (per litteram $\lambda^{(3)}$ indicato) existente

$$\lambda f^3+\lambda' g^3+\lambda'' h^3-\nu(1-f)(1-g)(1-h),$$

ubi quidem est $f+g+h=1$.

COROLLARIUM 2

127. Quatenus ergo haec quantitas reddi potest minor non solum unitate, sed etiam fractione 0,191827, ita scilicet, ut praxis non enormi aberrationi sit exposita, eatenus lentibus triplicatis usus erit concedendus.

COROLLARIUM 3

128. Si sit vel $f=0$, vel $g=0$, vel $h=0$, una lentium habebit facies parallelas, et lens triplicata aequivalebit duplicatae; ac si duae litterarum f, g, h simul evanescant, tertia in unitatem abeunte, casus habebitur lentis simplicis.

COROLLARIUM 4

129. Si sit $f=1$ ideoque $h=-g$, valor numeri λ pro lente triplicata simplici aequivalebit, quod idem evenit, si fuerit vel $g=1$ vel $h=1$.

COROLLARIUM 5

130. Sumtis autem pro f, g, h numeris idoneis ob $f+g+h=1$, constructio lentis triplicatae ex formulis § 91 exhibitis est petenda sumendo:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{-1+f}{a}+\frac{f}{\gamma},\quad \frac{1}{b}=\frac{1-f}{a}-\frac{f}{\gamma},\quad \frac{1}{\beta}=\frac{-h}{a}+\frac{1-h}{\gamma},\quad \frac{1}{c}=\frac{h}{a}-\frac{1-h}{\gamma}.$$

SCHOLION 1

131. Quemadmodum hinc expressio inventa prodeat, notandum est fore

$$\frac{f}{a\alpha}+\frac{g}{b\beta}+\frac{h}{c\gamma}=\begin{cases}+\frac{1}{aa}(-f(1-f)-gh(1-f))\\[2mm] +\frac{1}{a\gamma}(+ff+g(1-f)(1-h)+fgh+hh)\\[2mm] +\frac{1}{\gamma\gamma}(-fg(1-h)-h(1-h))\end{cases}$$

Sed $-f(1-f)-gh(1-f)=-(1-f)(f+gh)=-(1-f)(1-g)(1-h)$ ob $f=1-g-h$ ideoque $f+gh=(1-g)(1-h)$. Simili modo pro $\frac{1}{\gamma\gamma}$ est $-fg(1-h)-h(1-h)=-(1-h)(h+fg)=-(1-f)(1-g)(1-h)$ ob $h=1-f-g$. Denique pro $\frac{1}{\alpha\gamma}$, quia est

$$ff+hh=(f+h)^2-2fh=(1-g)^2-2fh=1-2g+gg-2fh,$$

hoc valore substituto coefficiens ipsius $\frac{1}{\alpha\gamma}$ erit

$$\begin{aligned}&1-2g-2fh+gg+fgh+g(1-f)(1-h)\\ &=1+(g+fh)(g-2)+g(1-f)(1-h)=1-2(1-f)(1-g)(1-h)\end{aligned}$$

ob $g+fh=(1-f)(1-h)$.

Consequenter colligitur

$$\frac{f}{a\alpha}+\frac{g}{b\beta}+\frac{h}{c\gamma}=-(1-f)(1-g)(1-h)\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\Big)^2+\frac{1}{\alpha\gamma}.$$

SCHOLION 2

132. Hoc problema etiam ope praecedentium facilius sequenti modo resolvi potest. Considerentur scilicet binae lentes PP et QQ iunctim sumtae tanquam lens duplicata ad distantias determinatrices α et β per numeros arbitrarios λ, λ' et f instructa, ac posito $\lambda f^3+\lambda'(1-f)^3-\nu f(1-f)=\lambda^{(2)}$ spatium diffusionis ex ea sola ortum erit

$$\mu\beta\beta xx\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\Big)\Big(\lambda^{(2)}\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\Big)^2+\frac{\nu}{\alpha\beta}\Big)$$

quae lens si iam in compositione cum tertia RR tanquam simplex tractetur,

11*

exinde elicitur spatium diffusionis perinde atque ex coniunctione duarum simplicium

$$Hh = \mu\gamma\gamma xx\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda^{(2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu}{a\beta}\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda''\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)^2+\frac{\nu}{c\gamma}\right)\right)$$

ubi notandum est esse $\beta + c = 0$, et constructio lentis duplicatae ex § 107 erit petenda, lentis vero simplicis RR ex distantiis determinatricibus $c = -\beta$ et γ una cum numero arbitrario λ''. Ponatur iam $\frac{1}{\beta} = \frac{g-1}{a} + \frac{g}{\gamma}$, ut sit $\frac{1}{c} = \frac{1-g}{a} - \frac{g}{\gamma}$, eritque spatium diffusionis huius lentis triplicatae

$$Hh = \mu\gamma\gamma xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\left(\lambda^{(2)}g^3+\lambda''(1-g)^3-\nu g(1-g)\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)^2+\frac{\nu}{a\gamma}\right).$$

Quare si pro lente triplicata ponatur

$$\lambda^{(2)}g^3+\lambda''(1-g)^3-\nu g(1-g)=\lambda^{(3)},$$

ita ut iam numerus g insuper arbitrio nostro relinquatur, habebitur spatium diffusionis more hactenus recepto expressum

$$Hh = \mu\gamma\gamma xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda^{(3)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)^2+\frac{\nu}{a\gamma}\right).$$

Hinc iam id intelligitur, quod ex praecedente solutione minus patet: si numerus $\lambda^{(2)}$ fuerit unitate maior, loco binarum priorum lentium PP et QQ commodius unicam simplicem adhiberi; ex quo eatenus tantum lentes triplicatae resultare censendae sunt, quatenus numerus $\lambda^{(2)}$ unitate est minor. Vidimus autem successum tuto sperari non posse, nisi $\lambda^{(2)}$ aequalis sit fractioni 0,191827 vel ea non multo maior; unde si praxi consulere velimus, ipsi $\lambda^{(2)}$ minorem valorem tribui non convenit, atque ob eandem rationem numerus g intra terminos 0 et 1 accipi debebit; cuius valor imprimis ad praxin erit accommodatus, si reddat numerum $\lambda^{(3)}$ minimum, quia tum leves errores negotium minime turbant. Quodsi vero pro $\lambda^{(2)}$ valorem assignatum substituamus, obtinebimus

$$\lambda^{(3)} = \lambda f^3g^3+\lambda' g^3(1-f)^3+\lambda''(1-g)^3-\nu g^3 f(1-f)-\nu g(1-g).$$

Conducet autem utramque expressionem pro numero $\lambda^{(3)}$, quo spatium diffusionis a lente triplicata ortum definitur, hic exposuisse, cum aliae conclusiones ex altera facilius deducantur. Etsi autem hinc omnes valores pro $\lambda^{(3)}$ obtineri possunt, tamen eos tantum, qui prope minimum subsistunt, ad praxin adhiberi conveniet.

PROBLEMA 6

133. *Datis distantiis determinatricibus* $AE = a$ (Fig. 8, p. 80) *et* $cH = \gamma$, *definire eam lentem triplicatam, quae minimum spatium diffusionis producat.*

SOLUTIO I

Duplici modo hoc problema solvi potest, prout spatium diffusionis vel ita exprimitur uti in solutione problematis praecedentis, vel in scholio 2. Priori modo numeros f, g, h ita determinari oportet, ut minima reddatur haec expressio:

$$\lambda f^3 + \lambda' g^3 + \lambda'' h^3 - \nu(1-f)(1-g)(1-h),$$

ubi notandum est esse $f + g + h = 1$. Eius ergo differentiali nihilo aequali posito habebimus:

$$3\lambda ffdf + 3\lambda' ggdg + 3\lambda'' hhdh + \nu df(1-g)(1-h) + \nu dg(1-f)(1-h) + \nu dh(1-f)(1-g) = 0.$$

Cum autem sit $dh = -df - dg$, erit

$$\left.\begin{array}{l} +3\lambda ffdf - 3\lambda'' hhdf + \nu df(1-g)(f-h) \\ +3\lambda' ggdg - 3\lambda'' hhdg + \nu dg(1-f)(g-h) \end{array}\right\} = 0;$$

quia vero bina differentialia df et dg a se invicem non pendent, ambo membra huius aequationis seorsim evanescere debent, unde ob $1 - g = f + h$ et $1 - f = g + h$ has duas nanciscimur aequationes:

$$3\lambda ff - 3\lambda'' hh + \nu ff - \nu hh = 0, \quad 3\lambda' gg - 3\lambda'' hh + \nu gg - \nu hh = 0,$$

ex quibus elicimus

$$f = h\sqrt{\frac{3\lambda'' + \nu}{3\lambda + \nu}} \quad \text{et} \quad g = h\sqrt{\frac{3\lambda'' + \nu}{3\lambda' + \nu}}.$$

Cum autem sit $f + g + h = 1$ seu $\frac{1}{h} = 1 + \frac{f}{h} + \frac{g}{h}$, erit

$$\frac{1}{h} = 1 + \sqrt{\frac{3\lambda'' + \nu}{3\lambda + \nu}} + \sqrt{\frac{3\lambda'' + \nu}{3\lambda' + \nu}}$$

$$\frac{1}{g} = 1 + \sqrt{\frac{3\lambda' + \nu}{3\lambda + \nu}} + \sqrt{\frac{3\lambda' + \nu}{3\lambda'' + \nu}}$$

$$\frac{1}{f} = 1 + \sqrt{\frac{3\lambda + \nu}{3\lambda' + \nu}} + \sqrt{\frac{3\lambda + \nu}{3\lambda'' + \nu}}.$$

Quicunque ergo numeri $\lambda, \lambda', \lambda''$ in constructione singularum lentium fuerint

usurpati, hinc numeri f, g et h determinantur, ex quibus spatium diffusionis minimum resultet. Pro lentium autem constructione hinc distantiae α, b, β, c ita definiuntur, ut sit

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{-1+f}{a}+\frac{f}{\gamma},\quad \frac{1}{b}=\frac{1-f}{a}-\frac{f}{\gamma},\quad \frac{1}{\beta}=\frac{-h}{a}+\frac{1-h}{\gamma},\quad \frac{1}{c}=\frac{h}{a}-\frac{1-h}{\gamma};$$

est vero

$$f=\frac{\sqrt{(3\lambda'+\nu)(3\lambda''+\nu)}}{\sqrt{(3\lambda+\nu)(3\lambda'+\nu)}+\sqrt{(3\lambda+\nu)(3\lambda''+\nu)}+\sqrt{(3\lambda'+\nu)(3\lambda''+\nu)}}$$

$$g=\frac{\sqrt{(3\lambda+\nu)(3\lambda''+\nu)}}{\sqrt{(3\lambda+\nu)(3\lambda'+\nu)}+\sqrt{(3\lambda+\nu)(3\lambda''+\nu)}+\sqrt{(3\lambda'+\nu)(3\lambda''+\nu)}}$$

$$h=\frac{\sqrt{(3\lambda+\nu)(3\lambda'+\nu)}}{\sqrt{(3\lambda+\nu)(3\lambda'+\nu)}+\sqrt{(3\lambda+\nu)(3\lambda''+\nu)}+\sqrt{(3\lambda'+\nu)(3\lambda''+\nu)}}.$$

Ex distantiis autem a, α, b, β, c, γ cum numeris λ, λ', λ'' lentes ipsae per formulas § 91 exhibitas construuntur.

COROLLARIUM 1

134. Si pro hac lente triplicata ponatur

$$\lambda f^3+\lambda' g^3+\lambda'' h^3-\nu(1-f)(1-g)(1-h)=\lambda^{(3)},$$

substituendis his valoribus pro f, g et h reperietur

$$\lambda^{(3)}=\frac{1}{3\left(\frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}\right)^2}-\frac{1}{3}\nu,$$

unde spatium diffusionis fit

$$Hh=\mu\gamma\gamma xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda^{(3)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)^2+\frac{\nu}{a\gamma}\right).$$

COROLLARIUM 2

135. Hoc autem spatium diffusionis omnium fiet minimum, si numeris λ, λ', λ'' minimi valores, quos accipere possunt, tribuantur. Sit ergo $\lambda=1$, $\lambda'=1$, $\lambda''=1$, eritque

$$f=\frac{1}{3},\qquad g=\frac{1}{3},\qquad h=\frac{1}{3}$$

$$\text{et}\quad \lambda^{(3)}=\frac{\nu+3}{27}-\frac{\nu}{3}=\frac{3-8\nu}{27}=0{,}042165$$

ob $\nu=0{,}232692$; qui ergo valor multo est minor quam casu lentium duplicatarum.

COROLLARIUM 3

136. Hoc porro casu erit

$$\frac{1}{\alpha}=-\frac{2}{3a}+\frac{1}{3\gamma},\quad \frac{1}{b}=\frac{2}{3a}-\frac{1}{3\gamma},\quad \frac{1}{\beta}=\frac{-1}{3a}+\frac{2}{3\gamma}\quad \text{et}\quad \frac{1}{c}=\frac{1}{3a}-\frac{2}{3\gamma},$$

unde constructio lentium ternarum simplicium ita se habebit:

$$\text{Pro lente prima}\quad \text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{3a\gamma}{(3\varrho-2\sigma)\gamma+\sigma a}\\[2ex] \text{posterioris} &= \dfrac{3a\gamma}{(3\sigma-2\varrho)\gamma+\varrho a}\end{cases}$$

$$\text{pro lente secunda}\quad \text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{3a\gamma}{(2\varrho-\sigma)\gamma+(2\sigma-\varrho)a}\\[2ex] \text{posterioris} &= \dfrac{3a\gamma}{(2\sigma-\varrho)\gamma+(2\varrho-\sigma)a}\end{cases}$$

$$\text{pro lente tertia}\quad \text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{3a\gamma}{\varrho\gamma+(3\sigma-2\varrho)a}\\[2ex] \text{posterioris} &= \dfrac{3a\gamma}{\sigma\gamma+(3\varrho-2\sigma)a}.\end{cases}$$

SOLUTIO ALTERA PROBLEMATIS

137. Consideremus binas lentes priores PP et QQ ut lentem duplicatam ad distantias determinatrices a et β ita instructam, ut posito

$$\lambda f^3+\lambda'(1-f)^3-\nu f(1-f)=\lambda^{(2)}$$

spatium diffusionis inde oriundum sit

$$=\mu\beta\beta xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda^{(2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu}{a\beta}\right).$$

Sed pro constructione binarum lentium simplicium, ex quibus haec lens est composita, recordandum est esse

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{-1+f}{a}+\frac{f}{\beta}\quad \text{et}\quad \frac{1}{b}=\frac{1-f}{a}-\frac{f}{\beta}.$$

Adiuncta iam tertia lente RR ad distantias determinatrices $c=-\beta$ et γ per numerum arbitrarium λ'' instructa, si ponamus $\frac{1}{\beta}=\frac{-1+g}{a}+\frac{g}{\gamma}=-\frac{1}{c}$ et

$$\lambda^{(2)}g^3+\lambda''(1-g)^3-\nu g(1-g)=\lambda^{(3)},$$

erit spatium diffusionis

$$Hh = \mu\gamma\gamma xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda^{(3)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)^2+\frac{\nu}{a\gamma}\right)$$

quod ut fiat minimum, valor ipsius $\lambda^{(3)}$ minimus reddi debet; quaeratur ergo primo g, dum $\lambda^{(2)}$ ut numerus datus spectatur, et habebimus

$$3\lambda^{(2)}gg - 3\lambda''(1-g)^2 - \nu + 2\nu g = 0,$$

unde elicitur

$$g = \frac{-3\lambda'' - \nu + \sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)(3\lambda''+\nu)}}{3\lambda^{(2)} - 3\lambda''} \quad \text{sive} \quad g = \frac{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}{\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}+\sqrt{(3\lambda''+\nu)}},$$

et hinc valor ipsius $\lambda^{(3)}$ erit

$$\lambda^{(3)} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}\right)^2} - \frac{1}{3}\nu$$

vel

$$\frac{1}{3\lambda^{(3)}+\nu} = \left(\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}\right)^2.$$

Sicque fit:

$$\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(3)}+\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}.$$

Simili modo si f ita definiatur, ut $\lambda^{(2)}$ fiat minimum, reperietur:

$$f = \frac{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}+\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}$$

hocque valore substituto

$$\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}.$$

Quare si numeris λ, λ', λ'' arbitrio nostro relictis bini numeri f et g ita definiantur, ut $\lambda^{(3)}$ consequatur valorem minimum, erit

$$\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(3)}+\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}},$$

unde idem valor pro $\lambda^{(3)}$ reperitur, quem ante invenimus.

sumi $g+\omega$, et cum λ'' ex g rite fuerit definitum, fiet

$$\lambda^{(3)}=\omega\left(\tfrac{3}{4}gg-3\lambda''(1-g)^2-\nu\left(1-\tfrac{1}{2}g\right)\left(1-\tfrac{3}{2}g\right)\right)$$

et pro λ'' substituto valore:

$$\lambda^{(3)}=\frac{\omega}{4(1-g)}(3gg-\nu(4-gg)),$$

unde patet, quo minus g unitatem excedat, ac simul quo maius fuerit g, valorem ipsius $\lambda^{(3)}$ ob errorem ω eo fieri maiorem. Intelligitur autem hunc errorem fieri minimum, si capiatur $g=1+\sqrt{\frac{3-3\nu}{\nu+3}}$; ex hoc autem valore elicitur

$$\lambda''=\frac{(3+\nu)\sqrt{3(1-\nu)(3+\nu)}+3(3+\nu\nu)}{9(1-\nu)}.$$

Capi ergo debebit $g=1{,}84384$, unde colligitur:

$$\lambda''=\frac{g^3-\nu g(2-g)^2}{4(g-1)^3}=2{,}60372,$$

et si hae mensurae exacte observentur, fiet $\lambda^{(3)}=0$. At si in valore ipsius g particula ω aberretur, ut sit $g=1{,}84384+\omega$, prodibit ob hunc errorem:

$$\lambda^{(3)}=-2{,}981\,\omega;$$

ita si esset error $\omega=\pm\frac{1}{10}$, loco $\lambda^{(3)}=0$ prodiret: $\lambda^{(3)}=\mp 0{,}2981$, ideoque lens triplicata, postponenda duplicatae, longe tamen praeferenda foret simplici.

In genere igitur pro quovis valore alio ipsius $\lambda^{(2)}$ idem commodum investigemus: ac primo cum sit

$$\lambda''=\frac{\lambda^{(2)}g^3+\nu g(g-1)}{(g-1)^3},$$

si loco iusti valoris g capiatur $g+\omega$, fiet

$$\lambda^{(3)}=\omega(3\lambda^{(2)}g^2-3\lambda''(g-1)^2-\nu+2\nu g),$$

ubi si pro λ'' valor substituatur, erit

$$\lambda^{(3)}=\frac{\omega(\nu-(3\lambda^{(2)}+\nu)gg)}{g-1},$$

qui error ut minimus reddatur, capi debet

$$g=1+\sqrt{\frac{3\lambda^{(2)}}{3\lambda^{(2)}+\nu}},$$

COROLLARIUM 1

138. Ex hac ergo solutione numeri f et g ita definiuntur, ut sit

$$\frac{1}{f\sqrt{(3\lambda+\nu)}}=\frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}$$

et

$$\frac{1}{g\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}}=\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}$$

sive hoc modo

$$\left(\frac{1}{f}-1\right)\frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}}=\frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{g}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}\right)=\frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}.$$

COROLLARIUM 2

139. Ex inventis minimis valoribus numerorum $\lambda^{(2)}$ et $\lambda^{(3)}$ numeri f et g etiam ita definiuntur, ut sit

$$\frac{1}{f\sqrt{(3\lambda+\nu)}}=\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}} \quad \text{seu} \quad f=\sqrt{\left(\frac{3\lambda^{(2)}+\nu}{3\lambda+\nu}\right)}$$

et

$$\frac{1}{g\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}}=\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(3)}+\nu)}} \quad \text{seu} \quad g=\sqrt{\left(\frac{3\lambda^{(3)}+\nu}{3\lambda^{(2)}+\nu}\right)}.$$

COROLLARIUM 3

140. Distantiae autem determinatrices singularum lentium ita per a et γ prodibunt expressae:

$$\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{b}=\frac{-1+fg}{a}+\frac{fg}{\gamma}, \qquad \frac{1}{\beta}=-\frac{1}{c}=\frac{-1+g}{a}+\frac{g}{\gamma},$$

ubi cum sit

$$g=\sqrt{\frac{3\lambda^{(3)}+\nu}{3\lambda^{(2)}+\nu}}, \quad \text{notandum est esse} \quad fg=\sqrt{\frac{3\lambda^{(3)}+\nu}{3\lambda+\nu}}.$$

COROLLARIUM 4

141. Eliminando autem numero $\lambda^{(2)}$ erit

$$\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{b}=-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3\lambda^{(3)}+\nu}{3\lambda'+\nu}}-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3\lambda^{(3)}+\nu}{3\lambda''+\nu}}+\frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{3\lambda^{(3)}+\nu}{3\lambda+\nu}}$$

$$\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{c}=-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3\lambda^{(3)}+\nu}{3\lambda''+\nu}}+\frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{3\lambda^{(3)}+\nu}{3\lambda+\nu}}+\frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{3\lambda^{(3)}+\nu}{3\lambda'+\nu}}$$

ex quibus formulis invento iam valore minimo $\lambda^{(3)}$ singulae lentes commodissime determinantur.

COROLLARIUM 5

142. Si praeterea singulae lentes ita fuerint comparatae, ut per se minimam confusionem pariant, quod fit, si $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 1$, erit

$$\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(2)} + \nu)}} = \frac{2}{\sqrt{(3+\nu)}} \text{ hincque } 3\lambda^{(2)} + \nu = \frac{3+\nu}{4}, \text{ unde fit } \lambda^{(2)} = \frac{1-\nu}{4}.$$

Deinde vero habebitur:

$$\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(3)} + \nu)}} = \frac{3}{\sqrt{(3+\nu)}} \text{ hincque } 3\lambda^{(3)} + \nu = \frac{3+\nu}{9} \text{ ac propterea } \lambda^{(3)} = \frac{3-8\nu}{27}.$$

Sin autem fuerit tantum $\lambda = \lambda' = \lambda''$, reperietur $\lambda^{(2)} = \frac{3\lambda - 3\nu}{12}$ et $\lambda^{(3)} = \frac{3\lambda - 8\nu}{27}$.

COROLLARIUM 6

143. Eodem autem casu, quo $\lambda = \lambda' = \lambda''$, ob $\sqrt{(3\lambda^{(3)} + \nu)} = \frac{1}{3}\sqrt{(3\lambda + \nu)}$ distantiae determinatrices pro lentibus simplicibus erunt:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{-2}{3a} + \frac{1}{3\gamma}, \quad \frac{1}{b} = \frac{2}{3a} - \frac{1}{3\gamma}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{-1}{3a} + \frac{2}{3\gamma}, \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{3a} - \frac{2}{3\gamma},$$

unde eaedem formulae pro earum constructione nascuntur, quae supra (§ 136) sunt allatae, nisi quod iam in denominatoribus membra $\pm \tau(a+\gamma)\sqrt{(\lambda - 1)}$ adiungi debeant.

SCHOLION

144. Ternarum ergo lentium simplicium idonea coniunctione effici potest, ut in expressione spatii diffusionis

$$Hh = \mu\gamma\gamma x x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda^{(3)}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 + \frac{\nu}{a\gamma}\right)$$

numerus $\lambda^{(3)}$ fiat $= 0{,}042165$. In lentibus autem duplicatis vidimus minimum valorem numeri $\lambda^{(2)}$ esse $= 0{,}191827$: sicque in triplicatis hic numerus fere quinquies minor reddi potest; at is fere vicies quater est minor, quam per lentes simplices obtineri potest. Loquor hic autem de lentibus ex principio minimi petitis, quippe quae ad praxin maxime sunt accommodatae, dum constructio levibus erroribus non admodum turbatur. Quanquam enim lentes triplicatae perinde ac duplicatae parari possent, pro quibus numerus conveniens λ non solum nihilo aequalis, sed etiam negativus resultaret, tamen

earum constructio tam est lubrica, ut minimus error totum laborem irritum reddat. Interim tamen periculum in triplicatis non tantum est quam duplicatis, unde sequens problema solvisse opera erit pretium.

PROBLEMA 7

145. *Pro datis distantiis determinatricibus a et γ eas definire lentes triplicatas, pro quibus valor ipsius $\lambda^{(3)}$ prorsus in nihilum abeat.*

SOLUTIO

Consideretur numerus $\lambda^{(2)}$ ex duabus prioribus lentibus natus ut datus, et cum sit secundum solutionem posteriorem praecedentis problematis

$$\lambda^{(3)} = \lambda^{(2)} g^3 + \lambda''(1-g)^3 - \nu g(1-g),$$

definiri debet g ita, ut ista quantitas evanescat. Verum cum $\lambda^{(2)}$ commode nequeat minor effici quam $\frac{1-\nu}{4}$, statuamus $\lambda^{(2)} = \frac{1-\nu}{4}$, fierique oportet:

$$0 = \tfrac{1}{4} g^3 + \lambda''(1-g)^3 - \nu g\left(1 - \tfrac{1}{2} g\right)^2;$$

sed quia λ'' unitate minor esse nequit, necesse est, ut g capiatur unitate maior; evolvantur ergo quidam casus

$$\begin{array}{lllll}
\text{I.} & g = \frac{5}{4}; & 0 = \frac{125}{4\cdot 64} - \frac{\lambda''}{64} - \frac{5\cdot 9}{4{,}64}\nu & \text{et} & \lambda'' = \frac{125 - 45\nu}{4} \\[2mm]
\text{II.} & g = \frac{6}{4}; & 0 = \frac{216}{4\cdot 64} - \frac{8\lambda''}{64} - \frac{6\cdot 4}{4\cdot 64}\nu & \text{et} & \lambda'' = \frac{216 - 24\nu}{4\cdot 8} = \frac{27 - 3\nu}{4} \\[2mm]
\text{III.} & g = \frac{7}{5}; & 0 = \frac{343}{4\cdot 64} - \frac{27\lambda''}{64} - \frac{7\cdot 1}{4\cdot 64}\nu & \text{et} & \lambda'' = \frac{343 - 7\nu}{4\cdot 27} \\[2mm]
\text{IV.} & g = \frac{8}{4}; & 0 = \frac{512}{4\cdot 64} - \frac{64\lambda''}{64} & \text{et} & \lambda'' = 2 \\[2mm]
\text{V.} & g = \frac{9}{4}; & 0 = \frac{729}{4\cdot 64} - \frac{125\lambda''}{64} - \frac{9\cdot 1}{4\cdot 64}\nu & \text{et} & \lambda'' = \frac{729 - 9\nu}{4\cdot 125} \\[2mm]
\text{VI.} & g = \frac{10}{4}; & 0 = \frac{1000}{4\cdot 64} - \frac{216\lambda''}{64} - \frac{10\cdot 4}{4\cdot 64}\nu & \text{et} & \lambda'' = \frac{1000 - 40\nu}{4\cdot 216} = \frac{125 - 5\nu}{4\cdot 27}.
\end{array}$$

In primo et secundo casu fit valor ipsius λ'' nimis magnus, quam ut ista lens commode in praxin recipi queat; ac si ipsi g multo maior tribuatur valor, levis error ingentem effectum producit. Ponamus enim loco g per errorem

COROLLARIUM 3

148. Nempe pro hac altera lente triplicata lens prima PP construi debet ex distantiis determinatricibus a et $\frac{+a\gamma}{(1-g)a-g\gamma}$ cum numero $\lambda = 2{,}60372$.

Lens secunda QQ ex distantiis determinatricibus $\frac{-a\gamma}{(1-g)a-g\gamma}$ et $\frac{+2a\gamma}{(2-g)a-g\gamma}$ cum numero $\lambda' = 1$.

At lens tertia ex distantiis determinatricibus $\frac{-2a\gamma}{(2-g)a-g\gamma}$ et γ cum numero $\lambda'' = 1$, existente ut ante $g = 1{,}84384$.

COROLLARIUM 4

149. Hinc ergo duas nacti sumus lentes triplicatas pro distantiis a et γ, quae producunt spatium diffusionis $Hh = \mu\gamma\gamma xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)\frac{v}{a\gamma}$. Atque hae inter infinitas alias eundem effectum praestantes hac gaudent praerogativa, ut levis error in constructione commissus scopum minime perturbet.

COROLLARIUM 5

150. Si in constructione harum lentium per errorem numerus g parumper maior accipiatur quam 1,84384, tum pro lente triplicata numerus $\lambda^{(3)}$ prodit nihilo minor seu negativus. Sin autem numerus g in praxi aliquantillum minor sumatur, numerus $\lambda^{(3)}$ fit nihilo maior, sicque lens triplicata ad naturam duplicatarum accedet.

COROLLARIUM 6

151. Si ergo opus fuerit lente, pro qua numerus λ valorem habeat negativum, huic scopo satisfieri commode poterit per lentes descriptas triplicatas, dummodo pro g numerus aliquanto maior quam 1,84384 assumatur. Scilicet si sumatur

$$g = 1{,}84384 + \omega, \quad \text{fiet} \quad \lambda^{(3)} = -2{,}981\,\omega.$$

SUPPLEMENTUM II[1])

DE LENTIBUS TRIPLICATIS

Si pro singulis lentibus refractio sit diversa, pro prima $n:1$, pro secunda $n':1$, pro tertia $n'':1$, radiique facierum lentium sequenti modo definiantur:

	Distantiae determinatrices	Refractio et litterae inde pendentes	
I.	a et α	$n:1,\ \mu,\ \nu,\ \varrho,\ \sigma,\ \tau.$	λ
II.	b et β	$n':1,\ \mu',\ \nu',\ \varrho',\ \sigma',\ \tau'.$	λ'
III.	c et γ	$n'':1,\ \mu'',\nu'',\ \varrho'',\sigma'',\tau''.$	λ''

scilicet si pro lente prima vocetur radius faciei anterioris $= F$, posterioris $= G$, erit

$$\frac{1}{F}=\frac{\varrho}{a}+\frac{\sigma}{\alpha}\mp\tau\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\sqrt{\lambda-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{G}=\frac{\varrho}{\alpha}+\frac{\sigma}{a}\pm\tau\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\sqrt{\lambda-1},$$

similique modo pro reliquis lentibus, nempe pro secunda

$$\frac{1}{F'}=\frac{\varrho'}{b}+\frac{\sigma'}{\beta}\mp\tau'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\sqrt{\lambda'-1}, \qquad \frac{1}{G'}=\frac{\varrho'}{\beta}+\frac{\sigma'}{b}\pm\tau'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\sqrt{\lambda'-1},$$

tum vero pro tertia

$$\frac{1}{F''}=\frac{\varrho''}{c}+\frac{\sigma''}{\gamma}\mp\tau''\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\sqrt{\lambda''-1}, \qquad \frac{1}{G''}=\frac{\varrho''}{\gamma}+\frac{\sigma''}{c}\pm\tau''\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\sqrt{\lambda''-1}.$$

Deinde quia distantiae lentium pro nihilo habentur, scilicet

$$\alpha+b=0 \quad \text{et} \quad \beta+c=0,$$

erit spatium diffusionis

$$=\gamma\gamma xx\left\{\begin{aligned} &+\mu\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)\\ &+\mu'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu'}{b\beta}\right)\\ &+\mu''\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda''\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)^2+\frac{\nu''}{c\gamma}\right)\end{aligned}\right\}.$$

Statuatur nunc

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right), \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}=g\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right), \quad \frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}=h\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right),$$

1) Hoc supplementum attinet ad § 122—151. E. Ch.

pro tertia lente

$$\frac{1}{F''} = \frac{(h-1)\varrho''+\sigma''}{\gamma} \mp \frac{\tau'' h}{\gamma}\sqrt{\lambda''-1}, \qquad \frac{1}{G''} = \frac{(h-1)\sigma''+\varrho''}{\gamma} \pm \frac{\tau'' h}{\gamma}\sqrt{\lambda''-1}.$$

Spatium autem diffusionis tum ita exprimetur

$$\frac{x^2}{\gamma}\left(\mu\lambda f^3 + \mu'\lambda' g^3 + \mu''\lambda'' h^3 - \nu'\mu'\cdot fg(1-h) - \nu''\mu''\cdot h(1-h)\right),$$

ita ut satisfieri oporteat huic aequationi

$$\mu\lambda f^3 + \mu'\lambda' g^3 + \mu''\lambda'' h^3 - \nu'\mu'\cdot fg(1-h) - \nu''\mu''\cdot h(1-h) = 0.$$

Unde unus valorum λ, λ', λ'', qui ad usum commodissimus videtur, determinari debet.

IV. Si tantum lentibus vitreis uti velimus, sufficiet duas tantum vitri species adhiberi; si igitur statuamus lentem tertiam et primam ex eadem vitri specie parari, ut $\mu''=\mu$, $\nu''=\nu$, $\varrho''=\varrho$, $\sigma''=\sigma$, $\tau''=\tau$ et $\zeta=\vartheta$ ob $n''=n$, pro litteris autem f, g et h hae determinationes habebuntur:

Ex aequatione

$$\zeta f + \eta g + \zeta h = 0 \quad \text{fit} \quad f + h = \frac{-\eta}{\xi}\cdot g,$$

quo valore substituto fiet

$$g\frac{(\xi-\eta)}{\xi} = 1, \quad g = \frac{\xi}{\xi-\eta} \quad \text{ideoque} \quad f + h = \frac{-\eta}{\xi-\eta};$$

unde patet, prouti littera g fuerit vel positiva vel negativa, fore vicissim summam $f+h$ vel negativam vel positivam, et aequatio resolvenda iam erit

$$\mu(\lambda f^3 + \lambda'' h^3) + \mu'\lambda' g^3 - \frac{\mu'\nu'\cdot\xi}{\xi-\eta}\cdot f(1-h) - \mu\nu\cdot h(1-h) = 0.$$

Hinc igitur elicitur

$$\mu'\lambda' g^3 = -\mu(\lambda f^3 + \lambda'' h^3) + \frac{\mu'\nu'\cdot\xi}{\xi-\eta}\cdot f(1-h) + \mu\nu\cdot h(1-h),$$

cui facile erit pro casu quovis proposito satisfacere.

V. Dum lens prima et tertia ex eadem vitri specie parantur, media constet ex aqua vel alia materia fluida, ut lens triplicata intra duas lentes vitreas contineat fluidum, et quia fluidum plerumque minorem refractionem patitur quam vitrum, erit $n'<n$ indeque porro $\eta<\zeta$. Quia igitur pro hoc casu fit g positivum seu lens aquea convexa, lentes vitreae vel ambae vel una saltem debent esse concavae.

Inprimis autem praeter determinationes iam inventas necesse est, ut radius faciei anterioris pro lente media aequalis et contrarius sit radio faciei posterioris lentis primae, eodemque modo radius faciei posterioris aequalis et contrarius radio faciei anterioris lentis tertiae, unde hae aequalitates nascentur

$$\frac{1}{F'} = \frac{-1}{G} \quad \text{seu} \quad F' + G = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{G'} = \frac{-1}{F''} \quad \text{seu} \quad F'' + G' = 0.$$

Ideoque satisfieri oportet istis aequationibus:

$$(1-h)\sigma' - f\varrho' \mp \tau' g \cdot \sqrt{\lambda' - 1} = -f\varrho \mp \tau f \sqrt{\lambda - 1}$$

et

$$(1-h)\varrho' - f\sigma' \pm \tau' g \sqrt{\lambda' - 1} = (1-h)\varrho - \sigma \pm \tau h \sqrt{\lambda'' - 1}.$$

En igitur duas conditiones, quibus satisfieri oportet, unde vel numeri λ et λ'' vel alter eorum cum alterutra litterarum f et h definiri debent; quem in finem probe observandum est formulas $\sqrt{\lambda - 1}$ et $\sqrt{\lambda'' - 1}$ pro lubitu sive positivas sive negativas assumi posse neque a se invicem pendere. Pro formula autem $\sqrt{\lambda' - 1}$ notandum est, si ea in priore aequatione positive ponatur, in posteriore necessario negative sumi debere et vicissim.[1])

PROBLEMA 8

152. *Determinare eas lentes quadruplicatas* (Fig. 9) *ad datas distantias determinatrices $AE = a$ et $dI = \delta$ accommodatas, quae minimum spatium diffusionis Ii producant.*

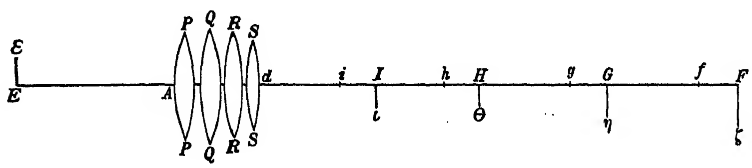

Fig. 9.

SOLUTIO

Prima lens PP ad distantias determinatrices $AE = a$ et $AF = \alpha$ cum numero λ construatur, secunda QQ ad distantias $b = -\alpha$ et $AG = \beta$ cum numero λ', tertia RR ad distantias $c = -\beta$ et $AH = \gamma$ cum numero λ'', et quarta SS ad distantias $d = -\gamma$ et $dI = \delta$ cum numero λ''' construatur: ubi

1) Finis supplementi II. E. Ch.

scilicet crassitiem lentium ut evanescentem spectamus. Posito iam semidiametro aperturae lentis x, sola prima lens PP produceret spatium diffusionis

$$Ff = \mu\alpha\alpha xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right).$$

Adiuncta autem secunda lente QQ positoque

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{-1+f}{a}+\frac{f}{\beta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{b}=\frac{1-f}{a}-\frac{f}{\beta},$$

si brevitatis gratia statuamus

$$\lambda^{(2)}=\lambda f^3+\lambda'(1-f)^3-\nu f(1-f),$$

vidimus fore spatium diffusionis:

$$Gg=\mu\beta\beta xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda^{(2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu}{a\beta}\right).$$

Adiungatur insuper tertia lens RR, numerusque g ita sumatur, ut sit

$$\frac{1}{\beta}=\frac{-1+g}{a}+\frac{g}{\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{1}{c}=\frac{1-g}{a}-\frac{g}{\gamma},$$

ac si brevitatis ergo ponamus

$$\lambda^{(3)}=\lambda^{(2)}g^3+\lambda''(1-g)^3-\nu g(1-g),$$

erit spatium diffusionis:

$$Hh=\mu\gamma\gamma xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda^{(3)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)^2+\frac{\nu}{a\gamma}\right).$$

Nunc denique adiungatur lens quarta SS, et numero h ita in calculum introducto, ut sit

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{-1+h}{a}+\frac{h}{\delta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{d}=\frac{1-h}{a}-\frac{h}{\delta},$$

si simili modo ponamus

$$\lambda^{(4)}=\lambda^{(3)}h^3+\lambda'''(1-h)^3-\nu h(1-h),$$

erit spatium diffusionis a lente quadruplicata productum:

$$Ii=\mu\delta\delta xx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\delta}\right)\left(\lambda^{(4)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\delta}\right)^2+\frac{\nu}{a\delta}\right),$$

quod igitur minimum reddi debet. Hunc in finem considerentur numeri λ, λ', λ'' et λ''' ut dati, et quaerantur idonei valores pro numeris f, g et h;

atque ut valor $\lambda^{(4)}$ minimus evadat, necesse est quoque valores $\lambda^{(3)}$ et $\lambda^{(2)}$ minimos fieri. Incipiamus ergo a valore $\lambda^{(2)}$, qui minimus redditur sumendo

$$f = \frac{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}+\sqrt{(3\lambda'+\nu)}} \quad \text{seu} \quad \frac{1}{f} = 1+\sqrt{\frac{3\lambda+\nu}{3\lambda'+\nu}},$$

unde fit

$$\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}} + \frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}.$$

Deinde numerus $\lambda^{(3)}$ minimum induet valorem capiendo

$$g = \frac{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}{\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}+\sqrt{(3\lambda''+\nu)}} \quad \text{seu} \quad \frac{1}{g} = 1+\sqrt{\frac{3\lambda^{(2)}+\nu}{3\lambda''+\nu}},$$

hincque colligitur

$$\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(3)}+\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}} + \frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}.$$

Denique numerus $\lambda^{(4)}$ ideoque et spatium diffusionis Ii minimum efficietur sumendo

$$h = \frac{\sqrt{(3\lambda'''+\nu)}}{\sqrt{(3\lambda^{(3)}+\nu)}+\sqrt{(3\lambda'''+\nu)}} \quad \text{seu} \quad \frac{1}{h} = 1+\sqrt{\frac{3\lambda^{(3)}+\nu}{3\lambda'''+\nu}},$$

unde obtinetur

$$\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(4)}+\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(3)}+\nu)}} + \frac{1}{\sqrt{(3\lambda'''+\nu)}}.$$

Quod si hic valores ante inventos substituamus, nanciscemur

$$\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(4)}+\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}} + \frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}} + \frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}} + \frac{1}{\sqrt{(3\lambda'''+\nu)}}.$$

Pro praecedentibus vero erit

$$\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(3)}+\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}} + \frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}} + \frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}} + \frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}.$$

Tum vero ex his porro consequimur:

$$f = \sqrt{\frac{3\lambda^{(2)}+\nu}{3\lambda+\nu}}, \quad g = \sqrt{\frac{3\lambda^{(3)}+\nu}{3\lambda^{(2)}+\nu}}, \quad h = \sqrt{\frac{3\lambda^{(4)}+\nu}{3\lambda^{(3)}+\nu}}.$$

Superest ergo, ut constructionem singularum lentium luculentius exponamus

et earum distantias determinatrices per solas propositas a et δ exprimamus; erit igitur

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{-1+h}{a}+\frac{h}{\delta},\quad \frac{1}{\beta}=\frac{-1+gh}{a}+\frac{gh}{\delta},\quad \frac{1}{\alpha}=\frac{-1+fgh}{a}+\frac{fgh}{\delta},$$

$$\frac{1}{d}=\frac{1-h}{a}-\frac{h}{\delta},\quad \frac{1}{c}=\frac{1-gh}{a}-\frac{gh}{\delta},\quad \frac{1}{b}=\frac{1-fgh}{a}-\frac{fgh}{\delta}.$$

Ex superioribus vero formulis colligitur:

$$h=\sqrt{\frac{3\lambda^{(4)}+\nu}{3\lambda^{(3)}+\nu}},\quad g=\sqrt{\frac{3\lambda^{(3)}+\nu}{3\lambda^{(2)}+\nu}},\quad f=\sqrt{\frac{3\lambda^{(2)}+\nu}{3\lambda+\nu}},$$

unde fit

$$gh=\sqrt{\frac{3\lambda^{(4)}+\nu}{3\lambda^{(2)}+\nu}}\quad \text{et}\quad fgh=\sqrt{\frac{3\lambda^{(4)}+\nu}{3\lambda+\nu}};$$

et superiores valores ita exprimi poterunt

$$\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{b}=-\frac{\sqrt{(3\lambda^{(4)}+\nu)}}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda'''+\nu)}}\right)+\frac{\sqrt{(3\lambda^{(4)}+\nu)}}{\delta}\cdot\frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}}$$

$$\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{c}=-\frac{\sqrt{(3\lambda^{(4)}+\nu)}}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda'''+\nu)}}\right)+\frac{\sqrt{(3\lambda^{(4)}+\nu)}}{\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}\right)$$

$$\frac{1}{\gamma}=-\frac{1}{d}=-\frac{\sqrt{(3\lambda^{(4)}+\nu)}}{a}\,\frac{1}{\sqrt{(3\lambda'''+\nu)}}+\frac{\sqrt{(3\lambda^{(4)}+\nu)}}{\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{(3\lambda+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda'+\nu)}}+\frac{1}{\sqrt{(3\lambda''+\nu)}}\right).$$

COROLLARIUM 1

153. Si pro lentibus simplicibus numeri λ, λ', λ'' et λ''' sumantur inter se aequales, fiet pro minimo spatio diffusionis:

$$\sqrt{(3\lambda^{(2)}+\nu)}=\frac{1}{2}\sqrt{(3\lambda+\nu)},\quad \lambda^{(2)}=\frac{3\lambda-1\cdot 3\nu}{3\cdot 4};$$

$$\sqrt{(3\lambda^{(3)}+\nu)}=\frac{1}{3}\sqrt{(3\lambda+\nu)},\quad \lambda^{(3)}=\frac{3\lambda-2\cdot 4\nu}{3\cdot 9};$$

$$\sqrt{(3\lambda^{(4)}+\nu)}=\frac{1}{4}\sqrt{(3\lambda+\nu)},\quad \lambda^{(4)}=\frac{3\lambda-3\cdot 5\nu}{3\cdot 16};$$

hinc $f=\frac{1}{2}$, $g=\frac{2}{3}$, $h=\frac{3}{4}$ et pro constructione lentium simplicium:

$$\frac{1}{\alpha}=-\frac{3}{4a}+\frac{1}{4\delta},\quad \frac{1}{\beta}=-\frac{2}{4a}+\frac{2}{4\delta},\quad \frac{1}{\gamma}=-\frac{1}{4a}+\frac{3}{4\delta},$$

$$\frac{1}{b}=+\frac{3}{4a}-\frac{1}{4\delta},\quad \frac{1}{c}=+\frac{2}{4a}-\frac{2}{4\delta},\quad \frac{1}{d}=+\frac{1}{4a}-\frac{3}{4\delta}.$$

COROLLARIUM 2

154. Hinc ex § 91 sequens quatuor lentium simplicium constructio obtinetur:

Pro lente Radius faciei

$$\text{prima}\quad PP\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{4a\delta}{(4\varrho-3\sigma)\delta+\sigma a\pm\tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{4a\delta}{(4\sigma-3\varrho)\delta+\varrho a\mp\tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}}\end{cases}$$

$$\text{secunda}\quad QQ\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{4a\delta}{(3\varrho-2\sigma)\delta+(2\sigma-\varrho)a\pm\tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{4a\delta}{(3\sigma-2\varrho)\delta+(2\varrho-\sigma)a\mp\tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}}\end{cases}$$

$$\text{tertia}\quad RR\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{4a\delta}{(2\varrho-\sigma)\delta+(3\sigma-2\varrho)a\pm\tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{4a\delta}{(2\sigma-\varrho)\delta+(3\varrho-2\sigma)a\pm\tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}}\end{cases}$$

$$\text{quarta}\quad SS\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{4a\delta}{\varrho\delta+(4\sigma-3\varrho)a\pm\tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{4a\delta}{\sigma\delta+(4\varrho-3\sigma)a\mp\tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}}.\end{cases}$$

COROLLARIUM 3

155. Si praeterea numeri λ, λ', λ'', λ''' unitati aequales statuantur, qui est valor minimus, quem recipere possunt, erit ob $\nu = 0{,}232692$

$$\lambda^{(2)} = \frac{3-3\nu}{3\cdot 4} = 0{,}191827, \quad \lambda^{(3)} = \frac{3-8\nu}{3\cdot 9} = 0{,}042165, \quad \lambda^{(4)} = \frac{3-15\nu}{3\cdot 16} = -0{,}010216;$$

sicque pro lente quadruplicata valor numeri $\lambda^{(4)}$ adeo infra nihilum deprimitur.

COROLLARIUM 4

156. Maiorem ergo valorem numeris λ, λ', λ'', λ''' tribuendo effici poterit, ut valor ipsius $\lambda^{(4)}$ praecise nihilo aequalis prodeat; quippe hoc fiet sumendo

$\lambda = 5\nu = 1{,}163460$. Hinc habebitur $\lambda - 1 = 0{,}163460$ et $\tau\sqrt{(\lambda - 1)} = 0{,}365947$, unde singulae lentes simplices duplici modo per formulas exhibitas construi poterunt.

SCHOLION 1

157. Si inter se comparemus hos duos casus, quibus est vel $\lambda^{(4)} = -0{,}010216$ vel $\lambda^{(4)} = 0$, videmus, etiamsi discrimen vix partem centesimam unitatis superet, in constructione tamen lentium simplicium satis magnum discrimen deprehendi, cum denominatores formularum (§ 154) sive augeri sive diminui debeant quantitate: $0{,}365947\ (a + \delta)$; quae differentia maior est quam errores, qui forte ab artifice non nimis rudi committi queant. Ex quo vicissim colligimus, etiamsi in constructione harum lentium quadruplicatarum ab artifice leves errores committantur, inde vix perceptibilem effectum in spatio diffusionis vel valore ipsius $\lambda^{(4)}$ esse metuendum, quam ob causam hae lentes imprimis ad praxin accommodatae videntur. Si scilicet opus fuerit lente, pro qua valor ipsius λ in nihilum abeat, multo magis his lentibus quadruplicatis corollario 4 descriptis erit utendum quam triplicatis, quas supra definivi. Quin etiam eas lentes quadruplicatas adhibere licebit, in quibus est $\lambda^{(4)} = -0{,}010216$, quia hic numerus vix nihilo est minor; ac si in constructione a praescriptis mensuris aberretur, ille valor adhuc propius ad nihilum perducatur, ita ut hoc casu adeo errores commissi scopo magis attingendo inserviant. Infra autem videbimus plurimos dari casus, quibus eiusmodi lentibus uti conveniat, pro quibus valor ipsius λ non solum sit nihilo aequalis, sed etiam tantillum infra nihilum deprimatur; tunc optimo cum successu huiusmodi lentes quadruplicatas in usum vocabimus. Sin autem eiusmodi lentes sufficiant, pro quibus valor ipsius λ sit $0{,}042165$ vel aliquantillum excedat, lentes triplicatae erunt commendandae, quarum constructionem supra (§ 136) dedimus; quemadmodum duplicatae negotium conficient, si non opus fuerit minore valore ipsius λ quam $0{,}191827$. Tota autem instrumentorum dioptricorum perfectio in hoc maxime consistit, ut lentes habeantur, pro quibus valor ipsius λ sit quam minimus, cum eae sint aptissimae ad confusionem penitus tollendam; ex quo lentium quadruplicatarum hic descriptarum usus erit amplissimus.

SCHOLION 2

158. Si haec, quae de lentibus quadruplicatis hic tradidimus, attente considerentur, facile patebit, quomodo lentes quintuplicatae magisque multiplicatae

ad usum sint accommodandae. Eiusmodi scilicet semper constructione erit opus, quae a natura minimi parumper recedat, quoniam hoc modo errores in praxi commissi effectum propositum minime perturbant. Cum autem vix unquam usu veniat, ut lentibus opus sit, pro quibus valor numeri λ magis ultra nihilum imminuatur, superfluum foret constructionem lentium quintuplicatarum magisve multiplicatarum ulterius prosequi. Interim tamen iuvabit, si pro huiusmodi lentibus numeri λ lentium numero convenienter signis $\lambda^{(5)}$, $\lambda^{(6)}$ etc. indicentur, eorum valores, quos ex natura minimi recipiunt, exposuisse. Sumamus omnes numeros $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda'''', \lambda'''''$ etc. lentibus simplicibus respondentes unitati aequales, et eorum, qui lentibus multiplicatis conveniunt ex natura minimi, ita se habebunt:

Pro lente

solitaria	$\lambda^{(1)} = \dfrac{3 - 0\nu}{3 \cdot 1} =$	$1{,}000000$
duplicata	$\lambda^{(2)} = \dfrac{3 - 3\nu}{3 \cdot 4} =$	$0{,}191827$
triplicata	$\lambda^{(3)} = \dfrac{3 - 8\nu}{3 \cdot 9} =$	$0{,}042165$
quadruplicata	$\lambda^{(4)} = \dfrac{3 - 15\nu}{3 \cdot 16} =$	$-\,0{,}010216$
quintuplicata	$\lambda^{(5)} = \dfrac{3 - 24\nu}{3 \cdot 25} =$	$-\,0{,}034461$
sextuplicata	$\lambda^{(6)} = \dfrac{3 - 35\nu}{3 \cdot 36} =$	$-\,0{,}047632$
septuplicata	$\lambda^{(7)} = \dfrac{3 - 48\nu}{3 \cdot 49} =$	$-\,0{,}055573$
octuplicata	$\lambda^{(8)} = \dfrac{3 - 63\nu}{3 \cdot 64} =$	$-\,0{,}060727$
noncuplicata	$\lambda^{(9)} = \dfrac{3 - 80\nu}{3 \cdot 81} =$	$-\,0{,}064261$
decuplicata	$\lambda^{(10)} = \dfrac{3 - 99\nu}{3 \cdot 100} =$	$-\,0{,}066788$

ıc si huiusmodi lentes in infinitum multiplicentur, valor numeri respondentis $\lambda^{(\infty)}$ erit $= -\frac{\nu}{3} = -\,0{,}077564$, ita ut nunquam infra hunc numerum deprimi

possit: ex quo patet vix unquam casum existere posse, quo lente saltem quintuplicata opus esset. Ceterum etiam in genere, quicunque alii valores praeter unitatem numeris λ, λ', λ'', λ''' etc. tribuantur, ex formulis superioribus numeri $\lambda^{(5)}$, $\lambda^{(6)}$ etc. facile derivabuntur; quin etiam distantiae determinatrices singularum lentium simplicium indidem sine difficultate definientur, cum lex progressionis satis sit manifesta. Verum per totum hoc caput probe tenendum est ubique crassitiem lentium tanquam evanescentem esse consideratam, in sequente autem capite iterum lentes in genere non neglecta crassitie sumus contemplaturi.

CAPUT IV

DE CONFUSIONE VISIONIS NEC NON DE MAGNITUDINE APPARENTE ET CLARITATE

DEFINITIO 1

159. *Visio est distincta, si omnes radii, qui ex quolibet obiecti puncto in oculum ingrediuntur, in fundo oculi super retina iterum in unum punctum congregantur.*

SCHOLION

160. Ad visionem distinctam requiritur, ut obiecta in certa quadam ab oculo distantia reperiantur, quae distantia pro varia oculorum indole maxime solet esse diversa, dum myopes exiguam, ii, qui oculis valent, ingentem, ac presbytes non solum infinitam, sed quandoque etiam negativam exigunt; cuiusmodi distantia cum in veris obiectis locum habere nequeat, ope perspicillorum sibi satisfacere solent. Quilibet ergo oculus ad certam quandam distantiam obiectorum est instructus, quam eius distantiam iustam appellabo; ubi quidem insignis latitudo locum habet, propterea quod structura oculi ita est artificiosa, ut contractione ac elongatione quadam se ad distantias aliquanto maiores et minores accommodare possit. Quando ergo obiecta in distantia ab oculo iusta reperiuntur, visio est distincta, dum singula obiectorum puncta super retina singulis punctis exprimuntur.

DEFINITIO 2

161. *Visio est confusa, si radii ex quolibet obiecti puncto in oculum immissi non in uno retinae puncto congregantur, sed per aliquod spatium retinam afficiunt.*

COROLLARIUM 1

162. Eo maior ergo erit confusio, quo maius fuerit hoc spatium in retina, per quod radii ex eodem obiecti puncto emissi dissipantur. Ex quo huius spatii magnitudo veram confusionis mensuram suppeditabit.

COROLLARIUM 2

163. Visio ergo erit confusa, cum obiecti visi distantia multum fuerit diversa ab oculi distantia iusta. Parvum enim discrimen vel per se nullam confusionem parit vel oculus se ad obiecti distantiam sua, qua pollet, volubilitate accommodare valet.

SCHOLION

164. Si obiecta per lentes distincte repraesentarentur, visio imaginum eadem lege teneretur atque ipsorum obiectorum; iusta scilicet earum ab oculo distantia visionem distinctam, admodum autem diversa confusam produceret. Verum si imago per aliquod spatium fuerit diffusa, etiamsi ab oculo ad distantiam iustam sit remota, inde tamen in visione confusio oriatur necesse est. Quod si nempe non obiecta ipsa, sed earum imagines per unam pluresve lentes repraesentatas intueamur, ob duplicem causam visio poterit esse confusa; altera, si distantia imaginis ab oculo multum fuerit diversa a distantia iusta, altera vero, si ipsa imago per aliquod spatium diffundatur. Priorem quidem causam tollere in nostra est potestate, siquidem lentes ita disponere licet, ut imaginem in iusta ab oculo distantia exhibeant; quam lentium dispositionem propterea hic perpetuo assumamus. Quamobrem in hoc capite investigare constitui, quanta confusio in visione imaginum a spatio diffusionis oriri debeat, eiusque quantitate determinata deinceps in hoc erit elaborandum, quemadmodum lentes formatas ac dispositas esse oporteat, ut confusio inde in visione nata datum limitem, quo adhuc est tolerabilis, non excedat. In genere quidem certum est, quo maius fuerit spatium diffusionis, eo maiorem inde in visionem induci debere confusionem; verum tamen mox videbimus confusionem visionis non esse spatio diffusionis proportionalem, sed aliam omnino legem sequi, quam accurate determinasse maximi erit momenti, cum ex hoc fonte constructio omnium instrumentorum dioptricorum ad visionem accommodatorum sit repetenda.

PROBLEMA 1

165. *Si oculus aspiciat imaginem cuiuspiam obiecti ab una pluribusve lentibus per spatium* Ll (Fig. 10) *diffusam atque imago principalis* L *in iusta ab oculo distantia reperiatur, definire confusionem, qua visio huius imaginis afficietur.*

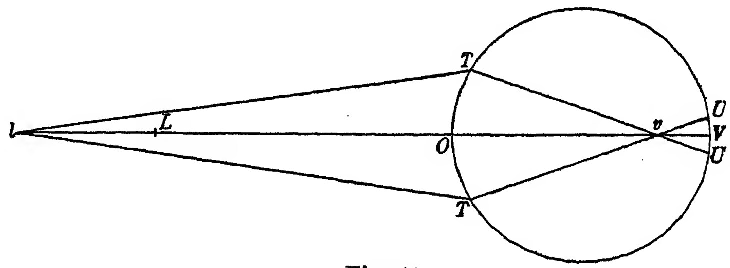

Fig. 10.

SOLUTIO

In spatio diffusionis Ll, in quo punctum L a radiis per lentium medium, punctum l vero a radiis per lentium extremitates transmissis exhibeatur, considerari oportet primo eius magnitudinem Ll, deinde radiorum in l concurrentium inclinationem ad axem. Supra autem vidimus has res a primae lentis apertura, cuius semidiameter sit $= x$, ita pendere, ut sit ipsum spatium $Ll = Vxx$ et angulus $OlT = \mathfrak{V}x$, pro quovis scilicet lentium numero valores horum coefficientium V et $\mathfrak{V}$ determinavimus. Repraesentet iam circulus OV oculum, quem hic ut exiguam cameram obscuram spectare licet, sed ita perfectam, ut radios ex uno puncto emissos iterum in uno puncto colligat; etsi enim in oculo plures fiunt refractiones, tamen conditione illa servata unica lens earum loco considerari potest, quae sit in TOT, a qua retina remota sit intervallo $OV = u$. Cum nunc imago principalis L in debita ab oculo distantia, quae vocetur $OL = l$, existat, puncti L imago in oculo in ipsam retinam incidet et in V distincte depingetur: puncti vero l imago non in V, sed ante retinam in v referetur, quod intervallum Vv, si lentis in TOT conceptae crassities evanescat, secundum § 62 ita exprimitur, ut sit

$$Vv = \frac{OV^2}{OL^2} \cdot Ll = \frac{uu}{ll} \cdot Vxx.$$

Cum autem radii punctum l formantes ad axem inclinati sint angulo $OlT = \mathfrak{V}x$, ii per lentis oculi puncta TT ita intrabunt, ut, neglecto intervallo Ll prae

distantia $OL = l$, sit $OT = l\mathfrak{B}x$, ex quo ii in puncto v concurrentes cum axe angulum facient $OvT = \frac{OT}{Ov} = \frac{OT}{OV} = \frac{l}{u}\mathfrak{B}x$. Hinc ergo ultra ad retinam pergentes super ea circulum UU effingent, cuius radius erit

$$VU = \frac{l}{u}\mathfrak{B}x \cdot Vv = \frac{l}{u} \cdot \mathfrak{B}x \cdot \frac{uu}{ll} \cdot Vxx,$$

et a punctis inter L et l mediis hoc spatium circulare super retina replebitur. Quare imago per spatium Ll diffusa super retina circello repraesentabitur, cuius radius $VU = \frac{u}{l}\mathfrak{B} \cdot Vx^3$, qui circellus veram confusionis mensuram suppeditat. Quodlibet scilicet obiecti punctum, quod lentibus per spatium Ll diffusum exhibetur, in oculo super retina non puncto, sed circello exprimetur, cuius radius erit $= \frac{u}{l} \cdot \mathfrak{B} \cdot Vx^3$.

COROLLARIUM 1

166. Videmus ergo confusionem, qua visio afficitur, non solum a quantitate spatii diffusionis $Ll = Vxx$, sed insuper ab angulo, quo radii in l concurrentes ad axem inclinantur, qui est $= \mathfrak{B}x$, pendere radiumque circelli confusionem metientis producto illius spatii per hunc angulum esse proportionalem.

COROLLARIUM 2

167. Cum igitur posito semidiametro aperturae primae lentis $= x$ spatium diffusionis sit ut eius quadratum xx, radius circelli confusionem metientis est ut eius cubus x^3. Ac si confusio ipsa areae huius circelli proportionalis aestimetur, erit ea ut x^6 seu ut cubus aperturae primae lentis.

COROLLARIUM 3

168. Hinc ergo intelligitur, quanti intersit per idoneam lentium dispositionem spatium diffusionis Vxx diminuisse; non solum enim in eadem ratione, qua spatium diffusionis Vxx seu quantitas V diminuitur, sed adeo in ratione duplicata ipsa confusio visa minor redditur.

SCHOLION

169. Assumsi hic pupillam tam late patere, ut radios ab l divergentes recipiat; at si apertura pupillae minor esset, radios a puncto l venientes ne-

quidem caperet: hoc ergo casu res eodem rediret, ac si contracta primae lentis apertura spatium diffusionis Ll eo usque diminueretur, quoad pupilla omnes radios ab imagine emissos recipere posset, hocque casu manifestum est confusionem minorem esse prodituram. Verum in sequentibus ostendetur tam in Telescopiis quam Microscopiis hunc casum vix unquam locum invenire, cum plerumque conus radiosus ex puncto l emissus circa ingressum in oculum multo tenuior sit quam pupillae apertura; quamobrem ne opus quidem est hunc casum, etsi per se facile expediretur, hic expendere. Ceterum tametsi oculus non commode cum lente simplici, cuius crassities evanescat, conferri possit hincque expressio spatii Vv secundum § 84 aliquantum diversa prodire potuisset, hic ad istam circumstantiam non attendimus, propterea quod spatium Vv secundum certam quandam rationem auctum vel diminutum prodiisset; hic autem non adeo necesse est ipsam quantitatem absolutam confusionis cognovisse, dummodo rationem, quam sequitur, accurate definiverimus. Cum enim nostrum calculum cum experientia contulerimus, terminum cognoscemus, quem si confusio nostro more expressa superavit, intolerabilis evadat; hincque perpetuo sufficiet confusionem simili modo expressam infra hunc terminum reduxisse. Interim tamen notasse iuvabit per oculi conformationem confusionem adhuc multo minorem effici posse.

PROBLEMA 2

170. *Positis iisdem, quae in praecedente problemate sunt assumta, eam definire oculi conformationem, qua minima confusio percipiatur.*

SOLUTIO

Oculus omnis facultate praeditus est sese aliquantillum aliter conformandi, ut etiam obiecta, quorum distantia a iusta non nimis differt, distincte

Fig. 11.

videat: quod quomodocunque perficiatur, id ita fieri concipere licet, ac si retina ad pupillam seu potius eam lentem, quam oculi loco consideramus, propius admoveretur seu longius ab ea detorqueretur. Cum ergo ante retinam in V (Fig. 11) sitam simus contemplati, hic primo sumamus retinam per ipsum

punctum v transire, ac manifestum est super ea punctum l distincte expressum iri. Verum quia punctum L alios radios nisi axi proximos non emittit, etiam punctum L sine ulla confusione in v repraesentabitur, ita ut tantum puncta media inter L et l confusionem sint paritura. Consideretur ergo quodvis punctum intermedium λ, quod esset extremum in spatio confusionis, si semidiameter aperturae primae lentis minor foret quam x, qui ergo ponatur $= z$; eritque $L\lambda = Vzz$ et inclinatio radiorum in λ concurrentium ad axem $= \mathfrak{B}z$; hinc istius puncti imago intra oculum referetur in ν, ut sit $V\nu = \frac{uu}{ll}Vzz$, ideoque ob $Vv = \frac{uu}{ll}Vxx$ erit intervallum $v\nu = \frac{uu}{ll}V(xx - zz)$ et radiorum in ν convergentium inclinatio ad axem $= \frac{l}{u}\mathfrak{B}z$; ex quo circelli super retina in v existentis radiis puncti λ expressi semidiameter erit

$$= \frac{u}{l}\mathfrak{B}Vz(xx - zz),$$

qui evanescit, uti iam monuimus, sive sit $z = 0$ sive $z = x$. Quaeratur iam ille valor ipsius z, quo ille circellus fiat maximus; id quod eveniet, si $xx - 3zz = 0$ seu $z = \frac{x}{\sqrt{3}}$; sicque circelli confusionem hoc casu metientis semidiameter erit $= \frac{2u}{3l\sqrt{3}} \cdot \mathfrak{B}Vx^3$, quod est multo minus quam casu praecedente, quo retina erat in V.

At si retina aliquantillum a v versus V removeatur, hic circellus adhuc minor effici poterit. Ponatur enim spatium $VS = s$, ut sit

$$vS = \frac{uu}{ll}Vxx - s \quad \text{et} \quad S\nu = s - \frac{uu}{ll}Vzz.$$

Punctum ergo l, cuius effigies in v exhibetur, super retina S circello referetur, cuius radius est $= \frac{l}{u}\mathfrak{B}x\left(\frac{uu}{ll}Vxx - s\right)$, punctum vero λ, cuius effigies est in ν, super retina S circello, cuius radius erit $= \frac{l}{u}\mathfrak{B}z\left(s - \frac{uu}{ll}Vzz\right)$; nunc igitur id punctum λ investigemus, unde iste circellus minimus evadat: quod fit, si sit $s = \frac{3uu}{ll}Vzz$; eritque huius circuli radius $= \frac{2u}{l}\mathfrak{B}Vz^3$, qui simul confusionem exhiberet, si modo a puncto l non maior circulus oriretur: sed substituto pro s valore invento huius circuli radius erit $\frac{u}{l}\mathfrak{B}Vx(xx - 3zz)$, qui ergo illi $\frac{2u}{l}\mathfrak{B}Vz^3$ aequalis statuatur, unde nascitur haec aequatio:

$$x^3 - 3xzz = 2z^3 \quad \text{hincque} \quad z = \tfrac{1}{2}x.$$

Quare circelli, quo minima confusio mensuratur, radius erit $=\frac{u}{4l}\mathfrak{B}Vx^3$, quadruplo minor, quam si retina esset in V; indeque ipsa confusio sedecies minor. Etsi autem illa aequatio cubica tres habet radices, praeter $z=\frac{1}{2}x$ binae reliquae sunt aequales et $z=-x$ sicque $zz=xx$, unde non minima, sed quasi maxima confusio nasceretur.

COROLLARIUM 1

171. Cum igitur, ut oculus minimam confusionem sentiat, debeat esse $z=\frac{1}{2}x$ ideoque $s=\frac{3uu}{4ll}Vxx$, patet retinam in eum locum S cogi debere, ut sit $VS=\frac{3}{4}Vv$ et $vS=\frac{1}{4}Vv$.

COROLLARIUM 2

172. Cum ergo oculus non solum praeditus sit facultate sese parumper immutandi, sed etiam hac facultate uti soleat ad confusionem evitandam, nullum est dubium, quin circellorum confusionem producentium radius sit $=\frac{u}{4l}\mathfrak{B}Vx^3$, ideoque quadruplo minor, quam problemate praecedente inveneramus, dummodo imago spectanda Ll propemodum in distantia iusta reperiatur.

COROLLARIUM 3

173. Haec igitur expressio $\frac{u}{4l}\mathfrak{B}Vx^3$ iustam nobis exhibet mensuram confusionis, cum exprimat radium circellorum, quibus singula obiecti puncta, quatenus id per lentes spectatur, super retina repraesentantur. Si modo imago in distantia iusta ab oculo reperiatur.

SCHOLION

174. Si hi circelli evanescerent, visio plane esset distincta; hoc autem fieri nequit, nisi ipsum intervallum diffusionis Vxx evanescat: unde patet, si apertura primae lentis ad nihilum reduceretur, nullam confusionem sentiri debere. Verum visio non ita est delicata, ut prorsus nullam confusionem pati possit, sed dummodo confusio certum quendam terminum non superet, quasi esset nulla considerari potest. Iste terminus seu valor, quem expressio $\frac{u}{4l}\mathfrak{B}Vx^3$ excedere non debet, ex experientia potius peti debet quam ex theoria, isque idcirco insigni adhuc latitudine continetur: unde fit, ut pro diverso scopo

punctum v transire, ac manifestum est super ea punctum l distincte expressum iri. Verum quia punctum L alios radios nisi axi proximos non emittit, etiam punctum L sine ulla confusione in v repraesentabitur, ita ut tantum puncta media inter L et l confusionem sint paritura. Consideretur ergo quodvis punctum intermedium λ, quod esset extremum in spatio confusionis, si semidiameter aperturae primae lentis minor foret quam x, qui ergo ponatur $=z$; eritque $L\lambda = Vzz$ et inclinatio radiorum in λ concurrentium ad axem $= \mathfrak{B}z$; hinc istius puncti imago intra oculum referetur in γ, ut sit $V\gamma = \frac{uu}{ll}Vzz$, ideoque ob $Vv = \frac{uu}{ll}Vxx$ erit intervallum $v\gamma = \frac{uu}{ll}V(xx-zz)$ et radiorum in γ convergentium inclinatio ad axem $=\frac{l}{u}\mathfrak{B}z$; ex quo circelli super retina in v existentis radiis puncti λ expressi semidiameter erit

$$=\frac{u}{l}\mathfrak{B}Vz(xx-zz),$$

qui evanescit, uti iam monuimus, sive sit $z=0$ sive $z=x$. Quaeratur iam ille valor ipsius z, quo ille circellus fiat maximus; id quod eveniet, si $xx-3zz=0$ seu $z=\frac{x}{\sqrt{3}}$; sicque circelli confusionem hoc casu metientis semidiameter erit $=\frac{2u}{3l\sqrt{3}}\cdot\mathfrak{B}Vx^3$, quod est multo minus quam casu praecedente, quo retina erat in V.

At si retina aliquantillum a v versus V removeatur, hic circellus adhuc minor effici poterit. Ponatur enim spatium $VS=s$, ut sit

$$vS=\frac{uu}{ll}Vxx-s \quad \text{et} \quad S\gamma = s-\frac{uu}{ll}Vzz.$$

Punctum ergo l, cuius effigies in v exhibetur, super retina S circello referetur, cuius radius est $=\frac{l}{u}\mathfrak{B}x\left(\frac{uu}{ll}Vxx-s\right)$, punctum vero λ, cuius effigies est in γ, super retina S circello, cuius radius erit $=\frac{l}{u}\mathfrak{B}z\left(s-\frac{uu}{ll}Vzz\right)$; nunc igitur id punctum λ investigemus, unde iste circellus minimus evadat: quod fit, si sit $s=\frac{3uu}{ll}Vzz$; eritque huius circuli radius $=\frac{2u}{l}\mathfrak{B}Vz^3$, qui simul confusionem exhiberet, si modo a puncto l non maior circulus oriretur: sed substituto pro s valore invento huius circuli radius erit $\frac{u}{l}\mathfrak{B}Vx(xx-3zz)$, qui ergo illi $\frac{2u}{l}\mathfrak{B}Vz^3$ aequalis statuatur, unde nascitur haec aequatio:

$$x^3-3xzz=2z^3 \quad \text{hincque} \quad z=\frac{1}{2}x.$$

Quare circelli, quo minima confusio mensuratur, radius erit $=\frac{u}{4l}\mathfrak{B}Vx^3$, quadruplo minor, quam si retina esset in V; indeque ipsa confusio sedecies minor. Etsi autem illa aequatio cubica tres habet radices, praeter $z=\frac{1}{2}x$ binae reliquae sunt aequales et $z=-x$ sicque $zz=xx$, unde non minima, sed quasi maxima confusio nasceretur.

COROLLARIUM 1

171. Cum igitur, ut oculus minimam confusionem sentiat, debeat esse $z=\frac{1}{2}x$ ideoque $s=\frac{3uu}{4ll}Vxx$, patet retinam in eum locum S cogi debere, ut sit $VS=\frac{3}{4}Vv$ et $vS=\frac{1}{4}Vv$.

COROLLARIUM 2

172. Cum ergo oculus non solum praeditus sit facultate sese parumper immutandi, sed etiam hac facultate uti soleat ad confusionem evitandam, nullum est dubium, quin circellorum confusionem producentium radius sit $=\frac{u}{4l}\mathfrak{B}Vx^3$, ideoque quadruplo minor, quam problemate praecedente inveneramus, dummodo imago spectanda Ll propemodum in distantia iusta reperiatur.

COROLLARIUM 3

173. Haec igitur expressio $\frac{u}{4l}\mathfrak{B}Vx^3$ iustam nobis exhibet mensuram confusionis, cum exprimat radium circellorum, quibus singula obiecti puncta, quatenus id per lentes spectatur, super retina repraesentantur. Si modo imago in distantia iusta ab oculo reperiatur.

SCHOLION

174. Si hi circelli evanescerent, visio plane esset distincta; hoc autem fieri nequit, nisi ipsum intervallum diffusionis Vxx evanescat: unde patet, si apertura primae lentis ad nihilum reduceretur, nullam confusionem sentiri debere. Verum visio non ita est delicata, ut prorsus nullam confusionem pati possit, sed dummodo confusio certum quendam terminum non superet, quasi esset nulla considerari potest. Iste terminus seu valor, quem expressio $\frac{u}{4l}\mathfrak{B}Vx^3$ excedere non debet, ex experientia potius peti debet quam ex theoria, isque idcirco insigni adhuc latitudine continetur: unde fit, ut pro diverso scopo

modo maiore gradu confusionis contenti esse soleamus, modo autem minorem gradum exigamus; quas circumstantias, cum ad praxin propius accedemus, accuratius sumus examinaturi. Ceterum notandum est pro intervallo u, quo quasi profunditas oculi exhibetur, unum circiter pollicem assumi posse, quae quidem mensura fere erit arbitraria, cum deinceps limites confusionis per experientiam constituemus.

PROBLEMA 3

175. *Si oculus per unicam lentem obiectum aspiciat, ita ut imago visa ab oculo in distantia iusta reperiatur, definire confusionem, qua visio afficietur.*

SOLUTIO

Sit distantia obiecti $E\varepsilon$ (Fig. 3) ante lentem $AE = a$, imaginis vero principalis $F\zeta$ post lentem $BF = \alpha$, lentisque crassities $AB = v$, quan-

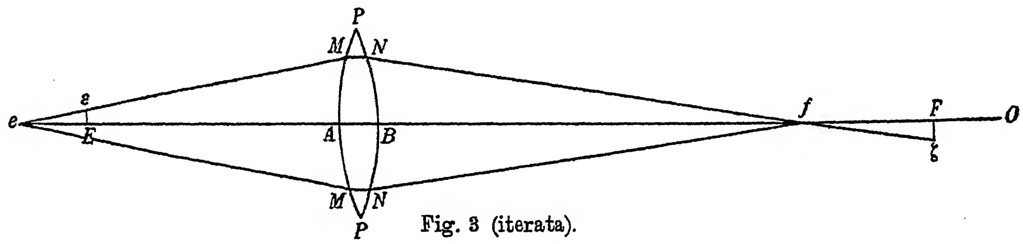

Fig. 3 (iterata).

titas vero arbitraria, qua cum binis distantiis determinatricibus a et α lentis facies determinatur, sit $= k$; ponatur autem brevitatis gratia $\frac{k-v}{k+v} = i$. Tum autem posita ratione refractionis $= n$ debet esse lentis PP

$$\text{radius faciei anterioris} = \frac{(n-1)a(k+v)}{k+v+2na},$$

$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{(n-1)\alpha(k-v)}{k-v-2n\alpha};$$

ac si semidiameter aperturae faciei anterioris sit $= x$, posterioris vero $> ix$, spatium diffusionis Ff erit $= P\alpha\alpha xx$, existente

$$P = \frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{ii}\left(\frac{n}{a} + \frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{k+v}\right)^2 + ii\left(\frac{n}{\alpha} - \frac{2}{k-v}\right)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{k-v}\right)^2\right),$$

radiorum vero in f concurrentium inclinatio ad axem $= i \cdot \frac{x}{\alpha}$. His, quae § 86 sunt stabilita, praemissis, sit distantia oculi post lentem $BO = O$, et quia

imago $F\zeta$ ante oculum in distantia iusta existere assumitur, erit $O = \alpha + l$ ideoque $\alpha = O - l$, si locus oculi ut datus consideretur. Hinc ergo habebimus $V = P\alpha\alpha$ et $\mathfrak{B} = \frac{i}{\alpha}$ ideoque $\mathfrak{B}V = i\alpha P$. Consequenter radius circellorum in oculo confusionem metientium seu, ut in posterum loquemur, mensura confusionis erit

$$= \frac{u}{4l} \cdot i\alpha x^3 \cdot P = \frac{iu}{4l}(O - l)x^3 P.$$

Si lentis crassities v evanescat et pro determinatione lentis numerus arbitrarius λ loco k introducatur, erit ex § 91

$$P = \mu\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{v}{a\alpha}\right).$$

et $i = 1$, ex quo loco citato etiam ipsa lentis constructio est petenda.

COROLLARIUM 1

176. Si igitur lens fuerit data, locus oculi post lentem ita definitur, ut debeat esse distantia $BO = O = \alpha + l$, existente l distantia oculi iusta; sin autem locus oculi detur, pro lentis constructione distantia determinatrix α ita capi debet, ut sit $\alpha = O - l$.

COROLLARIUM 2

177. Quare si oculus ita fuerit comparatus, ut exigat distantiam iustam $l = \infty$, fiet $\alpha = -\infty$, et mensura confusionis erit $= -\frac{1}{4}iux^3 \cdot P$ seu $= \frac{1}{4}iux^3 \cdot P$, quia signum $-$ nihil mutat in magnitudine circellorum confusionem producentium.

COROLLARIUM 3

178. Etsi ergo hoc casu, quo $\alpha = -\infty$, spatium diffusionis Ff est infinitum, tamen inde confusio in visione orta est finita, quia hoc non obstante valor ipsius P manet finitus: erit enim

$$P = \frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{ii}\left(\frac{n}{a} + \frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{k+v}\right)^2 - \frac{8ii}{(k-v)^3}\right).$$

Radius autem faciei posterioris fit $= -\frac{(n-1)}{2n}(k - v)$.

modo maiore gradu confusionis contenti esse soleamus, modo autem minorem gradum exigamus; quas circumstantias, cum ad praxin propius accedemus, accuratius sumus examinaturi. Ceterum notandum est pro intervallo u, quo quasi profunditas oculi exhibetur, unum circiter pollicem assumi posse, quae quidem mensura fere erit arbitraria, cum deinceps limites confusionis per experientiam constituemus.

PROBLEMA 3

175. *Si oculus per unicam lentem obiectum aspiciat, ita ut imago visa ab oculo in distantia iusta reperiatur, definire confusionem, qua visio afficietur.*

SOLUTIO

Sit distantia obiecti $E\varepsilon$ (Fig. 3) ante lentem $AE = a$, imaginis vero principalis $F\zeta$ post lentem $BF = \alpha$, lentisque crassities $AB = v$, quan-

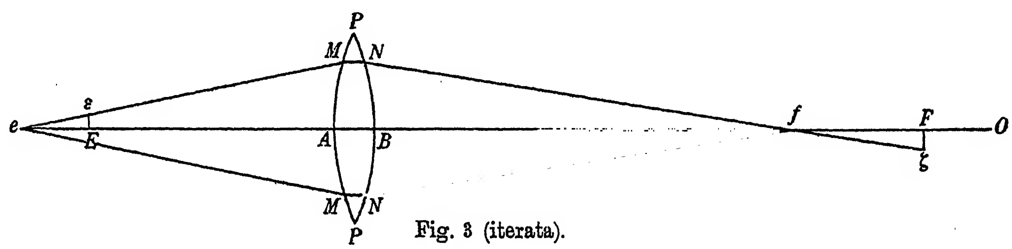

Fig. 3 (iterata).

titas vero arbitraria, qua cum binis distantiis determinatricibus a et α lentis facies determinatur, sit $= k$; ponatur autem brevitatis gratia $\frac{k-v}{k+v} = i$. Tum autem posita ratione refractionis $= n$ debet esse lentis PP

$$\text{radius faciei anterioris} = \frac{(n-1)a(k+v)}{k+v+2na},$$

$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{(n-1)\alpha(k-v)}{k-v-2n\alpha},$$

ac si semidiameter aperturae faciei anterioris sit $= x$, posterioris vero $> ix$, spatium diffusionis Ff erit $= P\alpha\alpha xx$, existente

$$P = \frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{ii}\left(\frac{n}{a} + \frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{k+v}\right)^2 + ii\left(\frac{n}{\alpha} - \frac{2}{k-v}\right)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{k-v}\right)^2\right),$$

radiorum vero in f concurrentium inclinatio ad axem $= i \cdot \frac{x}{\alpha}$. His, quae § 86 sunt stabilita, praemissis, sit distantia oculi post lentem $BO = O$, et quia

imago $F\zeta$ ante oculum in distantia iusta existere assumitur, erit $O = \alpha + l$ ideoque $\alpha = O - l$, si locus oculi ut datus consideretur. Hinc ergo habebimus $V = P\alpha\alpha$ et $\mathfrak{B} = \frac{i}{\alpha}$ ideoque $\mathfrak{B}V = i\alpha P$. Consequenter radius circellorum in oculo confusionem metientium seu, ut in posterum loquemur, mensura confusionis erit

$$= \frac{u}{4l} \cdot i\alpha x^3 \cdot P = \frac{iu}{4l}(O - l)x^3 P.$$

Si lentis crassities v evanescat et pro determinatione lentis numerus arbitrarius λ loco k introducatur, erit ex § 91

$$P = \mu\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\nu}{a\alpha}\right).$$

et $i = 1$, ex quo loco citato etiam ipsa lentis constructio est petenda.

COROLLARIUM 1

176. Si igitur lens fuerit data, locus oculi post lentem ita definitur, ut debeat esse distantia $BO = O = \alpha + l$, existente l distantia oculi iusta; sin autem locus oculi detur, pro lentis constructione distantia determinatrix α ita capi debet, ut sit $\alpha = O - l$.

COROLLARIUM 2

177. Quare si oculus ita fuerit comparatus, ut exigat distantiam iustam $l = \infty$, fiet $\alpha = -\infty$, et mensura confusionis erit $= -\frac{1}{4}iux^3 \cdot P$ seu $= \frac{1}{4}iux^3 \cdot P$, quia signum $-$ nihil mutat in magnitudine circellorum confusionem producentium.

COROLLARIUM 3

178. Etsi ergo hoc casu, quo $\alpha = -\infty$, spatium diffusionis Ff est infinitum, tamen inde confusio in visione orta est finita, quia hoc non obstante valor ipsius P manet finitus: erit enim

$$P = \frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{ii}\left(\frac{n}{a} + \frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{k+v}\right)^2 - \frac{8ii}{(k-v)^3}\right).$$

Radius autem faciei posterioris fit $= -\frac{(n-1)}{2n}(k-v)$.

At si loco k et k' introducantur numeri λ et λ', erit

$$P=\mu\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right) \quad \text{et} \quad Q=\mu\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu}{b\beta}\right)$$

existente $\mu=0{,}938191$ et $\nu=0{,}232692$.

COROLLARIUM 3

183. Eodem autem hoc casu constructio binarum lentium ita se habebit:

Radius faciei

$$\text{Pro lente } PP \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{\varrho\alpha+\sigma a\pm\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{\varrho a+\sigma\alpha\mp\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } QQ \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{b\beta}{\varrho\beta+\sigma b\pm\tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{b\beta}{\varrho b+\sigma\beta\mp\tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \end{cases}$$

existente $\varrho=0{,}190781$, $\sigma=1{,}627401$ et $\tau=0{,}905133$.

PROBLEMA 5

184. *Si oculus per tres lentes PP, QQ et RR* (Fig. 6) *obiectum $E\varepsilon$ aspiciat, ita ut imago per eas repraesentata $H\theta$ in distantia iusta $OH=l$ ab oculo O sit remota, definire confusionem, qua visio afficietur.*

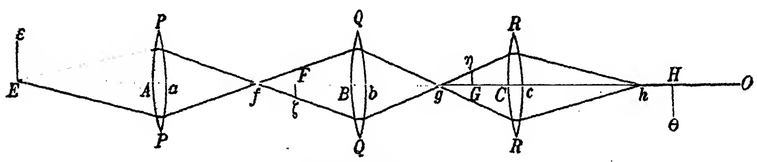

Fig. 6 (iterata).

SOLUTIO

Positis duabus prioribus lentibus PP et QQ ut in problemate praecedente indeque determinatis valoribus P et Q, cadat imago per has duas lentes repraesentata principalis in $G\eta$, post quam tertia lens RR ita collo-

cata sit, ut sint eius distantiae determinatrices $CG = c$, $cH = \gamma$, crassities $Cc = v''$ et quantitas arbitraria $= k''$, ut sit:

$$\text{radius faciei anterioris } = \frac{(n-1)c(k''+v'')}{k''+v''+2nc},$$

$$\text{radius faciei posterioris } = \frac{(n-1)\gamma(k''-v'')}{k''-v''-2n\gamma}.$$

Tum vero posito $\frac{k''-v''}{k''+v''} = i''$ ponatur

$$R = \frac{n}{2(n-1)^2}\left(\left(\frac{n}{c}+\frac{2}{k''+v''}\right)\left(\frac{1}{i''c}+\frac{2}{k''-v''}\right)^2+\left(\frac{n}{\gamma}-\frac{2}{k''-v''}\right)\left(\frac{i''}{\gamma}-\frac{2}{k''+v''}\right)^2\right),$$

atque iam spatium diffusionis erit

$$Hh = \gamma\gamma xx\left(\frac{1}{i'i'\cdot i''i''}\cdot\frac{\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc}P+\frac{ii}{i''i''}\cdot\frac{bb\beta\beta}{\alpha\alpha cc}Q+ii\cdot i'i'\cdot\frac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta}R\right),$$

quod est valor ipsius Vxx. Radiorum vero in h concurrentium inclinatio ad axem est

$$ii'i''\cdot\frac{bcx}{\alpha\beta\gamma} = \mathfrak{V}x.$$

Sit iam oculus in O, ac ponatur eius distantia post lentem $RR = O$, erit $O = \gamma + l$ ideoque $\gamma = O - l$. Hinc mensura confusionis in oculo ortae colligitur

$$\frac{1}{4}ii'i''u\left(1-\frac{O}{l}\right)\frac{bc}{\alpha\beta}x^3\left(\frac{1}{i'i'\cdot i''i''}\cdot\frac{\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc}P+\frac{ii}{i''i''}\cdot\frac{bb\beta\beta}{\alpha\alpha cc}Q+ii\cdot i'i'\cdot\frac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta}R\right).$$

COROLLARIUM 1

185. Hic iterum ut ante patet, si fuerit $l = \infty$ ideoque et $\gamma = -\infty$, quo casu diffusionis spatium in infinitum extenditur, mensuram confusionis terminis finitis contineri, quod etiam locum habet pro quovis lentium numero.

COROLLARIUM 2

186. Si lentium crassities pro evanescente habeatur, ob $i = 1$, $i' = 1$, $i'' = 1$, mensura confusionis ita simplicius exprimetur, ut sit

$$= \frac{1}{4}u\left(1-\frac{O}{l}\right)\frac{bc}{\alpha\beta}x^3\left(\frac{\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc}P+\frac{bb\beta\beta}{\alpha\alpha cc}Q+\frac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta}R\right).$$

At hoc casu loco k, k', k'' introductis numeris λ, λ', λ'' erit

$$P = \mu\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)$$

$$Q = \mu\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu}{b\beta}\right)$$

$$R = \mu\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda''\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)^2+\frac{\nu}{c\gamma}\right).$$

COROLLARIUM 3

187. Eodem vero casu constructio lentium per istos numeros λ, λ', λ'' ita erit dirigenda, ut sit

Radius faciei

$$\text{Pro lente } PP \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{\varrho\alpha+\sigma a\pm\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{\varrho a+\sigma\alpha\mp\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } QQ \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{b\beta}{\varrho\beta+\sigma b\pm\tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{b\beta}{\varrho b+\sigma\beta\mp\tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } RR \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{c\gamma}{\varrho\gamma+\sigma c\pm\tau(c+\gamma)\sqrt{(\lambda''-1)}} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{c\gamma}{\varrho c+\sigma\gamma\mp\tau(c+\gamma)\sqrt{(\lambda''-1)}}. \end{cases}$$

SCHOLION

188. Hinc satis manifestum est, quemadmodum hae formulae pro pluribus lentibus progrediantur; verum antequam eas exponam, conveniet alias quoque circumstantias, quae hinc facillime deducuntur, perpendi, scilicet magnitudinem obiecti visam et copiam radiorum a singulis eius punctis in oculum transmissorum, ut hae simul cum confusione visionis deinceps coniunctim pro quovis lentium numero exhiberi queant; quo pacto plures taediosas repetitiones evitabimus. Duae autem res ex hactenus allatis facile de-

finiri possunt, quarum altera est quantitas, qua imago obiecti per lentes repraesentata ab oculo cernitur, quae quantitas aestimanda est ex angulo, sub quo imago videtur, ut is deinceps comparari possit cum eo angulo, sub quo ipsum obiectum in data distantia a nudo oculo spectaretur, unde, qua ratione magnitudo per lentes visa augeatur, intelligetur. Altera res in copia radiorum a singulis obiecti punctis in oculum transmissorum versatur, qua claritas visione percepta continetur, a quolibet scilicet puncto conus seu cylindrus radiosus in oculum ingreditur; qui si pupillam penitus expleat, claritas ad summum gradum erit evecta, nisi forte maiori illustratione ipsi obiecto maius lumen concilietur. At si sectio illius coni aut cylindri, qua in oculum intrat, minor fuerit pupilla, in eadem ratione claritas decrescet; quod cum in omnibus instrumentis dioptricis, quibus magnitudinem visam vehementer augere propositum est, usu venire soleat, plurimum intererit amplitudinem illius coni seu cylindri, qua in oculum penetrat, accurate determinasse.

PROBLEMA 6

189. *Definire quantitatem, sub qua quaevis obiecti portio per lentes quotcunque ab oculo in distantia iusta ab imagine ultima remoto cernetur.*

SOLUTIO

Sit z linea in obiecto concepta, quae, quanta per lentes oculo sit appparitura, definiri oporteat. Ostensum autem est in praecedentibus, quotcunque fuerint lentes, imaginem principalem huius lineae iterum esse lineam, cuius longitudo ad z certam teneat rationem a distantiis determinatricibus lentium et numeris i, i', i'', i''' etc. pendentem (§ 86). Sit ergo haec longitudo imaginis $= Mz$, quae, cum ab oculo in distantia l remoto aspiciatur, apparebit sub angulo $= \frac{Mz}{l}$, vel cuius tangens potius sit $= \frac{Mz}{l}$; sed quia hic angulus rarissime ultra aliquot gradus assurgere solet, tangens tuto pro ipso arcu assumitur. Effigies autem, quae ab hac linea Mz in oculo exprimitur, erit $= \frac{Muz}{l}$; hic enim cogitationes a confusione abstraho, qua utique fit, ut effigies maior imprimatur, propterea quod singula puncta circellis exhibentur. Iam positis iisdem lentium determinationibus, quibus supra § 86 sum usus, pro vario lentium numero angulus, sub quo linea z in obiecto sumta cernetur, ita se habebit:

	Angulus visionis	
Pro unica lente	$\frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{z}{l}$	situ inverso
pro duabus lentibus	$\frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}\cdot\frac{z}{l}$	situ erecto
pro tribus lentibus	$\frac{1}{ii'i''}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\cdot\frac{z}{l}$	situ inverso
pro quatuor lentibus	$\frac{1}{ii'i''i'''}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd}\cdot\frac{z}{l}$	situ erecto
	etc.	

Scilicet si hae formulae sint positivae, oculus lineam z situ sive erecto sive inverso videbit, prout est notatum; sin autem fuerint negativae, situm indicatum in contrarium verti oportet.

COROLLARIUM 1

190. Si eadem obiecti linea z in distantia $=h$ ab oculo nudo cerneretur, ea apparitura esset sub angulo $=\frac{z}{h}$, unde perspicitur, quanto ea vel maior vel minor per lentes videatur.

COROLLARIUM 2

191. Si distantia oculi a postrema lente ponatur $=O$, erit casu unius lentis $\alpha=O-l$ ideoque $\frac{\alpha}{l}=-\left(1-\frac{O}{l}\right)$, unde angulus opticus lineae obiecti z respondens erit $=\frac{1}{i}\left(1-\frac{O}{l}\right)\frac{z}{a}$ pro situ erecto, quia signum mutavimus.

COROLLARIUM 3

192. Simili modo casu duarum lentium ob $\beta=O-l$ erit iste angulus $=\frac{1}{ii'}\left(1-\frac{O}{l}\right)\frac{\alpha z}{ab}$ pro situ inverso.

Casu vero trium lentium ob $\gamma=O-l$ erit iste angulus $=\frac{1}{ii'i''}\left(1-\frac{O}{l}\right)\frac{\alpha\beta z}{abc}$ pro situ erecto.

Casu quatuor lentium ob $\delta=O-l$ erit iste angulus $\frac{1}{ii'i''i'''}\left(1-\frac{O}{l}\right)\frac{\alpha\beta\gamma z}{abcd}$ pro situ inverso, et ita porro pro pluribus lentibus.

SCHOLION

193. Hinc etiam modus se offert confusionem ob lentium aperturam in oculo natam distinctius aestimandi. Scilicet cum singula obiecti puncta in oculo exprimantur circulis, quorum radius est $=\frac{u}{4l}\mathfrak{B}Vx^3$, verus autem circulus, cuius radius $=z$, oculo in distantia l expositus in oculo referatur circulo, cuius radius $=\frac{u}{l}z$, singula puncta illius obiecti per lentes spectati aeque magna apparebunt ac orbes circulares radii $z=\frac{1}{4}\mathfrak{B}Vx^3$, si in distantia ab oculo $=l$ spectarentur. Vel cum horum orbium semidiameter apparens sit $=\frac{z}{l}$, ob confusionem singula obiecti puncta instar circulorum videbuntur, quorum semidiameter apparens esset $=\frac{1}{4l}\mathfrak{B}Vx^3$. In expressionibus igitur ante pro confusione inventis deleatur quantitas u, et habebitur semidiameter apparens circulorum confusionem exprimentium. Hinc iudicari poterit, quam parva esse debeat confusio, ut non amplius sentiatur; scilicet si oculus non amplius percipere valeat spatium circulare, cuius semidiameter esset 1″ seu $\frac{1}{60^3}$ pars radii circiter, evidens est, si fuerit nostra expressio $\frac{1}{4l}\mathfrak{B}Vx^3=\frac{1}{60^3}$, confusionem fore imperceptibilem. Ac experientiam consulentes deprehendimus multo maiores angulos non amplius percipi posse, ita ut confusio non sit metuenda, etiamsi expressio $\frac{1}{4l}\mathfrak{B}Vx^3$ notabiliter maior fuerit quam $\frac{1}{60^3}$; ne autem hic temere quicquam statuamus, ponamus limitem, quem formula $\frac{1}{4l}\mathfrak{B}Vx^3$ excedere non debeat, esse $=\frac{1}{4\varkappa^3}$, ita ut esse oporteat $\frac{1}{l}\mathfrak{B}Vx^3<\frac{1}{\varkappa^3}$. Postea igitur ad praxin descendentes poterimus pro $\varkappa$ numerum vel 40 vel minorem assumere, prout experientia quovis casu postulaverit. Quod si ergo hoc modo confusionis rationem habeamus, profunditas oculi u non amplius in computum ingredietur.

DEFINITIO 3

194. *Semidiameter confusionis est semidiameter apparens circuli, qui ab oculo aeque magnus videtur, ac singula obiecti puncta ipsi ob confusionem apparent.*

COROLLARIUM

195. Inveniemus igitur facile semidiametrum confusionis, si formulas supra pro confusione repertas per profunditatem oculi u dividamus, quo pacto eae formulae ad numeros absolutos reducentur.

DEFINITIO 4

196. *Multiplicatio per lentes producta ex ratione quantitatis, qua obiecta per lentes spectantur, ad quantitatem, qua eadem obiecta in data distantia ab oculo nudo cernerentur, aestimatur. Exponens autem multiplicationis invenitur, si magnitudo, qua linea quaecunque in obiecto concepta per lentes videtur, dividatur per magnitudinem, qua eadem linea in data distantia ab oculo nudo spectata esset apparitura.*

COROLLARIUM 1

197. Involvit ergo diiudicatio multiplicationis distantiam quandam fixam, in qua eadem obiecta a nudo oculo aspici assumimus; quae prout diversa assumatur, multiplicatio alio atque alio modo exprimetur.

COROLLARIUM 2

198. Si haec distantia fixa, ex qua multiplicatio diiudicatur, ponatur $=h$ et exponens multiplicationis $=m$, sit linea quaepiam in obiecto concepta $=z$, quae ergo nudo oculo in distantia h appareret sub angulo $=\frac{z}{h}$; eadem autem linea per lentes spectetur sub angulo $=\frac{Mz}{l}$ (§ 88), ex quo erit exponens multiplicationis $m=\frac{Mh}{l}$.

COROLLARIUM 3

199. In ratione ergo $m:1$ dimensiones lineares per lentes augeri sunt censendae; unde superficies auctae apparebunt in ratione $mm:1$ et ipsa corpora in ratione $m^3:1$. Cum exponente autem multiplicationis coniungi debet situs, quo obiecta apparent, sive is sit erectus sive inversus.

SCHOLION

200. Distantia haec fixa h, ad quam multiplicatio refertur, non eodem modo perpetuo assumi solet, quippe quod etiam pro diversitate obiectorum omnino fieri non posset. Nam si per lentes obiecta valde remota veluti coelestia contuemur, quoniam ea nunquam in distantia modica spectare solemus, convenit utique magnitudinem per lentes visam cum ea comparare, qua in ea ipsa a nobis distantia nudis oculis cernerentur: ideoque his casibus

distantia fixa h ipsi distantiae a, qua a lentibus obiecta sunt remota, aequalis constitui solet. Scilicet si distantia a fuerit valde magna, qui est casus Telescopiorum, statuitur $h = a$, et magnitudo per haec instrumenta visa cum magnitudine per nudos oculos visa in eadem distantia commodissime comparatur. Sic de Telescopiis dicitur, quoties diametri corporum coelestium multiplicentur, eoque casu littera m exponentem huius rationis indicabit. Sin autem obiecta propiora contemplamur, qui est usus Microscopiorum, ea plerumque ita prope ad instrumentum admoventur, ut in tam exigua distantia nudis oculis nunquam distincte cerni possent: neque ergo his casibus statui $h = a$ conveniret. Aliam ergo rationem ineundo pro h sumi solet eiusmodi distantia modica, in qua obiecta commode ac distincte cernere liceat, quae etsi utique pro diversa oculorum indole diversa sumi deberet, tamen, ut aliquid fixi statuatur, pro h distantia 8 pollicum utpote maximae oculorum parti conveniens accipi solet, ita ut his casibus definiamus, quoties huiusmodi obiecta maiora *appareant*, quam si eadem nudis oculis in distantia 8 digitorum aspicerentur. Interim tamen si multiplicatio ad hanc distantiam fuerit relata, non difficile erit eam ad quamlibet aliam referre, ita ut haec hypothesis naturam horum instrumentorum afficere non sit censenda.

PROBLEMA 7

201. *Si obiectum per lentes quotcunque aspiciatur, definire amplitudinem coni seu cylindri luminosi, qui a singulis obiecti punctis in oculum transmittitur.*

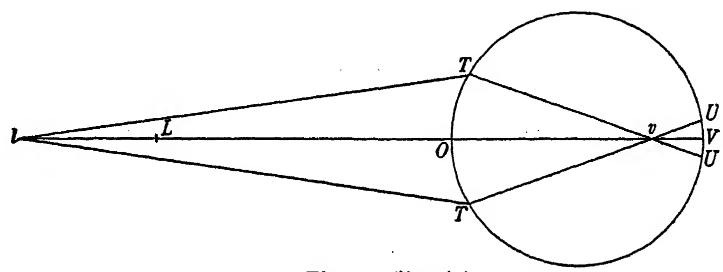

Fig. 10 (iterata).

SOLUTIO

Reperiatur ut supra oculus in distantia iusta l (Fig. 10) post imaginem postremam per lentes repraesentatam, quae etsi est per spatium aliquod Ll diffusa, hic tamen a confusione inde nata mentem abstrahimus, quoniam confusionem

iam seorsim determinavimus. Ex puncto igitur l oculum versus diffunditur conus luminosus, cuius radii extremi ad axem inclinati sunt angulo OlT, quem posuimus supra $= \mathfrak{B}x$. Huius igitur coni sectio circa ingressum in oculum consideretur, cuius semidiameter erit $= \mathfrak{B}lx$, unde pro vario lentium numero hic semidiameter sequenti modo definietur:

Pro unica lente	$il\dfrac{x}{\alpha}$
pro duabus lentibus	$ii'l\dfrac{bx}{\alpha\beta}$
pro tribus lentibus	$ii'i''l\dfrac{bcx}{\alpha\beta\gamma}$
pro quatuor lentibus	$ii'i''i'''l\dfrac{bcdx}{\alpha\beta\gamma\delta}$

etc.;

hicque perinde est, sive hae formulae sint positivae sive negativae, quia circulus, sive radio positivo sive negativo describatur, eiusdem prodit magnitudinis.

COROLLARIUM 1

202. Si iste semidiameter $\mathfrak{B}lx$ maior fuerit semidiametro pupillae, tota pupillae apertura radiis impletur, neque propterea visio clarior procurari poterit, nisi forte ipsum obiectum fortiori illustratione splendidius reddatur.

COROLLARIUM 2

203. Sin autem haec quantitas $\mathfrak{B}lx$ minor fuerit semidiametro pupillae, claritatis mensura existet, quae eo maior erit, quo maior fuerit ista quantitas: dum contra minuta hac quantitate claritas tam exigua evadere potest, ut non amplius sensui visus excitando sufficiat.

DEFINITIO 5

204. *Gradus claritatis per lentes perceptae commodissime definietur semidiametro coni luminosi, qui a quovis obiecti puncto in oculum transmittitur.*

COROLLARIUM 1

205. Gradus ergo claritatis definitur quantitate supra inventa $\mathfrak{B}lx$, ita ut si gradum claritatis ponamus $= y$, habeamus $y = \mathfrak{B}lx$, quo cognito facillime iudicabimus, quonam gradu visio sit clara habenda.

COROLLARIUM 2

206. Scilicet si semidiametrum pupillae ponamus $= \omega$, quamdiu fuerit $y > \omega$, claritate plena fruemur, quae nullius augmenti est capax, nisi forte ipsam pupillam magis dilatare valeamus.

COROLLARIUM 3

207. At si fuerit $y < \omega$, claritatem utique minorem percipiemus; ac si claritatem plenam unitate designemus, claritas ex casu $y < \omega$ resultans erit $= \frac{yy}{\omega\omega}$, propterea quod copia radiorum in oculum immissorum est ut quadratum semidiametri y.

COROLLARIUM 4

208. Quod si gradus claritatis y eousque decrescat, ut copia radiorum nimis sit parva, quam ut sensum visus excitare possit, nihil ob summam caliginem percipi poterit, unde manifestum est ad visionem requiri, ut gradus claritatis certum quempiam limitem superet.

SCHOLION

209. Tam in Telescopiis quam Microscopiis maxime necesse est, ut obiecta certo claritatis gradu exhibeantur, ne repraesentatio nimis fiat obscura. Hic autem gradus plurimum a lumine proprio obiectorum pendet, quae quo fuerint illustriora, eo minor claritatis gradus iis satis clare videndis sufficit; ideoque stellas illustriores contemplantes minori gradu claritatis contenti esse possumus. terrestria vero obiecta multo maiorem claritatis gradum postulant.
haec ad omnes casus accommodare valeamus, gradum claritatis hic
definita y contentum in computum sum ducturus. Quamobrem h
tiplicatione et claritate praemissis haec duo elementa simul cum
pro quovis lentium numero exhibebo: ac primo quidem non negle(
crassitie, tum vero eadem seorsim lentium crassitie neglecta exponi

PROBLEMA 8

210. *Si oculus per quotcunque lentes PP, QQ, RR, SS etc. obiectum $E\varepsilon$ aspiciat, ita ut imago postrema per eas repraesentata ante oculum in iusta distantia $= l$ reperiatur, determinare tam multiplicationem et claritatem quam confusionem, qua visio perturbabitur.*

SOLUTIO

Quotcunque fuerint lentes, sint pro singulis distantiae determinatrices ut et crassities cum quantitate arbitraria, ut sequitur:

Pro lente		Distantiae determinatrices	Crassities	Quantitas arbitraria
prima	PP	$EA = a, \ aF = \alpha$	$Aa = v$	k
secunda	QQ	$FB = b, \ bG = \beta$	$Bb = v'$	k'
tertia	RR	$GC = c, \ cH = \gamma$	$Cc = v''$	k''
quarta	SS	$HD = d, \ dI = \delta$	$Dd = v'''$	k'''

etc.;

atque hinc posita ratione refractionis $\frac{31}{20} = n$ constructio lentium ita se habebit:

Pro lente		Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris
prima	PP	$\dfrac{(n-1)a(k+v)}{k+v+2na}$	$\dfrac{(n-1)\alpha(k-v)}{k-v-2n\alpha}$
secunda	QQ	$\dfrac{(n-1)b(k'+v')}{k'+v'+2nb}$	$\dfrac{(n-1)\beta(k'-v')}{k'-v'-2n\beta}$
tertia	RR	$\dfrac{(n-1)c(k''+v'')}{k''+v''+2nc}$	$\dfrac{(n-1)\gamma(k''-v'')}{k''-v''-2n\gamma}$
quarta	SS	$\dfrac{(n-1)d(k'''+v''')}{k'''+v'''+2nd}$	$\dfrac{(n-1)\delta(k'''-v''')}{k'''-v'''-2n\delta}$

etc.

Tum posito brevitatis gratia:

$$\frac{k-v}{k+v} = i, \quad \frac{k'-v'}{k'+v'} = i', \quad \frac{k''-v''}{k''+v''} = i'', \quad \frac{k'''-v'''}{k'''+v'''} = i''' \text{ etc.,}$$

si aperturae primae lentis in facie anteriori semidiameter fuerit $= x$, tam pro facie posteriori quam pro utraque facie singularum lentium sequentium

aperturae maiores esse debent vel saltem non minores, quam sequens tabula ostendit:

Pro lente		Semidiameter aperturae in facie anteriori	posteriori
prima	PP	x	ix
secunda	QQ	$i\cdot\frac{bx}{\alpha}$	$ii'\cdot\frac{bx}{\alpha}$
tertia	RR	$ii'\cdot\frac{bcx}{\alpha\beta}$	$ii'i''\cdot\frac{bcx}{\alpha\beta}$
quarta	SS	$ii'i''\cdot\frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}$	$ii'i''i'''\cdot\frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}$
		etc.	

Denique ad abbreviandum ponatur:

$$P=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\left(\frac{n}{a}+\frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{1}{ia}+\frac{2}{k-v}\right)^2+\left(\frac{n}{\alpha}-\frac{2}{k-v}\right)\left(\frac{i}{\alpha}-\frac{2}{k+v}\right)^2\right)$$

$$Q=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\left(\frac{n}{b}+\frac{2}{k'+v'}\right)\left(\frac{1}{i'b}+\frac{2}{k'-v'}\right)^2+\left(\frac{n}{\beta}-\frac{2}{k'-v'}\right)\left(\frac{i'}{\beta}-\frac{2}{k'+v'}\right)^2\right)$$

$$R=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\left(\frac{n}{c}+\frac{2}{k''+v''}\right)\left(\frac{1}{i''c}+\frac{2}{k''-v''}\right)^2+\left(\frac{n}{\gamma}-\frac{2}{k''-v''}\right)\left(\frac{i''}{\gamma}-\frac{2}{k''+v''}\right)^2\right)$$

$$S=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\left(\frac{n}{d}+\frac{2}{k'''+v'''}\right)\left(\frac{1}{i'''d}+\frac{2}{k'''-v'''}\right)^2+\left(\frac{n}{\delta}-\frac{2}{k'''-v'''}\right)\left(\frac{i'''}{\delta}-\frac{2}{k'''+v'''}\right)^2\right)$$

etc.

His positis ponamus oculum in distantia $= O$ ab ultima lente locari, ita ut post imaginem ultimam reperiatur in distantia $= l$, magnitudinem autem visam comparari cum magnitudine, qua idem obiectum nudo oculo in distantia fixa $= h$ cerneretur, ac ponatur exponens multiplicationis $= m$.

Deinde pro claritate sit gradus claritatis $= y$, ita ut y indicet semidiametrum coni luminosi in oculum intrantis.

Confusio autem aestimetur per semidiametrum confusionis supra (§ 194) definitum.

Iam pro quovis lentium numero hae tres res ita se habebunt:

I. Pro unica lente $O = \alpha + l$

1. Exponens multiplicationis $m = \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha h}{al}$ situ inverso
2. Gradus claritatis $y = il\cdot\frac{x}{\alpha}$
3. Semidiameter confusionis $= \frac{1}{4}i\frac{\alpha}{l}x^3\cdot P.$

II. Pro duabus lentibus $O=\beta+l$

1. Exponens multiplicationis $m=\frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta h}{abl}$ situ erecto
2. Gradus claritatis $y=ii'l\cdot\frac{bx}{\alpha\beta}$
3. Semidiameter confusionis $=\frac{1}{4}ii'\cdot\frac{\beta}{l}\cdot\frac{b}{\alpha}x^3\left(\frac{1}{i'i'}\cdot\frac{\alpha\alpha}{bb}P+ii\cdot\frac{bb}{\alpha\alpha}Q\right)$.

III. Pro tribus lentibus $O=\gamma+l$

1. Exponens multiplicationis $m=\frac{1}{ii'i''}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma h}{abcl}$ situ inverso
2. Gradus claritatis $y=ii'i''l\cdot\frac{bcx}{\alpha\beta\gamma}$
3. Semidiameter confusionis:

$$\frac{1}{4}ii'i''\cdot\frac{\gamma}{l}\cdot\frac{bc}{\alpha\beta}x^3\left(\frac{1}{i'i'\cdot i''i''}\cdot\frac{\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc}P+\frac{ii}{i''i''}\cdot\frac{bb\beta\beta}{\alpha\alpha cc}Q+ii\cdot i'i'\cdot\frac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta}R\right).$$

IV. Pro quatuor lentibus $O=\delta+l$

1. Exponens multiplicationis $m=\frac{1}{ii'i''i'''}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma\delta h}{abcdl}$ situ erecto
2. Gradus claritatis $y=ii'i''i'''l\cdot\frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma\delta}$
3. Semidiameter confusionis:

$$\frac{1}{4}ii'i''i'''\cdot\frac{\delta}{l}\cdot\frac{bcd}{\alpha\beta\gamma}x^3\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{i'i'\cdot i''i''\cdot i'''i'''}\cdot\frac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{bbccdd}P+\frac{ii}{i''i''i'''i'''}\cdot\frac{bb\beta\beta\gamma\gamma}{\alpha\alpha ccdd}Q\\&+\frac{ii\cdot i'i'}{i'''i'''}\cdot\frac{bbcc\gamma\gamma}{\alpha\alpha\beta\beta dd}R+ii\cdot i'i'\cdot i''i''\cdot\frac{bbccdd}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}S\end{aligned}\right\}$$

V. Pro quinque lentibus $O=\varepsilon+l$

1. Exponens multiplicationis $m=\frac{1}{ii'i''i'''i''''}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon h}{abcdel}$ situ inverso
2. Gradus claritatis $y=ii'i''i'''i''''l\cdot\frac{bcdex}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$
3. Semidiameter confusionis:

$$\frac{1}{4}ii'i''i'''i''''\cdot\frac{\varepsilon}{l}\cdot\frac{bcde}{\alpha\beta\gamma\delta}x^3\left\{\begin{aligned}&+\frac{1}{i'i'\cdot i''i''\cdot i'''i'''\cdot i''''i''''}\cdot\frac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}{bbccddee}P\\&+\frac{ii}{i''i''\cdot i'''i'''\cdot i''''i''''}\cdot\frac{bb\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}{\alpha\alpha ccddee}Q\\&+\frac{ii\cdot i'i'}{i'''i'''\cdot i''''i''''}\cdot\frac{bbcc\gamma\gamma\delta\delta}{\alpha\alpha\beta\beta ddee}R\\&+\frac{ii\cdot i'i'\cdot i''i''}{i''''i''''}\cdot\frac{bbccdd\delta\delta}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma ee}S\\&+ii\cdot i'i'\cdot i''i''\cdot i'''i'''\cdot\frac{bbccddee}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}T\end{aligned}\right\}$$

atque hinc etiam progressus ad plures lentes est manifestus.

COROLLARIUM 1

211. His omnibus casibus evidens est fore generatim $my = \frac{hx}{a}$. Datis scilicet multiplicatione m cum claritate y statim definitur apertura primae lentis nempe $x = my \cdot \frac{a}{h}$. Quo maior scilicet tam multiplicatio quam claritas desideratur, eo maiorem esse oportet aperturam lentis primae.

COROLLARIUM 2

212. Quum autem x maius accipere non liceat, quam ut confusio infra certum limitem contineatur, dato x cum exponente multiplicationis m definitur claritatis gradus $y = \frac{hx}{ma}$, unde patet reliquis paribus, quo maior multiplicatio exigatur, eo minori claritate contentos nos esse oportere.

COROLLARIUM 3

213. Inprimis autem hic observandum est has formulas aeque negotium conficere, quamcunque crassitiem lentes habuerint. Evadent autem tractabiliores, si lentium crassities negligatur, qui casus seorsim tractari meretur.

PROBLEMA 9

214. *Iisdem positis, quae in problemate praecedente, si lentium crassities ut evanescens consideretur, determinare tam multiplicationem et claritatem quam confusionem, qua visio perturbabitur.*

SOLUTIO

Haec tractatio a praecedenti in isto differt, quod lentium crassities v, v', v'' etc. evanescant et loco quantitatum arbitrariarum k, k', k'' etc. numeri arbitrarii λ, λ', λ'' etc. in calculum introducantur. Ponatur ergo:

Pro lente		Distantiae determinatrices		Numerus arbitrarius
prima	PP	$EA = a$,	$aF = \alpha$	λ
secunda	QQ	$FB = b$,	$bG = \beta$	λ'
tertia	RR	$GC = c$,	$cH = \gamma$	λ''
quarta	SS	$HD = d$,	$dI = \delta$	λ'''
		etc.		

Hinc, si sit brevitatis gratia $\varrho = 0{,}190781$, $\sigma = 1{,}627401$ et $\tau = 0{,}905133$, lentium constructio ita est instituenda:

Pro lente		Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris
prima	PP	$\dfrac{a\alpha}{\varrho\alpha + \sigma a \pm \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda - 1)}}$	$\dfrac{a\alpha}{\varrho a + \sigma\alpha \mp \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda - 1)}}$
secunda	QQ	$\dfrac{b\beta}{\varrho\beta + \sigma b \pm \tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda' - 1)}}$	$\dfrac{b\beta}{\varrho b + \sigma\beta \mp \tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda' - 1)}}$
tertia	RR	$\dfrac{c\gamma}{\varrho\gamma + \sigma c \pm \tau(c+\gamma)\sqrt{(\lambda'' - 1)}}$	$\dfrac{c\gamma}{\varrho c + \sigma\gamma \mp \tau(c+\gamma)\sqrt{(\lambda'' - 1)}}$
quarta	SS	$\dfrac{d\delta}{\varrho\delta + \sigma d \pm \tau(d+\delta)\sqrt{(\lambda''' - 1)}}$	$\dfrac{d\delta}{\varrho d + \sigma\delta \mp \tau(d+\delta)\sqrt{(\lambda''' - 1)}}$.

Cum iam lentis primae PP semidiameter aperturae sit $= x$, et in qualibet lente utriusque faciei eadem sit ratio, ut omnes radii per primam ingressi simul per reliquas transmittantur, apertura reliquarum sequentes limites superare debet:

Semidiameter aperturae

$$\text{lentis secundae } QQ > \frac{b}{\alpha}x$$

$$\text{lentis tertiae } RR > \frac{bc}{\alpha\beta}x$$

$$\text{lentis quartae } SS > \frac{bcd}{\alpha\beta\gamma}x$$

etc.

Tum vero posito brevitatis ergo $\mu = 0{,}938191$ et $\nu = 0{,}232692$ statuatur:

$$P = \mu\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\nu}{a\alpha}\right), \quad Q = \mu\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \frac{\nu}{b\beta}\right),$$

$$R = \mu\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda''\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 + \frac{\nu}{c\gamma}\right), \quad S = \mu\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{\delta}\right)\left(\lambda'''\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{\delta}\right)^2 + \frac{\nu}{d\delta}\right) \text{ etc.}$$

Sit iam O distantia oculi post ultimam lentem, ita ut ab imagine postrema distet intervallo $= l$, comparetur magnitudo visa cum ea, qua idem obiectum in distantia fixa h nudo oculo cerneretur, sitque exponens multiplicationis $= m$ et gradus claritatis $= y$, quibus positis erit pro quovis lentium numero, ut sequitur:

I. Pro unica lente $O = \alpha + l$

1. Exponens multiplicationis $m = \frac{\alpha h}{al}$ situ inverso
2. Gradus claritatis $y = l \cdot \frac{x}{\alpha}$, hinc $my = \frac{hx}{a}$
3. Semidiameter confusionis $= \frac{\alpha}{4l} \cdot x^3 P$.

II. Pro duabus lentibus $O = \beta + l$

1. Exponens multiplicationis $m = \frac{\alpha\beta h}{abl}$ situ erecto
2. Gradus claritatis $y = l \cdot \frac{bx}{\alpha\beta}$, hinc $my = \frac{hx}{a}$
3. Semidiameter confusionis $= \frac{\beta}{4l} \cdot \frac{b}{\alpha} x^3 \left(\frac{\alpha\alpha}{bb} P + \frac{bb}{\alpha\alpha} Q\right)$.

III. Pro tribus lentibus $O = \gamma + l$

1. Exponens multiplicationis $m = \frac{\alpha\beta\gamma h}{abc\,l}$ situ inverso
2. Gradus claritatis $y = l \cdot \frac{bcx}{\alpha\beta\gamma}$, hinc $my = \frac{hx}{a}$
3. Semidiameter confusionis $= \frac{\gamma}{4l} \cdot \frac{bc}{\alpha\beta} x^3 \left(\frac{\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc} P + \frac{bb\beta\beta}{\alpha\alpha cc} Q + \frac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta} R\right)$

IV. Pro quatuor lentibus $O = \delta + l$

1. Exponens multiplicationis $m = \frac{\alpha\beta\gamma\delta h}{abcdl}$ situ erecto
2. Gradus claritatis $y = l \cdot \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma\delta}$, hinc $my = \frac{hx}{a}$
3. Semidiameter confusionis:

$$\frac{\delta}{4l} \cdot \frac{bcd}{\alpha\beta\gamma} x^3 \left(\frac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{bbccdd} P + \frac{bb\beta\beta\gamma\gamma}{\alpha\alpha ccdd} Q + \frac{bbcc\gamma\gamma}{\alpha\alpha\beta\beta dd} R + \frac{bbccdd}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma} S\right).$$

V. Pro quinque lentibus $O = \varepsilon + l$

1. Exponens multiplicationis $m = \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon h}{abcdel}$ situ inverso
2. Gradus claritatis $y = l \cdot \frac{bcdex}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$, hinc $my = \frac{hx}{a}$
3. Semidiameter confusionis:

$$\frac{\varepsilon}{4l} \cdot \frac{bcde}{\alpha\beta\gamma\delta} x^3 \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}{bbccddee} P + \frac{bb\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}{\alpha\alpha ccddee} Q + \frac{bbcc\gamma\gamma\delta\delta}{\alpha\alpha\beta\beta ddee} R \\ &+ \frac{bbccdd\delta\delta}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma ee} S + \frac{bbccddee}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta} T \end{aligned} \right\}$$

unde non difficile erit has formulas ad lentes etiam plures continuare.

COROLLARIUM 1

215. Lentes simplices adhibendo numeros λ, λ', λ'' etc. unitate minores accipi non possunt. Verum hic nihil obstat, quo minus loco lentium simplicium lentes duplicatae, triplicatae vel etiam quadruplicatae in usum vocentur, quo pacto in his formulis numeri λ, λ', λ'' etc. non solum infra unitatem diminui, sed ad nihilum usque perduci poterunt. Tum autem constructio lentium harum multiplicatarum ex superiori capite peti et ad distantias determinatrices hic positas accommodari debet.

COROLLARIUM 2

216. Veluti si pro lente prima PP debeat esse $\lambda = 0{,}191827$, hanc lentem ita ex duabus componi oportet, ut sit:

Pro lente	Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris
priori	$\dfrac{2a\alpha}{(2\varrho-\sigma)\alpha+\sigma a}$	$\dfrac{2a\alpha}{(2\sigma-\varrho)\alpha+\varrho a}$
posteriori	$\dfrac{2a\alpha}{\varrho\alpha+(2\sigma-\varrho)a}$	$\dfrac{2a\alpha}{\sigma\alpha+(2\varrho-\sigma)a}$.

COROLLARIUM 3

217. Sin autem velimus, ut pro lente prima sit $\lambda = 0{,}042165$, ea erit triplicanda, hoc modo:

Pro lente	Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris
priori	$\dfrac{3a\alpha}{(3\varrho-2\sigma)\alpha+\sigma a}$	$\dfrac{3a\alpha}{(3\sigma-2\varrho)\alpha+\varrho a}$
media	$\dfrac{3a\alpha}{(2\varrho-\sigma)\alpha+(2\sigma-\varrho)a}$	$\dfrac{3a\alpha}{(2\sigma-\varrho)\alpha+(2\varrho-\sigma)a}$
posteriori	$\dfrac{3a\alpha}{\varrho\alpha+(3\sigma-2\varrho)a}$	$\dfrac{3a\alpha}{\sigma\alpha+(3\varrho-2\sigma)a}$.

COROLLARIUM 4

218. At si pro lente prima requiratur $\lambda = -0{,}010216$, quadruplicata erit utendum ita construenda:

Pro lente	Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris
prima	$\dfrac{4a\alpha}{(4\varrho-3\sigma)\alpha+\sigma a}$	$\dfrac{4a\alpha}{(4\sigma-3\varrho)\alpha+\varrho a}$
secunda	$\dfrac{4a\alpha}{(3\varrho-2\sigma)\alpha+(2\sigma-\varrho)a}$	$\dfrac{4a\alpha}{(3\sigma-2\varrho)\alpha+(2\varrho-\sigma)a}$
tertia	$\dfrac{4a\alpha}{(2\varrho-\sigma)\alpha+(3\sigma-2\varrho)a}$	$\dfrac{4a\alpha}{(2\sigma-\varrho)\alpha+(3\varrho-2\sigma)a}$
quarta	$\dfrac{4a\alpha}{\varrho\alpha+(4\sigma-3\varrho)a}$	$\dfrac{4a\alpha}{\sigma\alpha+(4\varrho-3\sigma)a}$.

COROLLARIUM 5

219. Simili autem modo lens secunda QQ ex suis distantiis determinatricibus b et β per multiplicationem erit construenda, numerusque ei respondens λ' debet esse vel 0,191827 vel 0,042165 vel $-0{,}010216$; quod idem de reliquis lentibus est intelligendum.

SCHOLION 1

220. Alias lentium species hic nollem in praxi adhiberi, cum hae solae sine metu enormis erroris confici queant; tum vero, etsi aliae ab his non admodum discrepantes fere aequo successu in praxin introduci possent, tamen, quia discrimen non admodum est notabile, iis facile carere poterimus. Cum igitur sit $\varrho = 0{,}190781$ et $\sigma = 1{,}627401$ ideoque

$$\begin{aligned}
\varrho &= 0{,}190781, & \sigma &= 1{,}627401\\
2\varrho - \sigma &= -1{,}245839, & 2\sigma - \varrho &= 3{,}064021\\
3\varrho - 2\sigma &= -2{,}682459, & 3\sigma - 2\varrho &= 4{,}500641\\
4\varrho - 3\sigma &= -4{,}119079, & 4\sigma - 3\varrho &= 5{,}937261,
\end{aligned}$$

easdem constructiones in numeris evolutis exhiberi conveniet.

I. Si igitur pro lente PP debeat esse $\lambda = 1$, ea erit simplex hoc modo construenda:

Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris
$\dfrac{a\alpha}{+0{,}190781\alpha+1{,}627401a}$	$\dfrac{a\alpha}{+1{,}627401\alpha+0{,}190781a}$.

II. Si pro lente PP debeat esse $\lambda = 0{,}191827$, ea erit duplicata hoc modo construenda:

Pro lente	Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris
priori	$\dfrac{a\alpha}{-0{,}622919\alpha + 0{,}813700a}$	$\dfrac{a\alpha}{+1{,}532010\alpha + 0{,}095390a}$
posteriori	$\dfrac{a\alpha}{+0{,}095390\alpha + 1{,}532010a}$	$\dfrac{a\alpha}{+0{,}813700\alpha - 0{,}622919a}$.

III. Si pro lente PP debeat esse $\lambda = 0{,}042165$, ea erit triplicata hoc modo construenda:

Pro lente	Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris
priori	$\dfrac{a\alpha}{-0{,}894153\alpha + 0{,}542467a}$	$\dfrac{a\alpha}{+1{,}500214\alpha + 0{,}063594a}$
media	$\dfrac{a\alpha}{-0{,}415280\alpha + 1{,}021340a}$	$\dfrac{a\alpha}{+1{,}021340\alpha - 0{,}415280a}$
posteriori	$\dfrac{a\alpha}{+0{,}063594\alpha + 1{,}500214a}$	$\dfrac{a\alpha}{+0{,}542467\alpha - 0{,}894153a}$.

IV. Si pro lente PP debeat esse $\lambda = -0{,}010216$, ea erit quadruplicata hoc modo construenda:

Pro lente	Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris
prima	$\dfrac{a\alpha}{-1{,}029770\alpha + 0{,}406850a}$	$\dfrac{a\alpha}{+1{,}484315\alpha + 0{,}047695a}$
secunda	$\dfrac{a\alpha}{-0{,}670615\alpha + 0{,}766005a}$	$\dfrac{a\alpha}{+1{,}125160\alpha - 0{,}311460a}$
tertia	$\dfrac{a\alpha}{-0{,}311460\alpha + 1{,}125160a}$	$\dfrac{a\alpha}{+0{,}766005\alpha - 0{,}670615a}$
quarta	$\dfrac{a\alpha}{+0{,}047695\alpha + 1{,}484315a}$	$\dfrac{a\alpha}{+0{,}406850\alpha - 1{,}029770a}$.

SCHOLION 2

221. Interim tamen si lentes desideremus, in quibus valor ipsius λ maior sit, quam hic est assumtus, constructio earum levi additione ex his ipsis formulis concinnari poterit. In binis scilicet fractionibus, quibus radii facierum

cuiusque lentis designantur, alter denominator augeri, alter vero diminui debet eadem quantitate, quae quantitas semper $= \tau(a + \alpha)\sqrt{v}$, denotante v excessum valoris ipsius λ supra ante assumtum. Ita si esse debeat

$$\text{I. } \lambda = 1 + v, \quad \text{II. } \lambda = 0{,}191827 + v, \quad \text{III. } \lambda = 0{,}042165 + v$$
$$\text{vel IV. } \lambda = -0{,}010216 + v,$$

denominatores fractionum in scholio praecedente traditarum pro quavis lente simplici alternatim sunt augendi et minuendi quantitate $0{,}905133\ (a + \alpha)\sqrt{v}$. Unde si lens quadruplicata desideretur, pro qua sit praecise $\lambda = 0$, erit $v = 0{,}010216$ et $\tau\sqrt{v} = 0{,}091487$; hincque pro quavis lente simplici denominatorum alter augeri, alter vero diminui debet hac quantitate $0{,}091487\alpha + 0{,}091487a$, ex quo talis nascitur constructio huiusmodi lentis quadruplicatae, pro qua est $\lambda = 0$:

Pro lente	Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris
prima	$\dfrac{a\alpha}{-1{,}121257\alpha + 0{,}315363a}$	$\dfrac{a\alpha}{+1{,}575802\alpha + 0{,}139182a}$
secunda	$\dfrac{a\alpha}{-0{,}762102\alpha + 0{,}674518a}$	$\dfrac{a\alpha}{+1{,}216647\alpha - 0{,}219973a}$
tertia	$\dfrac{a\alpha}{-0{,}402947\alpha + 1{,}033673a}$	$\dfrac{a\alpha}{+0{,}857492\alpha - 0{,}579128a}$
quarta	$\dfrac{a\alpha}{-0{,}043792\alpha + 1{,}392828a}$	$\dfrac{a\alpha}{+0{,}498337\alpha - 0{,}938283a}$.

Sed hoc casu quaelibet lens adhuc alio modo construi potest: sic quarta ordine retrogrado exposita permutatis a et α dabit alteram formam lentis primae.

SUPPLEMENTUM III[1]

AD PROBLEMA 8

Si lentes ratione refractionis discrepent, ut sit ratio refractionis pro prima lente $= n$, pro secunda $= n'$, pro tertia $= n''$ etc., inde neque in multiplicatione m neque in gradu claritatis quicquam mutatur; at vero in semidiametro confusionis valores litterarum P, Q, R etc. sequenti modo immutari debent:

1) Hoc supplementum attinet ad § 210—221. E. Ch.

$$P=\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\left(\frac{n}{a}+\frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{1}{ia}+\frac{2}{k-v}\right)^2+\left(\frac{n}{\alpha}-\frac{2}{k-v}\right)\left(\frac{i}{\alpha}-\frac{2}{k+v}\right)^2\right)$$

$$Q=\frac{n'}{2(n'-1)^2}\left(\left(\frac{n'}{b}+\frac{2}{k'+v'}\right)\left(\frac{1}{i'b}+\frac{2}{k'-v'}\right)^2+\left(\frac{n'}{\beta}-\frac{2}{k'-v'}\right)\left(\frac{i'}{\beta}-\frac{2}{k'+v'}\right)^2\right)$$

$$R=\frac{n''}{2(n''-1)^2}\left(\left(\frac{n''}{c}+\frac{2}{k''+v''}\right)\left(\frac{1}{i''c}+\frac{2}{k''-v''}\right)^2+\left(\frac{n''}{\gamma}-\frac{2}{k''-v''}\right)\left(\frac{i''}{\gamma}-\frac{2}{k''+v''}\right)^2\right)$$

$$S=\frac{n'''}{2(n'''-1)^2}\left(\left(\frac{n'''}{d}+\frac{2}{k'''+v'''}\right)\left(\frac{1}{i'''d}+\frac{2}{k'''-v'''}\right)^2+\left(\frac{n'''}{\delta}-\frac{2}{k'''-v'''}\right)\left(\frac{i'''}{\delta}-\frac{2}{k'''+v'''}\right)^2\right)$$

etc.

AD PROBLEMA 9

Si lentes ratione refractionis discrepent, loco litterarum ϱ, σ, τ in radiis facierum scribi oportet pro secunda lente ϱ', σ', τ', pro tertia ϱ'', σ'', τ'' etc.; tum vero expressiones pro multiplicatione et gradu claritatis nulla mutatione egent; pro confusione autem notari oportet fore:

$$P=\mu\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\right)$$

$$Q=\mu'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda'\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2+\frac{\nu'}{b\beta}\right)$$

$$R=\mu''\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\lambda''\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)^2+\frac{\nu''}{c\gamma}\right)^{1)}$$

etc.

1) Finis supplementi III. E. Ch.

CAPUT V

DE CAMPO APPARENTE OCULIQUE LOCO MAXIME IDONEO

PROBLEMA 1

222. *Si ex obiecti puncto extra axem sumto* ε (Fig. 12) *radius quicunque* εM *per lentem* PP *transmittatur, definire eius concursum cum axe* O.

SOLUTIO

Sit $F\zeta$ imago principalis per lentem proiecta, a diffusione enim hic mentem abstrahimus, ac ponamus pro lente eius distantias determinatrices

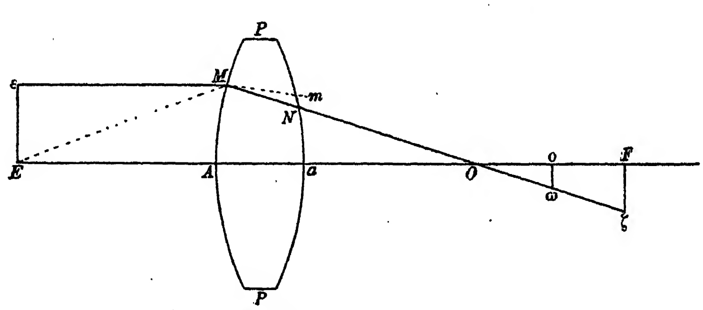

Fig. 12.

$AE = a$, $aF = \alpha$, eius crassitiem $Aa = v$ et quantitatem arbitrariam $= k$, sitque brevitatis ergo $\frac{k - v}{k + v} = i$. His positis si puncti ε imago cadat in ζ voceturque $E\varepsilon = z$, erit $F\zeta = \frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha z}{a}$; at pro puncto lentis M statuatur eius distantia ab axe $AM = x$; ac supra ostendimus, si radius a puncto E per punctum M transmitteretur, eum ita per m ad punctum F progressurum esse, ut foret $am = ix$. Radius igitur εM per punctum N ad ζ feretur, ita

ut, cum obliquitas radiorum in facies lentis incidentium perpetuo valde parva statuatur, sit proxime angulus $EM\varepsilon$ ad NMm ut n ad 1 posito $n = \frac{31}{20}$. Hinc erit $E\varepsilon$ ad mN in ratione composita istorum angulorum et distantiarum AE ad Aa, seu $E\varepsilon : mN = na : v$, unde fit $mN = \frac{vz}{na}$ ideoque $aN = ix - \frac{vz}{na}$. Iam vero radius a puncto N recta ad ζ pergit et propterea axem ita in O secabit, ut sit $aN + F\zeta : aF = aN : aO$, sicque

$$aO = \left(i\alpha x - \frac{\alpha vz}{na}\right) : \left(ix - \frac{vz}{na} + \frac{\alpha z}{ia}\right) = \frac{niia\alpha x - i\alpha vz}{niiax - ivz + n\alpha z}$$

et

$$FO = \frac{n\alpha\alpha z}{niiax - ivz + n\alpha z}.$$

Si x sit semidiameter aperturae lentis in facie anteriori, haec intersectio O respondet casui, quo radius ab ε per lentis terminum summum transeat: sin autem is per terminum imum transmittatur, sumto x negativo fiet

$$FO = \frac{n\alpha\alpha z}{-niiax - ivz + n\alpha z}.$$

At si radius ex ε per centrum lentis A transeat, punctum intersectionis ita cadet in O, ut sit

$$FO = \frac{n\alpha\alpha}{na - iv}.$$

COROLLARIUM 1

223. Si igitur x denotet semidiametrum aperturae lentis in facie anteriori $PMAP$, ut omnes radii a puncto ε in hanc faciem incidentes per lentem transmittantur, necesse est, ut faciei posterioris $PNaP$ semidiameter sit maior quam $\pm ix - \frac{vz}{na}$, sumto x tam negativo quam positivo. Unde hic semidiameter minor esse nequit quam $ix + \frac{vz}{na}$.

COROLLARIUM 2

224. Si apertura in facie anteriori evanescat, ut sit $x = 0$, radii a puncto ε, cuius ab axe distantia $E\varepsilon = z$, per lentem non transmittentur, nisi in facie posteriori semidiameter aperturae sit $= \frac{vz}{na}$ vel maior. Unde patet, quo maior fuerit lentis crassities v, eo maiori apertura in facie posteriori esse opus.

COROLLARIUM 3

225. Vicissim ergo si detur lentis apertura in facie posteriori, cuius semidiameter sit $=\frac{vz}{na}$, inde simul in obiecto extremum punctum ε determinatur, a quo radius in centrum lentis A incidens per eam transmittatur.

COROLLARIUM 4

226. Hic autem radius per A immissus post transitum cum axe in O occurret, ut ob $x=0$ sit intervallum $FO=\frac{n\alpha\alpha}{n\alpha-iv}$ seu $aO=\frac{-i\alpha v}{n\alpha-iv}$. Nisi ergo oculus in hoc axis loco teneatur, radius transmissus non in oculum ingredietur; si quidem apertura pupillae ut infinite parva spectetur.

COROLLARIUM 5

227. At si semidiameter pupillae ponatur $=\omega$, oculus etiam in o positus illum radium excipiet, si fuerit $o\omega=\omega$. Cum autem casu $x=0$ sit

$$aN\left(\frac{vz}{na}\right):aO\left(\frac{i\alpha v}{n\alpha-iv}\right)=o\omega\,(\omega):Oo,\quad \text{erit}\quad Oo=\frac{nia\alpha\omega}{z(n\alpha-iv)}.$$

Quod intervallum cum aeque positivum ac negativum accipi possit, pro loco oculi o habebimus

$$ao=-\frac{i\alpha vz\pm nia\alpha\omega}{z(n\alpha-iv)}=\frac{-i\alpha(vz\pm na\omega)}{z(n\alpha-iv)}.$$

SCHOLION

228. In hac tractatione, ubi campum apparentem et locum oculi idoneum investigamus, tam aperturam lentis obiectivae in facie anteriori quam pupillae amplitudinem pro nihilo habebimus, ut quaestiones obtineamus determinatas. Quare horum elementorum, quae in instrumentis dioptricis ad visionem accommodatis maximi sunt momenti, sequentes definitiones constituemus.

DEFINITIO 1

229. *Campus apparens est spatium in obiecto, ex cuius singulis punctis radii in centrum lentis obiectivae incidentes per reliquas lentes omnes transmittuntur. Quod spatium cum sit circulare, eius radius vocatur semidiameter campi apparentis.*

COROLLARIUM 1

230. Si ergo $E\varepsilon = z$ fuerit semidiameter campi apparentis, erit ε punctum obiecti extremum seu ab axe maxime remotum, ex quo adhuc radii in centrum A lentis obiectivae incidentes per omnes lentes transmittuntur.

COROLLARIUM 2

231. Determinatur igitur magnitudo campi apparentis per aperturam sequentium facierum refringentium ac fortasse per aperturam unius, si scilicet radii a puncto quodam magis remoto quam ε venientes nullum transitum per eam invenirent, etiamsi per reliquas facies transmitterentur.

SCHOLION

232. Si radii ex solo puncto E, quod est centrum campi apparentis, considerentur, ii quidem, qui in A incidunt, quoniam perpetuo secundum axem progrediuntur, per omnes reliquas facies refringentes, quantumvis parva fuerit earum apertura, certe transmittentur; hincque campus apparens nunquam penitus evanescere potest. At quo magis punctum ε ab axe distans accipitur, ut radii ab eo per omnes facies transmittantur, eo maior earum apertura requiritur; quae cum ab earum curvatura pendeat neque certum limitem superare debeat, hinc ultimum punctum ε, unde radii etiam nunc transmittuntur, ac propterea semidiameter campi apparentis determinatur. In sequentibus quidem propositionibus campum apparentem seu eius semidiametrum $E\varepsilon = z$ ut datum assumam, et quanta esse debeat cuiusque faciei apertura, investigabo: hinc enim facile vicissim, si quaeque apertura fuerit cognita, campum apparentem ipsum definire licebit. Ceterum in hac definitione assumsi aperturam primae faciei esse evanescentem: ex quo facile intelligitur ea aucta etiam campum aliquantum extendi oportere; verum hoc augmentum postea in lucrum cedet, quod cum nunquam soleat esse notabile, eius rationem hic non habendam censui; quemadmodum etiam in sequente definitione aperturae pupillae rationem non habebo.

DEFINITIO 2

233. *Locus oculi idoneus est id punctum in axe, in quo radii ab extremitate campi apparentis per lentes transmissi axem intersecant. Oculus scilicet in hoc loco constitutus totum campum apparentem conspiciet.*

COROLLARIUM 1

234. Hinc igitur idoneus locus oculo assignabitur, si illa intersectio radiorum extremorum cum axe post lentem ultimam cadat; sin autem haec intersectio ante lentem ultimam reperiatur, fieri nequit, ut oculus in eo loco teneatur, neque propterea totum campum contueri poterit.

COROLLARIUM 2

235. At si ista intersectio pone lentem ultimam cadat, oculus totum campum apparentem perspiciet, etiamsi pupilla maxime esset contracta; neque tamen ob maiorem pupillae amplitudinem maiorem campum percipere valet.

COROLLARIUM 3

236. Verum ob amplitudinem pupillae hoc commodi assequimur, ut oculus, etiamsi extra locum idoneum constituatur, dummodo distantia non sit nimis magna, tamen totum campum apparentem conspicere possit: id quod egregie usu veniet iis casibus, quibus locus idoneus oculi ante faciem refringentem extremam cadit. Tum enim fieri poterit, ut oculus huic faciei immediate applicatus tamen totum campum percipiat.

SCHOLION

237. Quando hic de visione loquor, id ita in genere est interpretandum, ut a puncto viso radius in oculum ingrediatur, neque hic curo, utrum visio sit distincta nec ne? In sequentibus enim docebitur, quomodo lentes disponi conveniat, ut oculus in loco idoneo positus etiam in iusta ab ultima imagine distantia reperiatur, quo visio distincta reddatur. Hic igitur sine ullo respectu ad visionem distinctam habito eum oculo locum assigno, ubi ab omnibus punctis in campo apparente contentis radios recipiat; et quoniam singula momenta, quae ad visionem pertinent, seorsim expediri convenit, hic etiam non ad spatium diffusionis respicio, quod quidem semper per se evanescit, si apertura faciei primae evanescens statuatur.

PROBLEMA 2

238. *Si obiectum per unicam lentem aspiciatur, determinare tam campum apparentem quam locum idoneum oculi.*

SOLUTIO

Sint ut in problemate superiori distantiae determinatrices huius lentis, scilicet distantia obiecti ante lentem $AE = a$ (Fig. 12, p. 139) et imaginis post lentem $aF = \alpha$, tum vero lentis crassities $Aa = v$ et distantia arbitraria constructionem lentis plene determinans $= k$. Deinde ponamus semidiametrum campi apparentis $E\varepsilon = z$, ita ut posita faciei anterioris PAP apertura infinite parva etiamnum a puncto ε radii per lentem transmittantur. Sit porro brevitatis gratia $\frac{k-v}{k+v} = i$, atque supra demonstravimus campum apparentem ad ε usque extendi, si pro facie posteriori PaP fuerit semidiameter aperturae $aN = \frac{vz}{n\alpha}$ existente $n = \frac{31}{20}$; perinde enim est, sive hic semidiameter affirmative accipiatur sive negative. Hinc ergo vicissim, si semidiameter huius aperturae ponatur $= \mathfrak{a}$, erit semidiameter campi apparentis $E\varepsilon = z = \frac{n\alpha}{v}\mathfrak{a}$.

Quod ad locum idoneum oculi attinet, qui sit in O, quoniam invenimus $FO = \frac{n\alpha\alpha}{n\alpha - iv}$, erit distantia $aO = \frac{-i\alpha v}{n\alpha - iv}$ ideoque negativa, nisi sit vel i numerus negativus vel $iv > n\alpha$. Sin autem haec distantia aO fuerit positiva, oculus in O positus totum campum apparentem perspiciet.

COROLLARIUM 1

239. Si crassities lentis v evanescat, ob $z = \frac{n\alpha}{v}\mathfrak{a}$ campus apparens evadet infinitus seu potius indeterminatus; distantia vero aO evanescet. Oculus igitur lenti immediate applicatus tantum spatium conspiciet, quantum per propriam indolem complecti valebit.

COROLLARIUM 2

240. Sin autem ob lentis crassitiem $Aa = v$ distantia $aO = \frac{-i\alpha v}{n\alpha - iv}$ prodeat positiva, oculus in O positus totum campum apparentem aspicere valebit seu in obiecto spatium circulare spectabit, cuius semidiameter

$$E\varepsilon = z = \frac{n\alpha}{v}\mathfrak{a} = \frac{31\alpha\mathfrak{a}}{20v},$$

quod ergo eo erit maius, quo tenuior fuerit lens.

COROLLARIUM 3

241. At si distantia aO resultet negativa, oculum in loco idoneo constitui non licet, quoniam is necessario post lentem teneri debet. Ubicunque

autem is post lentem collocetur, non universum campum apparentem contuebitur, sed tantum eius partem, et quidem eo minorem, quo magis post lentem removeatur, propterea quod hoc modo magis a loco idoneo recedit.

COROLLARIUM 4

242. Hoc igitur casu conveniet oculum immediate ad faciem lentis posteriorem applicare, quo situ eatenus tantum radios accipiet, quatenus pupilla patet; sicque campus visus ab apertura pupillae pendebit; quae si esset nulla, etiam campus apparens evanesceret.

COROLLARIUM 5

243. Hinc patet, si pupilla excedat aperturam faciei PaP seu si sit $\omega > \mathfrak{a}$, denotante ω semidiametrum pupillae, quia tum oculus huic faciei applicatus omnes radios transmissos recipit, eum totum campum apparentem esse visurum. Sin autem sit $\omega < \mathfrak{a}$, partem tantum totius campi perspiciet, cuius semidiameter erit $= \frac{na}{v}\omega = \frac{31 a \omega}{20 v}$, scilicet non maiorem, quam si apertura faciei PaP aequalis esset pupillae.

SCHOLION

244. Interim tamen si hoc casu postremo apertura faciei lentis PaP, cui oculus est applicatus, maior sit quam pupilla, nihil obstat, quominus ea successive totam aperturam peragret, sicque pedetemtim totum campum apparentem conspicere poterit, etiamsi eum simul contueri non valeat. Ceterum notandum est, si etiam faciei anteriori apertura tribuatur, inde campum apparentem aliquantum augeri, sed partes obiecti ulteriores, quia non per medium lentis radios transmittunt, obscuriores apparebunt, unde merito a campo apparente excluduntur. At si faciei anteriori tribuatur apertura, cuius semidiameter $= x$, ut facies posterior omnes radios in illam incidentes transmittat, eius apertura tanto maior esse debet secundum regulas supra traditas; scilicet eius semidiametrum esse oportet $= ix + \mathfrak{a}$ seu $= ix + \frac{vz}{na}$.

PROBLEMA 3

245. *Si instrumentum dioptricum duabus constet lentibus, definire campum apparentem et locum oculi idoneum.*

SOLUTIO

Sit pro his lentibus ut hactenus (Fig. 13)

pro PP: $AE = a$, $aF = \alpha$, $Aa = v$; dist. arb. $= k$ et $\dfrac{k-v}{k+v} = i$

pro QQ: $BF = b$, $bG = \beta$, $Bb = v'$; dist. arb. $= k'$ et $\dfrac{k'-v'}{k'+v'} = i'$,

ac, posito semidiametro campi apparentis $E\varepsilon = z$, in imaginibus erit

$$F\zeta = \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha}{a}z \quad \text{et} \quad G\eta = \frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}z.$$

Consideretur iam radius a puncto ε in centrum lentis primae A incidens et

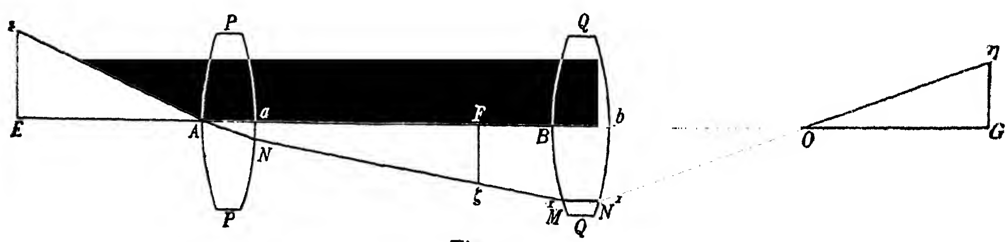

Fig. 13.

per lentes transmissus, qui utique per extremitates imaginum ζ et η transibit Iam ex problemate praecedente patet esse $aN = \frac{vz}{n\alpha}$, unde in altera lente punctum M' ita definietur, ut sit

$$F\zeta - aN : aF = BM' - F\zeta : BF$$

sive

$$BM' = F\zeta + \frac{BF(F\zeta - aN)}{aF} = \frac{aB\cdot F\zeta - BF\cdot aN}{aF},$$

unde fit

$$BM' = \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a}z - \frac{bvz}{na\alpha}.$$

Nunc punctum N' hinc perinde definietur, atque ex problemate primo ex puncto M determinabatur punctum N; erit quippe

$$bN' = i'\cdot BM' - \frac{v'}{n'b}\cdot F\zeta \quad \text{ideoque} \quad bN' = \frac{i'}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a}z - \frac{i'bv}{na\alpha}z - \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha v'}{n'ab}z.$$

Hinc autem punctum O, ubi est locus oculi idoneus, facile assignabitur; erit

enim $bN' + G\eta : bG = bN' : bO$, indeque

$$bO = \frac{bG \cdot bN'}{bN' + G\eta} = \frac{\frac{i'}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a} - \frac{i'bv}{na\alpha} - \frac{1}{i}\,\frac{\alpha v'}{n'ab}}{\frac{i'}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a} - \frac{i'bv}{na\alpha} - \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha v'}{n'ab} + \frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}}\,\beta.$$

Quod si ergo ponamus semidiametrum aperturae

$$\text{pro lente } PP \text{ faciei } \begin{cases}\text{anterioris} = \mathfrak{A} = x\\ \text{posterioris} = \mathfrak{a}\end{cases}$$

$$\text{pro lente } QQ \text{ faciei } \begin{cases}\text{anterioris} = \mathfrak{B}\\ \text{posterioris} = \mathfrak{b},\end{cases}$$

habebimus

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{a} = \frac{v}{na}z; \quad \mathfrak{B} = \left(\frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a} - \frac{bv}{na\alpha}\right)z, \quad \mathfrak{b} = \left(\frac{i'}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a} - \frac{i'bv}{na\alpha} - \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha v'}{n'ab}\right)z;$$

ac si distantia oculi post lentem QQ ponatur $bO = O$, erit:

$$O = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b} + \frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}z}\cdot\beta.$$

COROLLARIUM 1

246. Si ambarum lentium crassities evanescat, erit $v = 0$, $v' = 0$ et $i = i' = 1$; quo ergo casu nostrae formulae in sequentes abibunt:

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{a} = 0; \quad \mathfrak{B} = \frac{\alpha+b}{a}z \quad \text{et} \quad \mathfrak{b} = \frac{\alpha+b}{a}z.$$

COROLLARIUM 2

247. Datis ergo vicissim aperturis lentium ex aequationum traditarum ea, pro qua quantitas z minimum valorem adipiscitur, definietur campus adparens.

COROLLARIUM 3

248. Si igitur crassities lentium evanescat, campus
lentis posterioris facillime determinatur. Erit enim $z =$
ligendum est, si distantia $bO = O$ fuerit positiva oculusque in O collocetur.

COROLLARIUM 4

249. Sin autem distantia $bO = O$ prodeat negativa oculusque ultimae lenti immediate applicetur, tum eius apertura plus non praestat, quam si amplitudini pupillae esset aequalis. Quare si $\mathfrak{b}$ maior fuerit semidiametro pupillae ω, loco $\mathfrak{b}$ scribatur ω, et ex ultima aequatione verus valor ipsius z elicietur, nisi forte ex aliqua reliquarum aequationum adhuc minor valor pro z esset proditurus.

PROBLEMA 4

250. *Si instrumentum dioptricum ex tribus constet lentibus, determinare cum campum apparentem tum locum oculi idoneum.*

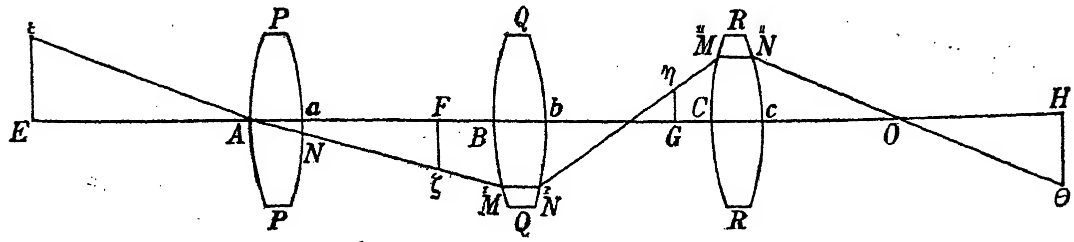

Fig. 14.

SOLUTIO

Existentibus imaginibus per has lentes (Fig. 14) successive repraesentatis in $F\zeta$, $G\eta$ et $H\theta$, obiecto vero ipso in $E\varepsilon$, ponamus ut hactenus

pro lente		distantias	crassitiem	dist. arb.	et
prima	PP	$AE = a,\ aF = \alpha$	$Aa = v$	k	$\frac{k-v}{k+v} = i$
secunda	QQ	$BF = b,\ bG = \beta$	$Bb = v'$	k'	$\frac{k'-v'}{k'+v'} = i'$
tertia	RR	$CG = c,\ cH = \gamma$	$Cc = v''$	k''	$\frac{k''-v''}{k''+v''} = i''$

semidiametros vero aperturarum

pro lente

$$PP \text{ faciei} \begin{cases}\text{anterioris} & = \mathfrak{A} = 0\\ \text{posterioris} & = \mathfrak{a}\end{cases}$$

$$QQ \text{ faciei} \begin{cases}\text{anterioris} & = \mathfrak{B}\\ \text{posterioris} & = \mathfrak{b}\end{cases}$$

$$RR \text{ faciei} \begin{cases}\text{anterioris} & = \mathfrak{C}\\ \text{posterioris} & = \mathfrak{c}.\end{cases}$$

Tum vero sit semidiameter campi apparentis $E\varepsilon = z$, supraque ostendimus fore:

$$F\zeta = \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha}{a}z, \quad G\eta = \frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}z, \quad H\theta = \frac{1}{ii'i''}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}z.$$

His positis habebimus $aN = \mathfrak{a} = \frac{vz}{na}$; unde, si per F recta ipsi NM' parallela ducta intelligatur, erit

$$F\zeta - aN : aF = BM' - F\zeta : BF \quad \text{sive} \quad BM' = \frac{aB\cdot F\zeta - BF\cdot aN}{aF}$$

ideoque

$$BM' = \frac{\alpha+b}{\alpha}\cdot\frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha}{a}z - \frac{bvz}{na\alpha} \quad \text{seu} \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a}z - \frac{bv}{na\alpha}z.$$

Porro vero est ex problemate primo $bN' = i'\cdot BM' - \frac{v}{nb}\cdot F\zeta$, hincque

$$\mathfrak{b} = \frac{i'}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a}z - \frac{i'bv}{na\alpha}z - \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha v'}{nab}z;$$

simili modo per G ducta intelligatur recta ipsi $N'M''$ parallela, eritque

$$bG : bN' + G\eta = CG : CM'' - G\eta$$

sive

$$CM'' = \mathfrak{C} = G\eta + \frac{c}{\beta}(\mathfrak{b} + G\eta) = \frac{\beta+c}{\beta}\cdot G\eta + \frac{c}{\beta}\mathfrak{b},$$

unde fit

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha(\beta+c)}{ab}z + \frac{i'}{i}\cdot\frac{c(\alpha+b)}{a\beta}z - \frac{i'bcv}{na\alpha\beta}z - \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha cv'}{nab\beta}z.$$

Deinde ex CM'' ita definitur cN'' per problema primum, ut sit

$$cN'' = i''\cdot CM'' - \frac{v''}{nc}\cdot G\eta \quad \text{seu} \quad \mathfrak{c} = i''\cdot\mathfrak{C} - \frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta v''}{nabc}z$$

hincque

$$\mathfrak{c} = \frac{i''}{ii'}\cdot\frac{\alpha(\beta+c)}{ab}z + \frac{i'i''}{i}\cdot\frac{c(\alpha+b)}{a\beta}z - i'i''\cdot\frac{bcv}{na\alpha\beta}z - \frac{i''}{i}\cdot\frac{\alpha cv'}{nab\beta}z - \frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta v''}{nabc}z.$$

Isti ergo valores sequenti modo determinantur:

$$\mathfrak{A}=0,\quad \mathfrak{a}=\frac{v}{na}\cdot E\varepsilon;\quad \mathfrak{B}=\frac{\alpha+b}{\alpha}\cdot F\zeta-\frac{b}{\alpha}\cdot\mathfrak{a},\quad \mathfrak{b}=i'\cdot\mathfrak{B}-\frac{v'}{nb}\cdot F\zeta;$$

$$\mathfrak{C}=\frac{\beta+c}{\beta}\cdot G\eta+\frac{c}{\beta}\cdot\mathfrak{b},\quad \mathfrak{c}=i''\cdot\mathfrak{C}-\frac{v''}{nc}\cdot G\eta.$$

Cum iam punctum O praebeat locum oculi iustum, si ponamus $cO=O$, erit $cN''+H\theta:cH=cN'':cO$, unde reperitur

$$O=\frac{\gamma\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}+H\theta}\quad\text{vel}\quad\frac{1}{O}=\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{ii'i''}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}\cdot\frac{z}{cc}.$$

COROLLARIUM 1

251. Ex his aequationibus sequitur fore

$$\frac{\mathfrak{B}}{b}+\frac{\mathfrak{a}}{\alpha}=\frac{\alpha+b}{\alpha b}\cdot F\zeta=\frac{1}{i}\left(\frac{\alpha}{b}+1\right)\frac{z}{a}\quad\text{et}\quad\frac{\mathfrak{C}}{c}-\frac{\mathfrak{b}}{\beta}=\frac{\beta+c}{\beta c}\cdot G\eta=\frac{1}{ii'}\left(\frac{\alpha\beta}{bc}+\frac{\alpha}{b}\right)\frac{z}{a}$$

hincque porro:

$$\frac{i\mathfrak{a}}{\alpha}+\frac{i\mathfrak{B}}{b}+\frac{ii'\mathfrak{b}}{\beta}-\frac{ii'\mathfrak{C}}{c}=\left(1-\frac{\alpha\beta}{bc}\right)\frac{z}{a}.$$

COROLLARIUM 2

252. Si ergo crassities lentium evanescat, cum sit $\mathfrak{a}=0$, $\mathfrak{b}=\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{c}=\mathfrak{C}$, definitio campi apparentis reducitur ad has duas aequationes:

$$\text{I.)}\ \mathfrak{B}\cdot\frac{1}{b}=\left(1+\frac{\alpha}{b}\right)\frac{z}{a},\quad \text{II.)}\ \mathfrak{B}\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)-\mathfrak{C}\cdot\frac{1}{c}=\left(1-\frac{\alpha\beta}{bc}\right)\frac{z}{a},$$

unde minor valor ipsius z praebet semidiametrum campi apparentis.

COROLLARIUM 3

253. Deinde si distantia $cO=O$ prodeat negativa, ut oculum cogamur lenti ultimae immediate applicare, pro $\mathfrak{c}$ scribi oportet semidiametrum pupillae ω, et ex ultima aequatione definietur semidiameter campi z, nisi forte ex alia aequatione adhuc minor valor pro z prodeat.

PROBLEMA 5

254. *Si instrumentum dioptricum ex quatuor lentibus super eodem axe dispositis constet, determinare cum campum apparentem tum locum oculi idoneum.*

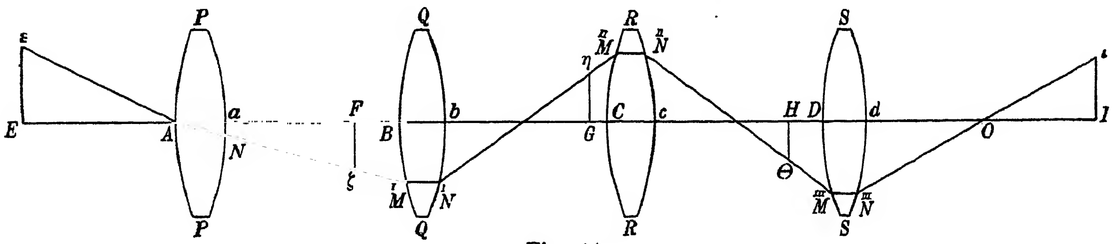

Fig. 15.

SOLUTIO

Existente obiecto $E\varepsilon = z$, sint imagines per lentes successive repraesentatae $F\zeta$, $G\eta$, $H\theta$ et $I\iota$, ponamusque pro lentium singularum determinatione ut hactenus

pro lente		distantias		crassitiem	dist. arb.	et
prima	PP	$AE = a$,	$aF = \alpha$	$Aa = v$	k	$\frac{k-v}{k+v} = i$
secunda	QQ	$BF = b$,	$bG = \beta$	$Bb = v'$	k'	$\frac{k'-v'}{k'+v'} = i'$
tertia	RR	$CG = c$,	$cH = \gamma$	$Cc = v''$	k''	$\frac{k''-v''}{k''+v''} = i''$
quarta	SS	$DH = d$,	$dI = \delta$	$Dd = v'''$	k'''	$\frac{k'''-v'''}{k'''+v'''} = i'''$.

Semidiametri vero aperturarum sint:

Pro lente

prima PP faciei $\begin{cases}\text{anterioris} & = \mathfrak{A} = 0\\ \text{posterioris} & = \mathfrak{a}\end{cases}$

secunda QQ faciei $\begin{cases}\text{anterioris} & = \mathfrak{B}\\ \text{posterioris} & = \mathfrak{b}\end{cases}$

tertia RR faciei $\begin{cases}\text{anterioris} & = \mathfrak{C}\\ \text{posterioris} & = \mathfrak{c}\end{cases}$

quarta SS faciei $\begin{cases}\text{anterioris} & = \mathfrak{D}\\ \text{posterioris} & = \mathfrak{d}.\end{cases}$

Si iam $E\varepsilon = z$ exhibeat semidiametrum campi apparentis, erit, ut iam supra ostendimus:

$$F\zeta = \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha}{a}z,\quad G\eta = \frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}z,\quad H\theta = \frac{1}{ii'i''}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}z \quad \text{et} \quad I\iota = \frac{1}{ii'i''i'''}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd}z.$$

Quod si ratiocinium nunc ut ante instituamus, obtinebimus sequentes aequationes:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A} = 0, && \mathfrak{a} = \frac{v}{na}\cdot E\varepsilon\\
&\mathfrak{B} = \left(1+\frac{b}{\alpha}\right)F\zeta - \frac{b}{\alpha}\mathfrak{a}, && \mathfrak{b} = i'\mathfrak{B} - \frac{v'}{nb}\cdot F\zeta\\
&\mathfrak{C} = \left(1+\frac{c}{\beta}\right)G\eta + \frac{c}{\beta}\mathfrak{b}, && \mathfrak{c} = i''\mathfrak{C} - \frac{v''}{nc}\cdot G\eta\\
&\mathfrak{D} = \left(1+\frac{d}{\gamma}\right)H\theta + \frac{d}{\gamma}\mathfrak{c}, && \mathfrak{d} = i'''\mathfrak{D} - \frac{v'''}{nd}\cdot H\theta.
\end{aligned}$$

Ex quarum ordine priori consequimur:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathfrak{B}}{b} + \frac{\mathfrak{a}}{\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)F\zeta = \frac{1}{i}\left(1+\frac{\alpha}{b}\right)\frac{z}{a}\\
&\frac{\mathfrak{C}}{c} - \frac{\mathfrak{b}}{\beta} = \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right)G\eta = \frac{1}{ii'}\left(\frac{\alpha}{b}+\frac{\alpha\beta}{bc}\right)\frac{z}{a}\\
&\frac{\mathfrak{D}}{d} - \frac{\mathfrak{c}}{\gamma} = \left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{d}\right)H\theta = \frac{1}{ii'i''}\left(\frac{\alpha\beta}{bc}+\frac{\alpha\beta\gamma}{bcd}\right)\frac{z}{a},
\end{aligned}$$

ex ordine vero posteriori:

$$\mathfrak{a} = \frac{vz}{na},\quad \mathfrak{b} = i'\mathfrak{B} - \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{v'z}{na},\quad \mathfrak{c} = i''\mathfrak{C} - \frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta}{bc}\cdot\frac{v''z}{na},$$

$$\mathfrak{d} = i'''\mathfrak{D} - \frac{1}{ii'i''}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma}{bcd}\cdot\frac{v'''z}{na}.$$

Si denique pro loco oculi idoneo ponamus $dO = O$, erit

$$O = \frac{\delta\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}+I\iota} \quad \text{seu} \quad \frac{1}{O} = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{ii'i''i'''}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\,\frac{z}{d\mathfrak{d}}.$$

COROLLARIUM 1

255. Ex aequationibus prioribus deducimus sequentes:

$$\frac{i\mathfrak{a}}{\alpha}+\frac{i\mathfrak{B}}{b}=\left(1+\frac{\alpha}{b}\right)\frac{z}{a}$$

$$\frac{i\mathfrak{a}}{\alpha}+\frac{i\mathfrak{B}}{b}+\frac{ii'\mathfrak{b}}{\beta}-\frac{ii'\mathfrak{C}}{c}=\left(1-\frac{\alpha\beta}{bc}\right)\frac{z}{a}$$

$$\frac{i\mathfrak{a}}{\alpha}+\frac{i\mathfrak{B}}{b}+\frac{ii'\mathfrak{b}}{\beta}-\frac{ii'\mathfrak{C}}{c}-\frac{ii'i''\mathfrak{c}}{\gamma}+\frac{ii'i''\mathfrak{D}}{d}=\left(1+\frac{\alpha\beta\gamma}{bcd}\right)\frac{z}{a};$$

quae quomodo ad plures lentes sint continuandae, facile perspicitur.

COROLLARIUM 2

256. Si lentium crassities evanescat, fiet $\mathfrak{a}=0$, $\mathfrak{b}=\mathfrak{B}$, $\mathfrak{c}=\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{d}=\mathfrak{D}$, porro $i=i'=i''=i'''=1$, unde hae aequationes in sequentes formas abibunt:

$$\mathfrak{B}\frac{1}{b}=\left(1+\frac{\alpha}{b}\right)\frac{z}{a}$$

$$\mathfrak{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)-\mathfrak{C}\frac{1}{c}=\left(1-\frac{\alpha\beta}{bc}\right)\frac{z}{a}$$

$$\mathfrak{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)-\mathfrak{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)+\mathfrak{D}\frac{1}{d}=\left(1+\frac{\alpha\beta\gamma}{bcd}\right)\frac{z}{a};$$

ex quibus tribus aequationibus, uti in genere, valor ipsius z, qui prodierit minimus, verum semidiametrum campi apparentis praebebit.

COROLLARIUM 3

257. Totus iste campus apparens revera spectabitur ab oculo in puncto O constituto, dummodo distantia $dO=O$ fuerit positiva. Sed si ea sit negativa oculusque lenti ultimae SS immediate applicetur, ponatur $\mathfrak{d}=\omega$, scilicet semidiametro pupillae, et ex ultima aequatione elicietur semidiameter spatii in obiecto revera conspicui.

SCHOLION 1

258. Hinc igitur perspicitur, quomodo campus apparens a singularum lentium apertura pendeat; simulque patet, quanta esse debeat cuiusque lentis apertura, ut campus apparens datae magnitudinis obtineatur. Si enim quan-

titas z cum quantitatibus ad lentium determinationem pertinentibus pro data assumatur, per nostras formulas successive semidiametri aperturarum pro singulis lentibus definiuntur: ubi quidem deinceps est dispiciendum, num lentes tantae aperturae sint capaces. Hinc scilicet campo apparenti limites praefiniuntur, quos transgredi non liceat; unde sequitur campum apparentem maiorem assumi non posse, quam ut aperturae inde pro singulis lentibus oriundae admitti queant. His autem definitis perinde est, sive cuique lenti ea ipsa, quae fuerit inventa, apertura tribuatur, sive maior, dum ne sit minor, quandoquidem hic aperturam lentis obiectivae evanescentem assumsimus. Verum si insuper claritatis ratio habeatur, necesse est, ut vera apertura cuiusque lentis eam, quam hic assignavimus, aliquantum superet, et quidem ea quantitate, quam supra pro limitibus ob claritatem requisitis exhibuimus; nisi enim hoc augmentum accesserit, extremitas in campo apparente minori lumine praedita erit quam medium. Tum autem campus apparens latius patebit oramque obscuriorem complectetur; quamobrem si circa extremitates minori lumine contenti esse velimus, ne opus quidem est, ut lentibus maior apertura, quam quidem per formulas nostras definitur, tribuatur; superfluumque foret aperturas ultra hos limites augere, ita ut hinc cuique lenti conveniens apertura constituatur.

SCHOLION 2

259. Etsi pro casu, quo lentium crassities negligitur, formulae nostrae non multo simpliciores evadunt, tamen in iis percommode usu venit, ut litterarum $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ coefficientes, scilicet $\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{d}+\frac{1}{\delta}$ ipsam distantiam focalem involvant cuiusque lentis; in praxi autem apertura satis tuto ex distantia focali colligi solet. Nam si lentis QQ distantia focalis ponatur $=q$, erit $\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{q}$ sicque $\mathfrak{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\mathfrak{B}}{q}$; ac ne arcus nimis magni in apertura comprehendantur, necesse est, ut sit $\mathfrak{B}<\frac{1}{2}q$; et pro varia lentis forma valor fractionis $\frac{\mathfrak{B}}{q}$ usque ad $\frac{1}{4}$ vel $\frac{1}{6}$ diminui debet. Quare si ponamus

$$\mathfrak{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)=\pi,\quad \mathfrak{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)=\pi',\quad \mathfrak{D}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{\delta}\right)=\pi'',$$

hae litterae π, π', π'' eiusmodi denotabunt fractiones, quarum valor ut plurimum erit vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ vel $\frac{1}{5}$; id scilicet tantum cavendum est, ne his litteris nimis magnus valor tribuatur. Quo observato cum arbitrio nostro

relinquantur, imprimis conveniet has ipsas litteras in calculum introduci ex iisque reliquas determinari; earum enim beneficio campus apparens facillime definitur. Quin etiam ipse campus apparens statim quoque in calculum induci poterit, quippe cuius determinatio deinceps per formulam simplicissimam expedietur. Hunc in finem, ut tota investigatio ad meros numeros redigatur, ponam $\frac{z}{a} = \Phi$, ita ut Φ sit angulus, sub quo semidiameter campi apparentis ab oculo ad lentem obiectivam collocato spectaretur. Videamus ergo, quomodo per hos numeros π, π', π'' etc. et Φ reliquae quantitates definiantur.

DEFINITIO 3

260. *Ratio aperturae cuiusque lentis mihi vocabitur quotus, qui oritur, si semidiameter aperturae dividatur per distantiam focalem lentis, eius crassitie pro nihilo habita.*

COROLLARIUM 1

261. Ita si b et β sint distantiae determinatrices lentis et $\mathfrak{B}$ semidiameter aperturae eiusdem, quia distantia focalis est $= \frac{b\beta}{b+\beta}$, ratio aperturae erit $= \mathfrak{B}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)$.

COROLLARIUM 2

262. Ratio igitur aperturae cuiusvis lentis est fractio minor quam $\frac{1}{2}$, quandoquidem hanc legem sancivimus, ut neutrius faciei arcus 60 gradibus maior in apertura contineatur.

COROLLARIUM 3

263. Si scilicet ambae facies fuerint aeque curvae, ratio aperturae per hanc legem usque ad $\frac{1}{2}$ augeri poterit; sin autem altera facies fuerit plana, ratio aperturae $\frac{1}{4}$ superare vix poterit; ac si lens sit meniscus, ea adhuc minor statui debebit.

COROLLARIUM 4

264. Cum autem nihil sit, quo apertura lentium accuratius definiatur, ea fere arbitrio nostro relinquitur et quovis casu commodissime per experientiam determinatur, sufficietque notasse eam fractioni sive $\frac{1}{3}$ sive $\frac{1}{4}$ sive etiam $\frac{1}{5}$ pro forma lentis aequalem statui debere.

SCHOLION

265. Ut scilicet quovis casu ratio aperturae recte definiatur, radios utriusque faciei lentis contemplari oportet, qui si fuerint f et g, erit distantia focalis $=\frac{fg}{(n-1)(f+g)}=\frac{20}{11}\cdot\frac{fg}{f+g}$. Iam semidiameter aperturae minor esse debet quam $\frac{1}{2}f$ vel quam $\frac{1}{2}g$, prout vel f vel g fuerit minor. Sit $g<f$, et cum semidiameter aperturae minor esse debeat quam $\frac{1}{2}g$, ratio aperturae minor accipienda est quam $\frac{11}{40}\left(1+\frac{g}{f}\right)$. Unde patet, si lens sit utrinque aeque convexa seu $g=f$, rationem aperturae capi debere infra $\frac{11}{20}$; sin autem sit altera facies plana seu $f=\infty$, illum limitem esse $\frac{11}{40}$, qui adhuc minor fiet, si lens sit meniscus seu $\frac{g}{f}$ numerus negativus. Ceterum si ratio aperturae sit $=\pi$ eique hoc modo idoneus valor tribuatur, perinde est, sive is negative sive positive accipiatur: semper autem conducet rationi aperturae minorem valorem tribui quam secundum hanc regulam, partim ut obliquitas radiorum incidentium diminuatur, partim vero potissimum, ut ob claritatem aperturas lentium adhuc ultra augere liceat.

PROBLEMA 6

266. *Si instrumentum dioptricum ex quotcunque lentibus, quarum crassitiem ut nullam spectare liceat, sit compositum dataque sit ratio aperturae pro singulis lentibus una cum campo apparente, definire distantias determinatrices singularum lentium.*

SOLUTIO

Sit distantia obiecti ante lentem primam $AE=a$ imaginisque per eam repraesentatae $aF=\alpha$, ac pro sequentibus lentibus ponatur:

Pro lente	Distantiae determinatrices	Ratio aperturae
secunda	$BF=b,\quad bG=\beta$	π
tertia	$CG=c,\quad cH=\gamma$	π'
quarta	$DH=d,\quad dI=\delta$	π''
quinta	$EI=e,\quad eK=\varepsilon$	π'''

etc.

Hinc ergo, si semidiametri aperturarum harum lentium ut ante indicentur litteris $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ etc., erit

$$\pi = \mathfrak{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right), \quad \pi' = \mathfrak{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right), \quad \pi'' = \mathfrak{D}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{\delta}\right), \quad \pi''' = \mathfrak{E}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{\varepsilon}\right) \text{ etc.}$$

Tum vero, si sit semidiameter campi apparentis $= z$, ponatur etiam $\frac{z}{a} = \Phi$. Cum igitur hinc sit:

$$\mathfrak{B} = \frac{\pi b \beta}{b+\beta}, \quad \mathfrak{C} = \frac{\pi' c \gamma}{c+\gamma}, \quad \mathfrak{D} = \frac{\pi'' d \delta}{d+\delta}, \quad \mathfrak{E} = \frac{\pi''' e \varepsilon}{e+\varepsilon} \quad \text{etc.,}$$

habebimus ex § 256 sequentes aequationes:

$$\frac{\pi\beta}{b+\beta} = \left(1+\frac{\alpha}{b}\right)\Phi, \quad \pi - \frac{\pi'\gamma}{c+\gamma} = \left(1-\frac{\alpha\beta}{bc}\right)\Phi,$$

$$\pi - \pi' + \frac{\pi''\delta}{d+\delta} = \left(1+\frac{\alpha\beta\gamma}{bcd}\right)\Phi, \quad \pi - \pi' + \pi'' - \frac{\pi'''\varepsilon}{e+\varepsilon} = \left(1-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcde}\right)\Phi$$

etc.

Quo iam facilius hinc per π, π', π'', π''' etc. et Φ distantiae determinatrices lentium definiri queant, ponatur

$$\alpha = Aa, \quad \beta = Bb, \quad \gamma = Cc, \quad \delta = Dd, \quad \varepsilon = Ee \quad \text{etc.,}$$

ita ut litterae A, B, C, D, E etc. denotent numeros absolutos, ac nostrae aequationes induent has formas:

$$\frac{B\pi}{B+1} = \left(1+\frac{Aa}{b}\right)\Phi, \quad \pi - \frac{C\pi'}{C+1} = \left(1-\frac{ABa}{c}\right)\Phi,$$

$$\pi - \pi' + \frac{D\pi''}{D+1} = \left(1+\frac{ABCa}{d}\right)\Phi, \quad \pi - \pi' + \pi'' - \frac{E\pi'''}{E+1} = \left(1-\frac{ABCDa}{e}\right)\Phi$$

etc.,

unde eliciuntur sequentes determinationes:

$$b = \frac{A(B+1)a\Phi}{B\pi-(B+1)\Phi}, \quad c = \frac{AB(C+1)a\Phi}{C\pi'-(C+1)(\pi-\Phi)}$$

$$d = \frac{ABC(D+1)a\Phi}{D\pi''-(D+1)(\pi'-\pi+\Phi)}, \quad e = \frac{ABCD(E+1)a\Phi}{E\pi'''-(E+1)(\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}$$

etc.

Datis ergo praeter numeros Φ, π, π', π'', π''' etc. numeris A, B, C, D, E etc. cum distantia obiecti $AE = a$, per has formulas distantiae b, c, d, e etc.

determinantur indeque insuper alterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc. hoc modo:

$$\alpha = Aa, \quad \beta = \frac{AB(B+1)a\Phi}{B\pi - (B+1)\Phi}, \qquad \gamma = \frac{ABC(C+1)a\Phi}{C\pi' - (C+1)(\pi - \Phi)},$$

$$\delta = \frac{ABCD(D+1)a\Phi}{D\pi'' - (D+1)(\pi' - \pi + \Phi)}, \qquad \varepsilon = \frac{ABCDE(E+1)a\Phi}{E\pi''' - (E+1)(\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}$$

etc.

Hinc nanciscimur distantias focales lentium:

$$\text{Primae } PP = \frac{Aa}{A+1}$$

$$\text{secundae } QQ = \frac{ABa\Phi}{B\pi - (B+1)\Phi}$$

$$\text{tertiae } RR = \frac{ABCa\Phi}{C\pi' - (C+1)(\pi - \Phi)}$$

$$\text{quartae } SS = \frac{ABCDa\Phi}{D\pi'' - (D+1)(\pi' - \pi + \Phi)}$$

$$\text{quintae } TT = \frac{ABCDEa\Phi}{E\pi''' - (E+1)(\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}$$

etc.

COROLLARIUM 1

267. Ex angulo Φ cum distantia obiecti ante lentem primam $AE = a$ ita definitur semidiameter campi apparentis z, ut sit $z = a\Phi$: neque tamen campus apparens pro lubitu assumi potest, sed is per multiplicationem determinabitur, ut mox videbimus.

COROLLARIUM 2

268. Cum omnes numeri hic in calculum introducti aeque negative ac positive accipi queant, observandum est eos perpetuo ita assumi debere, ut intervalla lentium, quae sunt $\alpha + b$, $\beta + c$, $\gamma + d$, $\delta + e$ etc., omnia prodeant positiva.

COROLLARIUM 3

269. Quod ad aperturam cuiusque lentis attinet, eius semidiameter habebitur, si eius distantia focalis multiplicetur per rationem aperturae littera π insignitam.

SCHOLION

270. Quo formulas hic inventas simpliciores reddamus, quoniam litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. non amplius indigebimus, ponamus ad abbreviandum:

$$\frac{A}{A+1}=\mathfrak{A},\quad \frac{B}{B+1}=\mathfrak{B},\quad \frac{C}{C+1}=\mathfrak{C},\quad \frac{D}{D+1}=\mathfrak{D},\quad \frac{E}{E+1}=\mathfrak{E} \text{ etc.},$$

ut sit

$$A=\frac{\mathfrak{A}}{1-\mathfrak{A}},\quad B=\frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}},\quad C=\frac{\mathfrak{C}}{1-\mathfrak{C}},\quad D=\frac{\mathfrak{D}}{1-\mathfrak{D}},\quad E=\frac{\mathfrak{E}}{1-\mathfrak{E}} \text{ etc.},$$

atque habebimus:

$$\alpha=Aa \qquad b=\frac{Aa\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}$$

$$\beta=\frac{ABa\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi} \qquad c=\frac{ABa\Phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}$$

$$\gamma=\frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi} \qquad d=\frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}$$

$$\delta=\frac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi} \qquad e=\frac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}$$

$$\varepsilon=\frac{ABCDEa\Phi}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi} \qquad \text{etc.}$$

Hincque porro definientur distantiae focales lentium:

$$\text{Primae } PP=Aa$$

$$\text{secundae } QQ=\frac{A\mathfrak{B}a\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}$$

$$\text{tertiae } RR=\frac{AB\mathfrak{C}a\Phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}$$

$$\text{quartae } SS=\frac{ABC\mathfrak{D}a\Phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}$$

$$\text{quintae } TT=\frac{ABCD\mathfrak{E}a\Phi}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}$$

etc.

et lentium intervalla:

$$\text{I et II} = \frac{A\mathfrak{B}a\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}$$

$$\text{II et III} = \frac{ABa\Phi(\mathfrak{C}\pi'-(1-\mathfrak{B})\pi)}{(\mathfrak{B}\pi-\Phi)(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}$$

$$\text{III et IV} = \frac{ABCa\Phi(\mathfrak{D}\pi''-(1-\mathfrak{C})\pi')}{(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}$$

$$\text{IV et V} = \frac{ABCDa\Phi(\mathfrak{E}\pi'''-(1-\mathfrak{D})\pi'')}{(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}.$$

Quae intervalla debent esse positiva.

PROBLEMA 7

271. *Positis iisdem, quae in problemate praecedente sunt assumta, definire locum idoneum oculi, unde totus campus apparens conspici queat.*

SOLUTIO

Maneant omnes denominationes ut ante, et quia apertura lentis PP ut nulla spectatur, pro reliquis lentibus ex data aperturae ratione semidiameter aperturae cuiusque ita se habebit:

Lentis	Semidiameter aperturae
secundae QQ	$\frac{A\mathfrak{B}a\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}\Phi$
tertiae RR	$\frac{AB\mathfrak{C}a\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}\Phi$
quartae SS	$\frac{ABC\mathfrak{D}a\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}\Phi$
quintae TT	$\frac{ABCD\mathfrak{E}a\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}\Phi$,

ubi litterae $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ etc. valores in praecedente scholio assignatos obtinent.

Deinde magnitudines singularum imaginum considerari convenit, quae ob $E\varepsilon = z = a\Phi$ et $\alpha = Aa$, $\beta = Bb$, $\gamma = Cc$, $\delta = Dd$ etc. erunt

$$F\zeta = \alpha\Phi = Aa\Phi,\quad G\eta = ABa\Phi,\quad H\vartheta = ABCa\Phi,\quad I\iota = ABCDa\Phi \quad \text{etc.}$$

Iam pro quolibet lentium numero locus oculi idoneus seorsim definiri debet; denotante ergo O distantiam oculi post ultimam lentem

I. Pro unica lente

Quia crassities lentis ut nulla spectatur, evidens est pro loco oculi idoneo fore $O=0$.

II. Pro duabus lentibus

Cum hic (Fig. 13, p. 146) sit $bN'+G\eta : bG = bN' : bO$, erit

$$bO = O = \frac{bN'}{bN'+G\eta}\cdot\beta.$$

Sed est $bN' = \frac{A\mathfrak{B}\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}a\Phi$ et $G\eta = ABa\Phi$, unde fit

$$bN'+G\eta = Aa\Phi\cdot\frac{(B+1)\mathfrak{B}\pi - B\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi} = \frac{ABa\Phi(\pi-\Phi)}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}$$

ob $(B+1)\mathfrak{B}=B$. Erit ergo $\frac{bN'}{bN'+G\eta}=\frac{\mathfrak{B}\pi}{B(\pi-\Phi)}$, quae fractio per $\beta=\frac{ABa\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}$ multiplicata dat locum oculi idoneum:

$$O = \frac{A\mathfrak{B}a\pi\Phi}{(\pi-\Phi)(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}.$$

III. Pro tribus lentibus

Cum hic (Fig. 14 p. 148) sit $cN''+H\vartheta : cH = cN'' : cO$, erit

$$cO = O = \frac{cN''}{cN''+H\vartheta}\cdot\gamma.$$

Sed est $cN'' = \frac{AB\mathfrak{C}a\pi'\Phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}$ et $H\vartheta = ABCa\Phi$, hincque ob $(C+1)\mathfrak{C}=C$ fiet

$$cN''+H\vartheta = \frac{ABCa\Phi(\pi'-\pi+\Phi)}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi} \text{ et } \frac{cN''}{cN''+H\vartheta} = \frac{\mathfrak{C}\pi'}{C(\pi'-\pi+\Phi)}.$$

Nunc igitur ob $\gamma = \frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}$ habebimus distantiam oculi idoneam:

$$O = \frac{AB\mathfrak{C}a\pi'\Phi}{(\pi'-\pi+\Phi)(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}.$$

IV. Pro quatuor lentibus

Cum sit (Fig. 15, p. 151) $dN'''+I\iota : dI = dN''' : dO$, erit

$$dO = O = \frac{dN'''}{dN'''+I\iota}\cdot\delta.$$

Sed est $dN''' = \frac{ABC\mathfrak{D}a\pi''\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$ et $I\iota = ABCDa\Phi$, hincque ob $(D+1)\mathfrak{D} = D$ fiet

$$dN''' + I\iota = \frac{ABCDa\Phi(\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} \quad \text{et} \quad \frac{dN'''}{dN''' + I\iota} = \frac{\mathfrak{D}\pi''}{D(\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}.$$

Ergo ob $\delta = \frac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$ prodit distantia oculi idonea:

$$O = \frac{ABC\mathfrak{D}a\pi''\Phi}{(\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}.$$

V. Pro quinque lentibus

Si ratiocinium simili modo ad casum quinque lentium extendatur, reperiemus distantiam oculi idoneam:

$$O = \frac{ABCD\mathfrak{E}a\pi'''\Phi}{(\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)}.$$

VI. Pro sex lentibus

Eodemque modo progrediendo colligitur fore pro casu sex lentium distantiam oculi idoneam:

$$O = \frac{ABCDE\mathfrak{F}a\pi''''\Phi}{(\pi'''' - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi)(\mathfrak{F}\pi'''' - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi)};$$

sicque ulterius, quousque libuerit, progredi licet.

COROLLARIUM 1

272. Quovis ergo casu necesse est, ut distantia oculi idonea prodeat positiva: si enim fieret negativa, totus campus apparens nusquam conspici posset.

COROLLARIUM 2

273. Iis autem casibus, quibus distantia O fit negativa, oculum immediate ultimae lenti applicari conveniet; tum vero oculus plus non cernet, quam si ultimae lentis apertura aequalis esset amplitudini pupillae.

COROLLARIUM 3

274. Hoc ergo casu statuatur semidiameter aperturae ultimae lentis $= \omega$ semidiametro pupillae, ex eaque aequatione eliciatur valor ipsius Φ, quo invento erit $a\Phi$ semidiameter campi apparentis, qui in obiecto revera conspicietur.

PROBLEMA 8

275. *Positis iisdem atque in problematibus praecedentibus eam conditionem in lentium dispositione definire, ut oculus in loco idoneo positus obiectum simul distincte videat.*

SOLUTIO

Quia aperturam lentis obiectivae evanescentem assumimus, in visione alia confusio locum habere nequit, nisi quatenus oculus non in distantia iusta ab ultima imagine, quam intuetur, existit, quae ergo tolletur, si lentes ita disponantur, ut imago ultima ante oculum in O situm in distantia iusta, quam littera l designavimus, versetur. Cum igitur in figuris locus oculi ante imaginem ultimam cadat, haec distantia negative sumta ipsi l aequalis est ponenda; unde pro quovis lentium numero sequentes habebimus determinationes:

I. Pro unica lente

Cum hic (Fig. 12, p. 139) sit $O = 0$ et $OF = \alpha = Aa$, oportet esse $Aa = -l$ ideoque $A = -\frac{l}{a}$ et $\alpha = -l$, unde indoles huius lentis determinatur, ita ut eius distantia focalis esse debeat $= \frac{al}{l-a}$.

II. Pro duabus lentibus

Ex inventa distantia $bO = O$ (Fig. 13, p. 146) erit $OG = \frac{O}{bN'} \cdot G\eta$. Est vero $\frac{O}{bN'} = \frac{1}{\pi - \Phi}$, unde fit $\frac{ABa\Phi}{\pi - \Phi} = -l$, hincque pro secunda lente $B = \frac{-(\pi - \Phi)l}{Aa\Phi}$ et $\mathfrak{B} = \frac{B}{B+1}$. Vel cum sit $Aa\Phi = \frac{-(\pi - \Phi)l}{B}$, erit pro loco oculi:

$$O = \frac{-\mathfrak{B}\pi}{B(\mathfrak{B}\pi - \Phi)}\,l.$$

III. Pro tribus lentibus

Hic est (Fig. 14, p. 148) $OH = \frac{O}{cN''} \cdot H\vartheta = \frac{H\vartheta}{\pi' - \pi + \Phi}$, unde obtinetur $OH = \frac{ABCa\Phi}{\pi' - \pi + \Phi} = -l$, sicque pro ultima lente habebitur $C = \frac{-(\pi' - \pi + \Phi)l}{ABa\Phi}$. At si pro determinatione primae lentis capiatur $Aa\Phi = \frac{-(\pi' - \pi + \Phi)l}{BC}$, erit distantia oculi:

$$O = \frac{-\mathfrak{C}\pi'}{C(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)}\,l.$$

IV. Pro quatuor lentibus

Cum sit (Fig. 15, p. 151) $OI = \frac{O}{aN'''} \cdot I\iota = \frac{I\iota}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$, habebitur $OI = \frac{ABCDa\Phi}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = -l$. Unde pro ultima lente $D = \frac{-(\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)l}{ABCa\Phi}$. Cum autem sit $ABCa\Phi = \frac{-(\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)l}{D}$, erit in loco oculi hoc valore surrogando:

$$O = \frac{-\mathfrak{D}\pi''}{D(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}\, l.$$

V. Pro quinque lentibus

Simili modo pro quinque lentibus ultima ita comparata esse debet, ut sit $E = \frac{-(\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)l}{ABCDa\Phi}$. Prima autem inde definita fit

$$O = \frac{-\mathfrak{E}\pi'''}{E(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)}\, l.$$

VI. Pro sex lentibus

Eodem modo patet pro sex lentibus fore $F = \frac{-(\pi'''' - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi)l}{ABCDEa\Phi}$, atque si hinc Aa definiatur:

$$O = \frac{-\mathfrak{F}\pi''''}{F(\mathfrak{F}\pi'''' - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}\, l;$$

quas formulas, quousque libuerit, continuare licet.

COROLLARIUM 1

276. Si distantia oculi iusta l fuerit infinita, erit, ut sequitur:

I. Pro una	lente	$A = \infty$	et	$\mathfrak{A} = 1$
II. pro duabus	lentibus	$B = \infty$	et	$\mathfrak{B} = 1$
III. pro tribus	lentibus	$C = \infty$	et	$\mathfrak{C} = 1$
IV. pro quatuor	lentibus	$D = \infty$	et	$\mathfrak{D} = 1$

etc.

COROLLARIUM 2

277. Casu ergo, quo distantia oculi iusta l est infinita, distantia oculi post lentem ultimam erit pro quovis lentium numero:

I. Pro unica lente $O = 0$

II. pro duabus lentibus $O = \dfrac{Aa\pi\Phi}{(\pi - \Phi)^2}$

III. pro tribus lentibus $O = \dfrac{ABa\pi'\Phi}{(\pi' - \pi + \Phi)^2}$

IV. pro quatuor lentibus $O = \dfrac{ABCa\pi''\Phi}{(\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)^2}$

etc.

SCHOLION

278. Hactenus campum apparentem Φ ut datum consideravi, ex eoque tam lentium indolem quam earum dispositionem determinavi, ut campus datae amplitudinis appareat, nihilque obstare deprehendimus, quominus huic conditioni satisfiat, cum numeri A, B, C, D etc. penitus arbitrio relinquantur, aperturarum vero rationes π, π', π'' etc. infra $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ accipi debeant. Verum hic multiplicationis ratio nondum in computum est ducta, qua simul campus apparens ita adstringitur, ut certum limitem excedere nequeat. Quoniam igitur in omnibus instrumentis dioptricis multiplicatio imprimis proposita esse solet, quemadmodum per eam campus apparens definiatur, in sequente problemate exponamus.

PROBLEMA 9

279. *Si instrumentum dioptricum ex quotcunque lentibus fuerit compositum, quarum quidem crassities ut nulla spectetur, simul vero multiplicationis ratio sit proposita, determinare campum apparentem.*

SOLUTIO

Manentibus omnibus denominationibus, quibus hactenus sumus usi, ita ut $a\Phi$ semidiametrum campi apparentis denotet, sit h distantia, ad quam multiplicationem referamus. Magnitudo igitur $a\Phi$ in distantia hac $= h$ nudo

oculo cerneretur sub angulo, cuius tangens est $=\frac{a\Phi}{h}$. Quare si multiplicationis ratio statuatur $=m$, necesse est, ut eadem magnitudo $a\Phi$ per lentes spectetur sub angulo, cuius tangens sit $=\frac{ma\Phi}{h}$. Iam vero ex iis, quae in problematibus praecedentibus sunt tradita, iste angulus facile assignatur, sicque obtinebitur angulus Φ indeque semidiameter campi apparentis $a\Phi$. Cum autem haec multiplicatio non ad ipsos angulos, sed eorum tangentes referatur, evidens est tantum partes obiecti minimas circa centrum E sitas in ratione proposita multiplicari, remotiores vero in ratione minore. Quo notato hanc multiplicationis rationem m pro quovis lentium numero contemplemur.

I. Pro unica lente

Tangens anguli (Fig. 12, p. 139), quo imago $F\zeta$ ab oculo in O constituto conspicitur, est $\frac{F\zeta}{OF}=\frac{F\zeta}{aF}$ ob $aO=0$; erit ergo $\frac{ma\Phi}{h}=\Phi$ seu $ma=h$. Hoc ergo casu campus apparens non determinatur, sed multiplicationis ratio est $m=\frac{h}{a}$. Verum ut visio sit distincta, per superius problema debet esse $A=-\frac{l}{a}$ et distantia oculi post lentem $O=0$. At obiectum situ erecto cernetur.

II. Pro duabus lentibus

Tangens anguli (Fig. 13, p. 146), quo imago $G\eta$ ab oculo in O constituto cernitur, est $=\frac{bN'}{bO}=\pi-\Phi=\frac{ma\Phi}{h}$; unde sequitur semidiameter campi apparentis:

$$\Phi=\frac{\pi h}{ma+h} \text{ pro situ inverso.}$$

Quo invento, ut visio sit distincta, oportet esse $B=\frac{-ml}{Ah}$ et $\mathfrak{B}=\frac{-ml}{Ah-ml}$, hincque prodit distantia oculi post lentem ocularem:

$$O=\frac{Ahl(ma+h)}{mmal+Ahh}.$$

III. Pro tribus lentibus

Tangens anguli (Fig. 14, p. 148), quo imago $H\vartheta$ ab oculo in O constituto cernitur, est $\frac{cN''}{cO}=\pi'-\pi+\Phi=\frac{ma\Phi}{h}$, unde fit semidiameter campi apparentis:

$$\Phi=\frac{(\pi'-\pi)h}{ma-h} \text{ pro situ erecto.}$$

Deinde, ut visio sit distincta, oportet esse $C = \frac{-ml}{ABh}$ et $\mathfrak{C} = \frac{-ml}{ABh - ml}$. Cum igitur sit $\pi' - \pi + \Phi = \frac{ma(\pi' - \pi)}{ma - h}$, erit

$$\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi = \pi' - \pi + \Phi - \frac{ABh\pi'}{ABh - ml} = \frac{ma(\pi' - \pi)}{ma - h} - \frac{ABh\pi'}{ABh - ml}$$

hincque pro loco oculi:

$$O = \frac{-ABhl\pi'}{(ABh - ml)(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)} = \frac{ABhl(ma - h)\pi'}{(mmal - ABhh)\pi' + ma(ABh - ml)\pi}.$$

IV. Pro quatuor lentibus

Tangens anguli (Fig. 15, p. 151), quo imago $I\iota$ ab oculo in O constituto cernitur, est $= \frac{dN'''}{dO} = \pi'' - \pi' + \pi - \Phi = \frac{ma\Phi}{h}$; unde elicitur:

$$\Phi = \frac{(\pi'' - \pi' + \pi)h}{ma + h} \text{ pro situ inverso.}$$

Hinc porro pro visione distincta esse debet $D = \frac{-ml}{ABCh}$ et $\mathfrak{D} = \frac{-ml}{ABCh - ml}$, unde fit

$$\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi = \frac{ma(\pi'' - \pi' + \pi)}{ma + h} - \frac{ABCh\pi''}{ABCh - ml}$$

et pro loco oculi:

$$O = \frac{ABChl(ma + h)\pi''}{(mmal + ABChh)\pi'' + ma(ABCh - ml)(\pi' - \pi)}.$$

V. Pro quinque lentibus

Eodem modo progrediendo pro campo apparente reperitur:

$$\Phi = \frac{(\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi)h}{ma - h} \text{ pro situ erecto,}$$

et ut visio evadat distincta, $E = \frac{-ml}{ABCDh}$ et $\mathfrak{E} = \frac{-ml}{ABCDh - ml}$, unde pro loco oculi idoneo concluditur:

$$O = \frac{ABCDhl(ma - h)\pi'''}{(mmal - ABCDhh)\pi''' + ma(ABCDh - ml)(\pi'' - \pi' + \pi)}.$$

VI. Pro sex lentibus

Hic campus apparens ita definitur, ut sit:

$$\Phi = \frac{(\pi''''' - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi)h}{ma + h} \text{ pro situ inverso;}$$

visio vero distincta exigit $F = \frac{-ml}{ABCDEh}$, $\mathfrak{F} = \frac{-ml}{ABCDEh - ml}$, unde pro loco oculi idoneo:

$$O = \frac{ABCDEhl(ma + h)\pi'''''}{(mmal + ABCDEhh)\pi''''' + ma(ABCDEh - ml)(\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi)};$$

sicque progressio ad plures lentes est manifesta.

COROLLARIUM 1

280. Datis ergo rationibus aperturarum singularum lentium π, π', π'' etc. una cum ratione multiplicationis m, distantia h, ad quam multiplicatio refertur, et distantia obiecti ante instrumentum a, determinatur campus apparens.

COROLLARIUM 2

281. Ut ergo campus apparens pro data multiplicatione maximus obtineatur, litteris π, π', π'' etc. ita valores maximos tribui conveniet, ut alternatim sint positivi et negativi.

COROLLARIUM 3

282. Si igitur valores π, π', π'' etc. usque ad $\frac{1}{3}$ augeri liceat, maximus valor ipsius Φ pro quovis lentium numero erit, ut sequitur:

Pro casu duarum lentium $\quad \Phi = \frac{h}{3(ma + h)}$

pro casu trium lentium $\quad \Phi = \frac{2h}{3(ma - h)}$

pro casu quatuor lentium $\quad \Phi = \frac{3h}{3(ma + h)}$

pro casu quinque lentium $\quad \Phi = \frac{4h}{3(ma - h)}$

etc.

COROLLARIUM 4

283. Quo plures ergo lentes adhibentur, eo magis campus apparens augeri potest; simul vero patet, quo maior multiplicatio desideretur, eo minorem fieri campum apparentem.

COROLLARIUM 5

284. Ratio multiplicationis m tam positive quam negative capi potest. Si positive accipitur, pro lentium numero pari situm inversum, pro impari autem situm erectum declarat. Contrarium vero evenit, si m fuerit numerus negativus.

SCHOLION 1

285. Hic autem imprimis notandum est valorem ipsius Φ tum solum angulum $EA\varepsilon$ praebere, quando fuerit tam exiguus, ut aliquot gradus non superet; si enim valor ipsius Φ prodeat multo maior, tum tangentem huius anguli $EA\varepsilon$ exprimit. Plerumque autem, si quidem multiplicatio sit modica, iste valor ipsius Φ tam parvus reperitur, ut sine errore pro ipso angulo $EA\varepsilon$ accipi possit. Hic igitur ob aliam causam amplitudo campi apparentis restringitur, ut certum limitem superare nequeat; cum enim angulus, quo radii in oculum incidentes in O ad axem inclinantur, nunquam possit esse rectus neque fortasse vix 60^0 superare queat, quandoquidem ne nudo quidem oculo spatium in coelo maius quam 120^0 conspicere valeamus; si illum angulum maximum, quem oculus capere valeat, circiter 63^0 statuamus, ut eius tangens sit $=2$, pro quovis lentium numero habebimus $\frac{ma\Phi}{h}=2$, unde fit $\Phi=\frac{2h}{ma}$ et $a\Phi=\frac{2h}{m}$. Data ergo multiplicatione m et distantia h, ad quam refertur, semidiameter spatii in obiecto conspicui nunquam maior existere potest quam $\frac{2h}{m}$, quotcunque etiam adhibeantur lentes eaeque ita disponantur, ut maximum campum patefaciant. In Telescopiis ergo, ubi sumitur $h=a$ et semidiameter campi ex ipso angulo Φ aestimatur, eius tangens nunquam maior esse potest quam $\frac{2}{m}$; unde sequentem tabellam adiungo, quae pro quavis multiplicatione semidiametrum campi apparentis maximi ostendit, quem nunquam superare liceat.

Multiplicatio m	Semidiameter campi apparentis maximi	Multiplicatio m	Semidiameter campi apparentis maximi
5	21^0 48′	60	1^0 54′ 33″
10	11 18	70	1 38 13
15	7 35	80	1 25 57
20	5 42	90	1 16 24
25	4 34	100	1 8 45
30	3 49	150	0 45 50
35	3 $16\frac{1}{2}$	200	0 34 22
40	2 52	250	0 27 30
45	2 33	300	0 22 55
50	2 $17\frac{1}{2}$	400	0 17 11
		500	0 13 45

Quod si ergo numerum lentium multiplicando iam fere ad tantum campum apparentem pertigerimus, is ulterius nullo modo augeri poterit.

SCHOLION 2

286. Quod ad locum oculi idoneum attinet, eum ideo in O constituimus, ut omnes radios per lentes transmissos accipiat, etiamsi pupilla maxime esset constricta: ex quo patet ob amplitudinem pupillae oculum de hoc loco sine ullo detrimento aliquantillum removeri posse, ita ut superfluum foret hunc locum nimis sollicite observare, nisi forte apertura ultimae lentis fuerit admodum magna. Sin ea autem pupillam non superet eaque adeo sit minor, manifestum est oculum ei immediate applicatum aeque omnes radios excipere et eundem campum contueri, ac si in loco idoneo esset constitutus. His igitur casibus, si forte distantia O pro loco oculi prodeat negativa, nihil de campo apparente perit, dummodo oculus lenti ultimae immediate applicetur. His itaque, quae ad visionem per instrumenta dioptrica in genere pertinent, expeditis superest, ut investigemus, quantum visio ob diversam radiorum refrangibilitatem turbetur et quemadmodum hanc perturbationem evitare queamus.

CAPUT VI

DE CONFUSIONE
A DIVERSA RADIORUM INDOLE ORIUNDA

PROBLEMA 1

287. *Si a puncto dato E* (Fig. 1, p. 7) *radii per lentem PP transmittantur, definire variationem in loco imaginis F, quae a diversa radiorum refrangibilitate oritur.*

SOLUTIO

Sit distantia puncti E ante lentem $AE = a$, facierum autem lentis radius anterioris $= f$, posterioris $= g$ et crassities $Aa = v$, quae quantitates sunt constantes. Posita nunc refractionis ratione ex aere in vitrum $= n:1$, ob diversam radiorum naturam numerus n erit variabilis, ideoque etiam locus imaginis F post lentem expressae, cuius distantia si ponatur $aF = \alpha$, erit ex supra inventis

$$\frac{n-1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{2n}{k+v} \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{g} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2n}{k-v},$$

ubi quantitas k etiam pro variabili est habenda, quia tantum a, f, g et v sunt constantes. Quaestio ergo huc redit, ut, si numerus n differentiali suo dn crescere sumatur, definiatur differentiale distantiae α. Quare differentientur ambae aequationes illae:

$$\frac{dn}{f} = \frac{2dn}{k+v} - \frac{2ndk}{(k+v)^2}, \quad \frac{dn}{g} = \frac{-d\alpha}{\alpha\alpha} - \frac{2dn}{k-v} + \frac{2ndk}{(k-v)^2},$$

indeque eliminato dk habebitur

$$\frac{dn(k+v)^2}{f} + \frac{dn(k-v)^2}{g} = 2dn(k+v) - 2dn(k-v) - \frac{d\alpha(k-v)^2}{\alpha\alpha}.$$

Restituantur pro f et g valores initio positi, ac pervenietur ad hanc aequationem:

$$\frac{dn(k+v)^2}{a}+\frac{dn(k-v)^2}{\alpha}+4v\,dn+\frac{(n-1)d\alpha}{\alpha\alpha}(k-v)^2=0,$$

unde reperitur

$$\frac{d\alpha}{\alpha\alpha}=\frac{-dn}{(n-1)a}\left(\frac{k+v}{k-v}\right)^2-\frac{dn}{(n-1)\alpha}-\frac{4v\,dn}{(n-1)(k-v)^2}$$

seu

$$d\alpha=\frac{-\alpha\,dn}{n-1}\left(1+\frac{\alpha}{a}\left(\frac{k+v}{k-v}\right)^2+\frac{4\alpha v}{(k-v)^2}\right).$$

Tum vero, cum etiam k sit quantitas variabilis, erit

$$dk=\frac{-(k+v)dn}{n(n-1)}\left(1+\frac{k+v}{2a}\right).$$

Cum ergo posuerimus $\frac{k-v}{k+v}=i$, ob $di=\frac{2v\,dk}{(k+v)^2}$ erit

$$di=\frac{-v\,dn}{n(n-1)}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{k+v}\right).$$

COROLLARIUM 1

288. Si $n:1$ denotet rationem refractionis radiorum mediae naturae, ut sit $n=\frac{31}{20}=1{,}55$, erit pro radiis rubris seu minime refractis $n=1{,}54$, et violaceis $n=1{,}56$, quorum valorum discrimen a medio, cum sit $=\frac{1}{100}$, pro differentiali dn haberi poterit.

COROLLARIUM 2

289. Quare si α denotet distantiam imaginis a radiis mediis formatae, pro ea, quae a rubris formatur, erit $dn=-\frac{1}{100}$ et $\frac{dn}{n-1}=\frac{-1}{55}$. Hinc distantia imaginis rubrae post lentem erit

$$\alpha+\frac{\alpha}{55}\left(1+\frac{\alpha}{a}\left(\frac{k+v}{k-v}\right)^2+\frac{4\alpha v}{(k-v)^2}\right).$$

Distantia autem imaginis violaceae post lentem erit

$$\alpha-\frac{\alpha}{55}\left(1+\frac{\alpha}{a}\left(\frac{k+v}{k-v}\right)^2+\frac{4\alpha v}{(k-v)^2}\right).$$

COROLLARIUM 3

290. Si crassities lentis evanescat, ut sit $v = 0$, ob variabilitatem numeri n erit

$$d\alpha = \frac{-\alpha\,dn}{n-1}\left(1 + \frac{\alpha}{a}\right) = \frac{-\alpha\alpha\,dn}{n-1}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a}\right).$$

Ac si distantia focalis lentis ponatur $= p$, cum sit $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}$, erit

$$d\alpha = \frac{-\alpha\alpha\,dn}{(n-1)p} = \frac{-20\alpha\alpha\,dn}{11p}.$$

SCHOLION

291. Hoc ergo modo ob diversam radiorum naturam valor distantiae α immutatur, unde, si ab ea tanquam ab obiecto radii porro ad lentem secundam emittantur, fiet etiam respectu huius lentis distantia obiecti variabilis. Quam ob causam in loco imaginis ab ea formatae duplex variatio orietur: id quod deinceps etiam in lentibus sequentibus multo magis eveniet. Hanc igitur variationem, quae pro quavis lente in loco imaginis nascitur, in sequente problemate determinemus.

PROBLEMA 2

292. *Si locus imaginis F* (Fig. 5, p. 44), *quae respectu lentis QQ vicem obiecti gerit, ob diversam radiorum naturam ipse sit variabilis, determinare variationem, quam ob eandem causam imago sequens in G patietur.*

SOLUTIO

Sit pro radiis mediae naturae, quibus respondet numerus n, distantia obiecti F ante lentem $BF = b$ imaginisque inde proiectae distantia post lentem $bG = \beta$; dum autem n abit in $n + dn$, hae distantiae ambae b et β capiant sua incrementa differentialia db et $d\beta$. Ad quae invenienda sit lentis QQ radius faciei anterioris $= f$, posterioris $= g$ et crassities $Bb = v$, eritque ut ante:

$$\frac{n-1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{2n}{k+v} \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{g} = \frac{1}{\beta} - \frac{2n}{k-v},$$

ubi k cum b et β pro variabili est habenda. Differentiatione ergo instituta

habebitur

$$\frac{dn}{f}=\frac{-db}{bb}+\frac{2dn}{k+v}-\frac{2ndk}{(k+v)^2},\qquad \frac{dn}{g}=-\frac{d\beta}{\beta\beta}-\frac{2dn}{k-v}+\frac{2ndk}{(k-v)^2},$$

unde eliminato dk fit

$$\frac{dn(k+v)^2}{f}+\frac{dn(k-v)^2}{g}=\frac{-db}{bb}(k+v)^2-\frac{d\beta}{\beta\beta}(k-v)^2+4vdn,$$

quae multiplicata per $n-1$, si pro f et g valores dati substituantur, prodit

$$\frac{dn(k+v)^2}{b}+2ndn(k+v)+\frac{dn(k-v)^2}{\beta}-2ndn(k-v)$$

$$=-\frac{(n-1)db}{bb}(k+v)^2-\frac{(n-1)d\beta}{\beta\beta}(k-v)^2+4(n-1)vdn$$

seu

$$\frac{dn(k+v)^2}{(n-1)b}+\frac{dn(k-v)^2}{(n-1)\beta}+\frac{4vdn}{n-1}+\frac{db}{bb}(k+v)^2+\frac{d\beta}{\beta\beta}(k-v)^2=0.$$

Atque hinc elicitur:

$$d\beta=\frac{-\beta\beta db}{bb}\left(\frac{k+v}{k-v}\right)^2-\frac{\beta dn}{n-1}\left(1+\frac{\beta}{b}\left(\frac{k+v}{k-v}\right)^2+\frac{4\beta v}{(k-v)^2}\right).$$

Pro variabilitate autem ipsius k reperietur

$$\frac{dk}{(k+v)^2}=-\frac{db}{2nbb}-\frac{dn}{2n(n-1)b}-\frac{dn}{n(n-1)(k+v)}.$$

Quare si ponatur $\frac{k-v}{k+v}=i$, ob $di=\frac{2vdk}{(k+v)^2}$ erit

$$di=\frac{-vdb}{nbb}-\frac{vdn}{n(n-1)b}-\frac{2vdn}{n(n-1)(k+v)},$$

ac si loco k numerus i introducatur, erit

$$d\beta=\frac{-\beta\beta db}{iibb}-\frac{\beta dn}{n-1}\left(1+\frac{\beta}{iib}+\frac{(1-i)^2\beta}{iiv}\right)\quad\text{et}\quad di=\frac{-vdb}{nbb}-\frac{vdn}{n(n-1)}\left(\frac{1}{b}+\frac{1-i}{v}\right).$$

COROLLARIUM 1

293. Inventa aequatio differentialis etiam hac forma repraesentari potest, ut sit

$$\frac{id\beta}{\beta\beta}+\frac{db}{ibb}=\frac{-dn}{n-1}\left(\frac{i}{\beta}+\frac{1}{ib}+\frac{(1-i)^2}{iv}\right)$$

sive restituendo k

$$\frac{d\beta}{\beta\beta}\left(\frac{k-v}{k+v}\right)+\frac{db}{bb}\left(\frac{k+v}{k-v}\right)=\frac{-dn}{n-1}\left(\frac{1}{\beta}\left(\frac{k-v}{k+v}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{k+v}{k-v}\right)+\frac{4v}{kk-vv}\right),$$

ubi haec observanda est analogia, ut quemadmodum ad b refertur $\frac{k+v}{k-v}$, ita ad β referatur $\frac{k-v}{k+v}$.

COROLLARIUM 2

294. Si lentis huius crassities evanescat, fit $v=0$ et $i=1$, ubi figura lentis non amplius in computum ingreditur, sed sola distantia focalis, unde variatio in loco imaginis G ita erit comparata, ut sit

$$\frac{d\beta}{\beta\beta}+\frac{db}{bb}=\frac{-dn}{n-1}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{b}\right)$$

ideoque

$$d\beta=\frac{-\beta\beta}{bb}db-\frac{\beta\beta dn}{n-1}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{b}\right).$$

COROLLARIUM 3

295. Si casum a radiis mediae naturae, ad quos formulae hactenus traditae sunt accommodatae, ad radios rubros transferre velimus, poni oportet $dn=-\frac{1}{100}$, sin autem ad radios violaceos, $dn=+\frac{1}{100}$.

PROBLEMA 3

296. *Si radii ab obiecto E per lentes quotcunque transmittantur, determinare variationem in locis singularum imaginum, quae a diversa radiorum refrangibilitate proficiscitur.*

SOLUTIO

Retineantur omnes denominationes, quibus in superioribus capitibus sumus usi, ac sint a, α, b, β, c, γ etc. distantiae determinatrices lentium pro radiis mediae naturae. Variata ergo ratione refractionis etiam hae distantiae variabuntur, quarum variationes differentialibus indicemus. Cum autem distantiae inter binas lentes maneant constantes, illae variationes ita erunt comparatae, ut sit

$$d\alpha+db=0,\qquad d\beta+dc=0,\qquad d\gamma+dd=0 \text{ etc.}$$

imaginis habetur $\frac{1}{ii'i''i'''} \cdot \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd} \cdot \frac{z}{l}$ (§ 189); simili modo mutatio assignari potest, quam magnitudo ultimae imaginis ob diversam refrangibilitatem radiorum patietur.

COROLLARIUM 3

299. Cognita autem utraque mutatione, quam ultima imago tam respectu loci quam magnitudinis subit, non difficulter colligetur, quanta confusione ipsa visio ob diversam radiorum refrangibilitatem perturbetur.

COROLLARIUM 4

300. Si crassities lentium evanescat, fiet

$$d\alpha = -db = \frac{-\alpha\alpha dn}{n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$d\beta = -dc = \frac{-\beta\beta db}{bb} - \frac{\beta\beta dn}{n-1}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$d\gamma = -dd = \frac{-\gamma\gamma dc}{cc} - \frac{\gamma\gamma dn}{n-1}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$d\delta = -de = \frac{-\delta\delta dd}{dd} - \frac{\delta\delta dn}{n-1}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{\delta}\right)$$

etc.,

numeri autem i, i', i'' etc. abeunt in unitatem nullique mutationi amplius sunt obnoxii.

Si ergo crassities lentium evanescat, pro diversa refractione singularum lentium formulae superiores abibunt in sequentes:

$$\text{I. } d\alpha = -db = \frac{-\alpha\alpha dn}{n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\text{II. } d\beta = -dc = \frac{-\beta\beta db}{bb} - \frac{\beta\beta dn'}{n'-1}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\text{III. } d\gamma = -dd = \frac{-\gamma\gamma dc}{cc} - \frac{\gamma\gamma dn''}{n''-1}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}\right)$$

etc.

Ceterum per se manifestum est, quando § 288 dn vel $+\frac{1}{100}$ vel $-\frac{1}{100}$ significare dicitur, id tantum de illa vitri specie, pro qua est refractio radiorum

mediorum $n = \frac{31}{20}$, esse intelligendum, et pro aliis vitri speciebus differentialia dn', dn'', dn''' etc. haud mediocriter ab $\frac{1}{100}$ discrepare posse. Quanta autem futura sit haec diversitas, optandum esset, ut ea potius experimentis quam ex theoria quapiam definiretur.

SCHOLION

301. Cum igitur ob diversam radiorum refrangibilitatem cuique imagini duplex alteratio inducatur, quarum altera eius magnitudinem, altera vero eius locum afficit, duplex inde confusio in visionem infertur. Si enim formulae in superioribus capitibus exhibitae ad radios mediae naturae restringantur, pro quibus est $n = \frac{31}{20}$, posito $dn = -\frac{1}{100}$ ex formulis hic traditis differentialibus locus et magnitudo imaginis a radiis rubris formatae definietur; posito autem $dn = +\frac{1}{100}$ locus et magnitudo imaginis violaceae declarabitur. Scilicet si

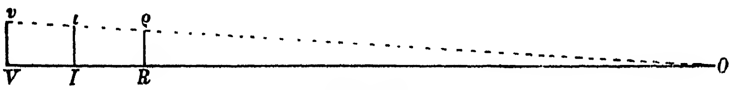

Fig. 16.

$I\iota$ (Fig. 16) fuerit imago ultima visioni obiecta, quae a radiis mediae naturae formatur, per formulas modo inventas, prout vel $dn = -\frac{1}{100}$ vel $dn = +\frac{1}{100}$ ponatur, definietur tam imago rubra $R\varrho$ quam violacea Vv; atque ex natura differentialium manifestum est cum intervalla IR et IV inter se aequalia esse debere, tum etiam differentias $I\iota - R\varrho$ et $Vv - I\iota$, ita ut oculo series innumerabilium imaginum inter extremas $R\varrho$ et Vv sitarum simul cernenda offeratur, unde eo maior confusio oriatur necesse est, quo maior fuerit differentia tam ratione loci quam magnitudinis. Quare haec confusio penitus tolleretur, si eiusmodi lentium dispositio definiri posset, ut tam intervallum RV quam differentia inter imagines $R\varrho$ et Vv ad nihilum redigeretur, quod utrumque nisi simul praestari queat, confusionem perfecte tollere non licet. Verumtamen etiamsi neutri harum conditionum satisfieri possit, tamen dabitur pro

distantiam iustam ab oculo fuerit remota. Neque tamen hinc ora obiecti coloribus iridis cincta apparebit, cui confusionis speciei maxime est occurrendum; ideoque ea, quae adhuc adfuerit, confusio facile tolerari poterit, quae vero etiam omnino tolleretur, si modo intervallum RV vel in nihilum redigi vel saltem satis parvum reddi posset. Hinc ergo intelligimus vitium illud, quo obiecta coloribus iridis circumdata saepe repraesentantur, non tam necessario cum instrumentis dioptricis esse coniunctum, ut nullo pacto ab iis separari queat; quamobrem eo magis operae erit pretium, ut investigemus, quomodo haec instrumenta ab isto vitio liberari possint. Quae tota investigatio huc redit, ut determinetur punctum O, ubi recta per terminos imaginum v, ι, ϱ ducta cum axe concurrit hocque punctum cum loco oculi iam supra definito conveniens reddatur, si quidem fieri potest: unde perspicitur locum oculi O hac proprietate praeditum esse oportere, ut angulus, sub quo ultima imago cernitur, ob variabilitatem numero n tributam nullam mutationem patiatur. Tum vero insuper videndum erit, num intervalla IR et IV vel ad nihilum reduci vel minima reddi queant.

PROBLEMA 4

302. *Proposita unica lente definire locum oculi, unde obiectum sine margine colorato cernatur.*

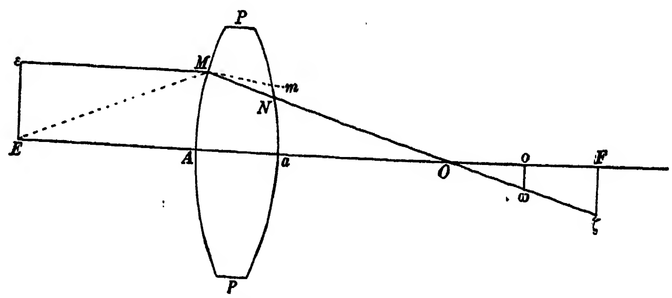

Fig. 12 (iterata).

SOLUTIO

Sit obiecti $E\varepsilon$ (Fig. 12) ante lentem distantia $EA = a$, imago vero per radios mediae naturae in $F\zeta$ repraesentetur, ponaturque $aF = \alpha$. Pro lente vero sit eius crassities $Aa = v$ et quantitas arbitraria $= k$, unde capiatur $\frac{k-v}{k+v} = i$. Hinc posito $E\varepsilon = z$ erit $F\zeta = \frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha}{a} z$ (§ 86); quare si pro loco oculi statuatur

distantia $aO = O$, quae est fixa, erit $OF = \alpha - O$ et anguli $FO\zeta$ tangens $= \frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{z}{\alpha - O}$, quae formula ob diversam radiorum refrangibilitatem nullam mutationem subire debet. Inde autem quantitates α et i tantum variantur, dum reliquae manent constantes. Quare istius formulae differentiale logarithmicum nihilo aequale positum praebet hanc aequationem

$$-\frac{di}{i} + \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{d\alpha}{\alpha - O} = 0 \quad \text{seu} \quad \frac{-di}{i} - \frac{O d\alpha}{\alpha(\alpha - O)} = 0,$$

ubi si valores supra inventi substituantur, prodit

$$\frac{v\,dn}{in(n-1)}\left(\frac{1}{a} + \frac{1-i}{v}\right) + \frac{O\alpha\,dn}{i(n-1)(\alpha - O)}\left(\frac{i}{\alpha} + \frac{1}{ia} + \frac{(1-i)^2}{iv}\right) = 0,$$

quae aequatio per $\frac{dn}{i(n-1)}$ divisa praebet:

$$\frac{v}{na} + \frac{1-i}{n} + \frac{O\alpha}{\alpha - O}\left(\frac{i}{\alpha} + \frac{1}{ia} + \frac{(1-i)^2}{iv}\right) = 0,$$

unde locus oculi definiri poterit; qui si debeat convenire cum supra invento (§ 238), ubi invenimus $O = \frac{-i\alpha v}{n\alpha - iv}$, erit $\alpha - O = \frac{n\alpha\alpha}{n\alpha - iv}$ et $\frac{O\alpha}{\alpha - O} = \frac{-iv}{n}$, hincque nostra aequatio per n multiplicata abit in $\frac{v}{a} + 1 - i - \frac{iiv}{\alpha} - \frac{v}{a} - (1-i)^2 = 0$ seu $i - ii - \frac{iiv}{\alpha} = 0$, ideoque $i = \frac{\alpha}{\alpha + v} = \frac{k - v}{k + v}$. Quamobrem quantitatem arbitrariam k ita definiri conveniet, ut sit $k = 2\alpha + v$; et cum sit $i = \frac{\alpha}{\alpha + v}$, pro loco oculi habebimus $O = \frac{-\alpha v}{n\alpha + (n-1)v} = \frac{-20\,\alpha v}{31\,\alpha + 11\,v}$ ob $n = \frac{31}{20}$.

Quod si porro hinc variationem in loco imaginis desideremus, definiri oportet differentiale $d\alpha$, quod fiet:

$$d\alpha = \frac{-\alpha\alpha\,dn}{i(n-1)}\left(\frac{i}{\alpha} + \frac{1}{ia} + \frac{(1-i)^2}{iv}\right)$$

et pro i posito valore $\frac{\alpha}{\alpha + v}$

$$d\alpha = \frac{-(\alpha + v)dn}{n-1}\left(1 + \frac{\alpha + v}{a}\right),$$

qui valor si ad nihilum redigi posset, confusio omnis a dive refrangibilitate oriunda perfecte tolleretur.

COROLLARIUM 1

303. Pro lentis ergo constructione quantitas arbitraria k ita accipi debet, ut sit $k = 2\alpha + v$; atque tum oculus in eo loco constitutus, ubi totum campum apparentem percipiat, simul nullam confusionem a diversa radiorum indole sentiet.

COROLLARIUM 2

304. Ut autem oculus simul imaginem in distantia iusta aspiciat, oportet sit $\alpha - O = -l$, ideoque $l = \frac{-31\alpha(\alpha + v)}{31\alpha + 11v}$. Unde colligitur:

$$\alpha = \frac{-1}{2}l - \frac{1}{2}v - \sqrt{\left(\frac{1}{4}ll + \frac{9}{62}vl + \frac{1}{4}vv\right)},$$

hincque

$$O = \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}v - \sqrt{\left(\frac{1}{4}ll + \frac{9}{62}vl + \frac{1}{4}vv\right)}$$

et

$$k = -l - 2\sqrt{\left(\frac{1}{4}ll + \frac{9}{62}vl + \frac{1}{4}vv\right)}.$$

COROLLARIUM 3

305. Potest vero insuper effici, ut etiam $d\alpha$ evanescat, quod evenit, si $a + \alpha + v = 0$, hoc est

$$a = \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}v + \sqrt{\left(\frac{1}{4}ll + \frac{9}{62}vl + \frac{1}{4}vv\right)}.$$

Verum cum hoc casu ob $\alpha = -a - v$ imago in ipsum obiectum cadat, ita ut radii nullam refractionem pati sint censendi, visio per lentem perinde erit comparata atque nudis oculis.

COROLLARIUM 4

306. Si crassities lentis v plane evanescat, tam ob campum apparentem quam diversam radiorum refrangibilitatem fit $O = 0$; hoc ergo casu oculus lenti immediate applicatus nullam confusionem ob diversam radiorum naturam percipiet. Dum ergo fuerit $\alpha = -l$, visio erit distincta.

SCHOLION

307. Hic scilicet penitus mentem abstrahimus a confusione iam supra determinata, quae a lentium apertura oritur, ideoque aperturam primae lentis ut evanescentem spectamus. Eam igitur hic tantum confusionis speciem contemplamur, quae a diversa radiorum refrangibilitate originem ducit; quam plerumque tolli observavimus, si angulus ad O invariabilis reddatur; tum enim ora obiecti satis bene terminata conspicietur neque coloribus iridis cincta. Interim tamen adhuc aliqua confusio sentiri poterit inde oriunda, quod, si imago media iustam ab oculo distantiam teneat, imaginum extremarum altera sit nimis propinqua, altera nimis remota; verum si earum intervallum non sit admodum magnum, confusio haec parum erit sensibilis. Ita hic invenimus, quod experientia satis comprobatur, si obiecta per unicam lentem spectemus, ea margine colorato destituta apparere, dummodo oculus immediate applicetur; quod si quando secus evenire videatur, causa aperturae lentis sine dubio erit tribuenda, cui conditioni rationes hic allegatae refragantur.

PROBLEMA 5

308. *Si instrumentum dioptricum duabus instructum sit lentibus, definire locum oculi, unde obiectum sine margine colorato videatur.*

SOLUTIO

Posita obiecti distantia $AE = a$ (Fig. 13) sint pro radiis mediae naturae reliquae distantiae determinatrices $aF = \alpha$, $BF = b$ et $bG = \beta$, crassities vero lentium $Aa = v$, $Bb = v'$ et distantiae arbitrariae k et k', ponatur-

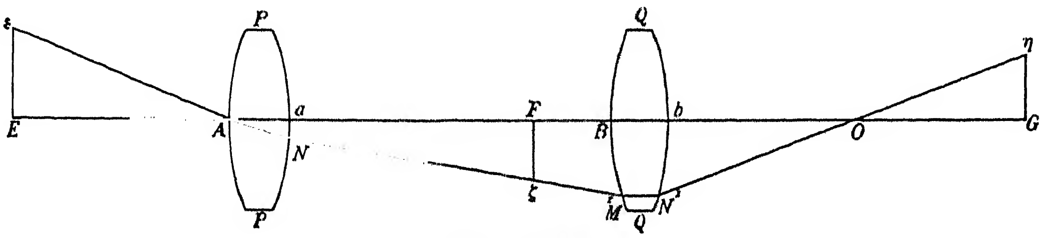

Fig. 13 (iterata)

que $\frac{k-v}{k+v} = i$ et $\frac{k'-v}{k'+v'} = i'$. His positis si magnitudo obiecti $E\varepsilon$ vocetur $= z$, erit imago $G\eta = \frac{1}{ii'} \cdot \frac{\alpha\beta}{ab} \cdot z$, unde, si oculi distantia ponatur $bO = O$, ob $GO = \beta - O$

erit anguli $GO\eta$ tangens $\frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}\cdot\frac{z}{\beta-O}$, cuius differentiale logarithmicum nihilo aequatum praebet:

$$-\frac{di}{i}-\frac{di'}{i'}+\frac{d\alpha}{\alpha}-\frac{db}{b}+\frac{d\beta}{\beta}-\frac{d\beta}{\beta-O}=0,$$

quae valoribus supra (§ 296) inventis substitutis abit in:

$$\frac{v\,dn}{in(n-1)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1-i}{v}\right)+\frac{v'db}{n'i'bb}+\frac{v'dn'}{i'n'(n'-1)}\left(\frac{1}{b}+\frac{1-i'}{v'}\right)-\frac{db}{\alpha}-\frac{db}{b}$$
$$+\frac{O}{\beta-O}\left(\frac{\beta db}{i'i'bb}+\frac{\beta\,dn'}{i'(n'-1)}\left(\frac{i'}{\beta}+\frac{1}{i'b}+\frac{(1-i')^2}{i'v'}\right)\right)=0.$$

Verum conditio campi exigebat $O=\frac{\beta\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}+\frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}z}$, existente

$$\mathfrak{b}=\left(\frac{i'}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a}-\frac{i'bv}{n\alpha\alpha}-\frac{1}{i}\frac{\alpha v'}{n'ab}\right)z$$

(§ 245), unde fit

$$\frac{O}{\beta-O}=\frac{\beta\mathfrak{b}}{\frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta\beta}{ab}z}=\frac{ii'ab}{\alpha\beta}\left(\frac{i'}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a}-\frac{i'bv}{n\alpha\alpha}-\frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha v'}{n'ab}\right).$$

Nunc vero est $db=\frac{\alpha\alpha dn}{i(n-1)}\left(\frac{i}{\alpha}+\frac{1}{ia}+\frac{(1-i)^2}{iv}\right)$, quem valorem antequam substituamus, transformemus aequationem nostram in hanc formam [posito $n'=n$]

$$\frac{dn}{n-1}\left(\frac{v}{ina}+\frac{1-i}{in}+\frac{v'}{i'nb}+\frac{1-i'}{i'n}+\frac{\beta O}{i'(\beta-O)}\left(\frac{i'}{\beta}+\frac{1}{i'b}+\frac{(1-i')^2}{i'v'}\right)\right)$$
$$+\,db\left(\frac{v'}{ni'bb}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{b}+\frac{\beta O}{i'i'bb(\beta-O)}\right)=0,$$

ubi posterius membrum abit in $-\frac{iv}{n\alpha\alpha}db$; tum vero erit

$$0=\frac{dn}{n-1}\left\{\begin{aligned}&1+\frac{b}{\alpha}+\frac{i'i'b}{\beta}\left(1+\frac{b}{\alpha}\right)+\frac{(1-i')^2b(\alpha+b)}{\alpha v'}+\frac{2-i-i'}{n}\\&-\frac{iv}{n\alpha}-\frac{i'v'}{n\beta}-\frac{ibv}{n\alpha\alpha}-\frac{ii'i'bbv}{n\alpha\alpha\beta}-\frac{i(1-i')^2bbv}{n\alpha\alpha v'}\end{aligned}\right\}$$

Distinguendo n' ab n erit

$$\frac{dn}{n-1}\left(\frac{iv}{\alpha n}-\frac{(1-i)}{n}\right)=\frac{dn'}{n'-1}\left\{\begin{matrix}1+\frac{b}{\alpha}+\frac{i'i'b}{\beta}\left(1+\frac{b}{\alpha}\right)-\frac{ii'i'bbv}{n\alpha\alpha\beta}-\frac{i'v'}{n'\beta}+\frac{1-i'}{n'}\\ -\frac{ibv}{n\alpha\alpha}+\frac{b(1-i')^2}{v'}\left(1+\frac{b}{\alpha}\right)-\frac{i(1-i')^2bbv}{n\alpha\alpha v'}\end{matrix}\right\}$$

cuius aequationis complicatio obstat, quominus quicquam commode inde concludi possit.

COROLLARIUM 1

309. Si ambae lentes crassitie careant, ut sit $v=0$, $v'=0$ et $i=i'=1$, aequatio differentialis prima est [existente $n'=n$]

$$\frac{d\alpha}{\alpha}-\frac{db}{b}-\frac{O\,d\beta}{\beta(\beta-O)}=0;$$

tum vero:

$$d\alpha=-db=\frac{-\alpha\alpha dn}{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\right)$$

et

$$d\beta=\frac{-\beta\beta db}{bb}-\frac{\beta\beta dn}{n-1}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{b}\right)=\frac{-dn}{n-1}\left(\frac{\alpha\alpha\beta\beta}{bb}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\right)+\beta\beta\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{b}\right)\right),$$

quibus valoribus substitutis et per $\frac{dn}{n-1}$ divisione facta fit

$$-\alpha\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)+\frac{O\beta}{\beta-O}\left(\frac{\alpha\alpha}{bb}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{b}\right)=0.$$

Unde si oculus lenti posteriori immediate applicaretur, ut esset $O=0$, deberet esse

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)=0.$$

COROLLARIUM 2

310. Verum in eadem hypothesi, ut locus oculi congruat cum eo, quem visio campi exigit, debet esse $O=\frac{b\beta(\alpha+b)}{b(\alpha+b)+\alpha\beta}$, unde fit $\beta-O=\frac{\alpha\beta\beta}{b(\alpha+b)+\alpha\beta}$, ideoque $\frac{O}{\beta-O}=\frac{b(\alpha+b)}{\alpha\beta}=\frac{bb}{\beta}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)$, quo valore substituto nostra aequatio erit

$$0=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)\left(-\alpha\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\right)+bb\left(\frac{\alpha\alpha}{bb}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{b}\right)\right),$$

quae reducitur ad hanc formam $0=bb\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{b}\right)$. Distinguendo n' ab n

membra a dn pendentia se destruunt, et oritur $0 = \frac{dn'}{n'-1} bb \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{b}\right)$, quod ita ostenditur:

Cum aequatio prima differentialis praebeat:

$$\frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{db}{b} - \frac{O\,d\beta}{\beta(\beta - O)} = 0 \quad \text{sive} \quad d\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right) - \frac{O\,d\beta}{\beta(\beta - O)} = 0,$$

cum igitur ex conditione campi apparentis sit $\frac{O}{\beta - O} = \frac{bb}{\beta}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right)$, erit

$$d\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right) - \frac{bb}{\beta^2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right) d\beta = 0$$

ideoque loco $d\beta$ suum valorem substituendo

$$d\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right) - \frac{bb}{\beta^2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{\beta\beta\,d\alpha}{bb} - \frac{\beta^2 dn'}{n'-1}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)\right) = 0,$$

ubi membra, quae $d\alpha$ continent, manifesto se destruunt, et tota quaestio ad hanc aequationem perducitur

$$\frac{dn'}{n'-1} bb\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{b}\right) = 0.$$

COROLLARIUM 3

311. Quod si ergo huic conditioni satisfieri possit, obiectum sine margine colorato apparebit; praeterea vero confusio penitus tolleretur, si reddi liceret $d\beta = 0$, quod fit per hanc aequationem

$$\frac{\alpha\alpha}{bb}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{b} = 0 \quad \text{sive} \quad \alpha\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a}\right) + bb\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{b}\right) = 0$$

[vel distinguendo n' ab n]

$$\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{\alpha\alpha}{bb}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a}\right) + \frac{dn'}{n'-1}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{b}\right) = 0.$$

COROLLARIUM 4

312. Priori autem aequationi satisfieri nequit, nisi fuerit vel $\alpha + b = 0$ vel $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{b} = 0$. Illo casu ambae lentes coniungerentur, ut unicam constituerent; hoc vero posterioris distantia focalis fieret infinita, qui casus iterum ad casum unicae lentis rediret; foret enim $O = -\alpha - b$, ob $\beta = -b$, et oculus priori lenti immediate applicari deberet.

SCHOLION

313. Si simili modo has investigationes ad plures lentes extendere vellemus, non neglecta earum crassitie in formulas plane inextricabiles delaberemur, unde vix quicquam concludi posset. Verum quia in omnibus fere instrumentis dioptricis, praecipue quae pluribus lentibus constant, iis tam exigua crassities tribui solet, ut sine notabili errore pro nihilo haberi possit, tam taediosae indagationi facile supersedere poterimus. Ad quod accedit, quod hic non de summo rigore geometrico agatur, sed contenti esse queamus, dummodo hanc confusionem satis prope cognoverimus: ex quo sufficiet in consideratione plurium lentium earum crassitiem prorsus neglexisse.

SUPPLEMENTUM IV[1])

Si ratio refractionis in singulis lentibus sit diversa, solutio sequenti modo absolvetur [neglecta lentium crassitie]:

I. Prima aequatio differentialis prorsus se habebit, ut in problemate, ita ut sit

$$d\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)+d\beta\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right)-\frac{O\,d\gamma}{\gamma(\gamma-O)}=0,$$

et quia etiam, ut ante, est

$$\frac{O}{\gamma-O}=\frac{bbcc}{\alpha\beta^2\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{b}\right)+\frac{cc}{\beta\gamma}\left(1+\frac{\beta}{c}\right),$$

erit nostra aequatio

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)\left(d\alpha-\frac{bbcc}{\beta^2\gamma^2}d\gamma\right)+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right)\left(d\beta-\frac{cc}{\gamma\gamma}d\gamma\right)=0.$$

II. Nunc autem ratio diversae refractionis est habenda; unde in superioribus additamentis invenimus esse

$$d\alpha=-\frac{\alpha\alpha dn}{n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right);\qquad d\beta=\frac{\beta\beta d\alpha}{bb}-\frac{\beta\beta dn'}{n'-1}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right);$$

$$d\gamma=\frac{\gamma\gamma d\beta}{cc}-\frac{\gamma\gamma dn''}{n''-1}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right).$$

1) Hoc supplementum attinet ad § 308—313. E. Ch.

Hincque ergo fiet

$$d\alpha - \frac{bbcc}{\beta^2\gamma^2}\,d\gamma = d\alpha - \frac{bb\,d\beta}{\beta^2} + \frac{bbcc\,dn''}{\beta^2(n''-1)}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$= \frac{bb\,dn'}{n'-1}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right) + \frac{bbcc\,dn''}{\beta^2(n''-1)}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right),$$

deinde

$$d\beta - \frac{cc}{\gamma\gamma}\,d\gamma = \frac{cc\,dn''}{n''-1}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right).$$

III. Ex his ergo nostra aequatio differentialis abibit in hanc formam:

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{bb\,dn'}{n'-1}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right) + \frac{bbc^2\,dn''}{\beta^2(n''-1)}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\right) + \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{cc\,dn''}{n''-1}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\right)$$

sive

$$\frac{dn'}{n'-1}bb\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{b}\right) + \frac{dn''}{n''-1}cc\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{bb}{\beta\beta}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right) = 0.$$

IV. Pro casu autem illo singulari, quo oculus lenti ultimae immediate debet applicari, ob $O=0$ habebitur simpliciter haec aequatio

$$d\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right) + d\beta\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right) = 0$$

sive substituto valore $d\beta$

$$d\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right) + \frac{\beta\beta\,d\alpha}{bb}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right) - \frac{\beta\beta\,dn'}{n'-1}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right) = 0,$$

$$d\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{\beta\beta}{bb}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right)\right) - \frac{\beta^2\,dn'}{n'-1}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right) = 0$$

seu tandem

$$+\frac{dn}{n-1}\alpha\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{\beta^2}{b^2}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right)\right) + \frac{dn'}{n'-1}\beta\beta\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right) = 0.$$

V. Hoc modo tantum margo coloratus tollitur; ut autem tota confusio tollatur, quod fit, si $d\gamma=0$, insuper satisfieri debet huic aequationi

$$0 = \frac{dn}{n-1}\,\frac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{bbcc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{dn'}{n'-1}\,\frac{\beta\beta\gamma\gamma}{cc}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right) + \frac{dn''}{n''-1}\gamma\gamma\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right).$$ [1]

1) Finis supplementi IV. E. Ch.

PROBLEMA 6

314. *Si instrumentum dioptricum tribus constet lentibus, quarum crassities evanescat, eam definire dispositionem, ut oculus in eo loco, quem campus postulat, constitutus obiectum sine margine colorato conspiciat.*

SOLUTIO

Posita ergo distantia obiecti ante lentem obiectivam $AE = a$ (Fig. 14) eiusque magnitudine $E\varepsilon = z$, vocentur distantiae imaginum a radiis mediae naturae formatarum ut hactenus

$$aF = \alpha, \quad BF = b, \quad bG = \beta, \quad CG = c \quad \text{et} \quad cH = \gamma,$$

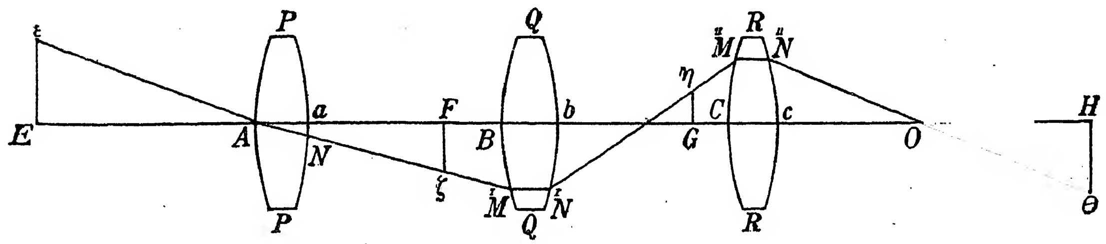

Fig. 14 (iterata).

eritque imago ultima $H\theta = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}z$, et posita oculi post lentem ultimam distantia $cO = O$ erit $OH = \gamma - O$ et anguli $HO\theta$ tangens $= \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\cdot\frac{z}{\gamma - O}$, quae debet esse invariabilis. Posito ergo eius differentiali logarithmico $= 0$ habebimus hanc aequationem:

$$\frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{db}{b} + \frac{d\beta}{\beta} - \frac{dc}{c} + \frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{d\gamma}{\gamma - O} = 0.$$

At ex formulis supra (§ 300) erutis habemus

$$d\alpha = -db = \frac{-dn}{n-1}\alpha\alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right), \quad d\beta = -dc = -\frac{\beta\beta dn}{n-1}\left(\frac{\alpha\alpha}{bb}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right),$$

$$d\gamma = -\frac{\gamma\gamma dn}{n-1}\left(\frac{\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{\beta\beta}{cc}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}\right),$$

unde nostra aequatio erit

$$d\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right) + d\beta\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{c}\right) - \frac{O\,d\gamma}{\gamma(\gamma - O)} = 0.$$

Sed ob campum apparentem supra (§ 256) invenimus:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{b} = b\left(1+\frac{\alpha}{b}\right)\frac{z}{a}; \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{c} = \frac{bc}{\beta}\left(1+\frac{\alpha}{b}\right)\frac{z}{a} + \frac{\alpha c}{b}\left(1+\frac{\beta}{c}\right)\frac{z}{a}$$

hincque

$$O = \frac{\gamma\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}+H\theta} \text{ et } \frac{O}{\gamma - O} = \frac{\mathfrak{c}}{H\theta}, \quad \text{unde fit ob} \quad H\theta = \frac{\alpha\beta\gamma}{bc}\cdot\frac{z}{a}$$

$$\frac{O}{\gamma - O} = \frac{bbcc}{\alpha\beta\beta\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{b}\right) + \frac{cc}{\beta\gamma}\left(1+\frac{\beta}{c}\right) \text{ seu } \frac{O}{\gamma(\gamma - O)} = \frac{bbcc}{\beta\beta\gamma\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right) + \frac{cc}{\gamma\gamma}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right).$$

Valoribus iam his substitutis habebimus:

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)\left(d\alpha - \frac{bbcc}{\beta\beta\gamma\gamma}d\gamma\right) + \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right)\left(d\beta - \frac{cc}{\gamma\gamma}d\gamma\right) = 0.$$

At est

$$d\alpha - \frac{bbcc}{\beta\beta\gamma\gamma}d\gamma = \frac{dn}{n-1}\left(bb\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right) + \frac{bbcc}{\beta\beta}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\right)$$

$$d\beta - \frac{cc}{\gamma\gamma}d\gamma = \frac{dn}{n-1}cc\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right).$$

Quare facta divisione per $\frac{dn}{n-1}$ nanciscemur hanc aequationem:

$$bb\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}+\frac{cc}{\beta\beta}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)\right) + cc\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right) = 0.$$

Quodsi vero oculus lenti postremae immediate applicetur seu sit $O = 0$, conditio praescripta hanc postulat aequationem:

$$\alpha\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right) + \beta\beta\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{\alpha\alpha}{bb}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right) = 0.$$

Confusio vero a diversa radiorum refrangibilitate oriunda perfecte tolletur, si praeterea fuerit $d\gamma = 0$ seu

$$\frac{\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{\beta\beta}{cc}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma} = 0.$$

COROLLARIUM 1

315. Si rationes aperturarum lentium in computum ducantur eaque pro lente secunda ponatur $=\pi$, pro tertia $=\pi'$, erit

$$bN' = \frac{\pi b\beta}{b+\beta} \text{ et } CM'' = cN'' = \frac{\pi' c\gamma}{c+\gamma}.$$

Tum vero posito $\frac{z}{a} = \Phi$ erit $G\eta = \frac{\alpha\beta}{ab} a\Phi$ et $H\theta = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} \cdot a\Phi$. Hinc fiet

$$\frac{O}{\gamma - O} = \frac{cN''}{H\theta} = \frac{\pi' abcc}{\alpha\beta(c+\gamma) a\Phi} \quad \text{et} \quad \frac{O}{\gamma(\gamma - O)} = \frac{\pi' abcc}{\alpha\beta\gamma(c+\gamma)} \cdot \frac{1}{a\Phi}.$$

COROLLARIUM 2

316. Quodsi porro ut supra ponatur $\alpha = Aa$, $\beta = Bb$, $\gamma = Cc$, erit

$$\frac{O}{\gamma(\gamma - O)} = \frac{\pi'}{ABC(C+1)a\Phi};$$

tum vero $bN' = \frac{\pi Bb}{B+1}$ et $CM'' = \frac{\pi' Cc}{C+1}$ ac $G\eta = ABa\Phi$; cum iam sit $bN' + G\eta : bG = CM'' - G\eta : CG$, erit $\frac{bN' + G\eta}{bG} = \frac{CM'' - G\eta}{CG}$ ideoque $\frac{1}{bG} + \frac{1}{CG} = \frac{CM''}{CG \cdot G\eta} - \frac{bN'}{bG \cdot G\eta}$, hoc est $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{c} = \frac{\pi' C}{AB(C+1)a\Phi} - \frac{\pi}{AB(B+1)a\Phi}$; simili vero modo est $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b} = \frac{\pi B}{A(B+1)a\Phi}$.

COROLLARIUM 3

317. Per easdem substitutiones fit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{A+1}{Aa}, \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} = \frac{B+1}{Bb}, \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} = \frac{C+1}{Cc} \text{ etc.}$$

hincque:

$$\alpha\alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right) = A(A+1)a$$

$$\beta\beta\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right) = B(B+1)b$$

$$\gamma\gamma\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}\right) = C(C+1)c$$

sicque porro.

COROLLARIUM 4

318. His ergo novis denominationibus introductis differentialia ex § 300 ita exprimentur

$$d\alpha = -db = -\frac{dn}{n-1} \cdot A(A+1)a$$

$$d\beta = -dc = -BBdb - \frac{dn}{n-1} \cdot B(B+1)b$$

$$d\gamma = -dd = -CCdc - \frac{dn}{n-1} \cdot C(C+1)c,$$

quae formulae commodius in calculum introducentur.

Quemadmodum hic novae formae adhibentur in sequentibus usurpandae, ita et pro casu diversae refractionis sequentibus formulis in posterum uti licebit:

$$\frac{O}{\gamma(\gamma - O)} = \frac{\pi'}{ABC(C+1)a\Phi}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b} = \frac{\pi B}{A(B+1)a\Phi}$$

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{c} = \frac{\pi' C}{AB(C+1)a\Phi} - \frac{\pi}{AB(B+1)a\Phi}$$

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{d} = \frac{\pi'' D}{ABC(D+1)a\Phi} - \frac{\pi'}{ABC(C+1)a\Phi}$$

etc.;

tum vero formulae differentiales erunt

$$d\alpha = -db = \frac{-dn}{n-1}\cdot A(A+1)a$$

$$d\beta = -dc = B^2\, d\alpha - \frac{dn'}{n'-1}\cdot B(B+1)b$$

$$d\gamma = -dd = C^2\, d\beta - \frac{dn''}{n''-1}\cdot C(C+1)c$$

$$d\delta = -de = D^2 d\gamma - \frac{dn'''}{n'''-1}\cdot D(D+1)d$$

etc.

Atque ex his formulis, ut margo coloratus evanescat, satisfieri debet huic aequationi

$$0 = \frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{\pi b}{Aa\Phi} + \frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{\pi' c}{ABa\Phi}.$$

Ut autem haec confusio penitus tollatur, fieri debet

$$d\gamma = -\frac{dn}{n-1}\cdot A(A+1)B^2C^2a - \frac{dn'}{n'-1}\cdot B(B+1)C^2b - \frac{dn''}{n''-1}\cdot C(C+1)c = 0$$

sive

$$\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{(A+1)a}{A} + \frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{(B+1)b}{AAB} + \frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{(C+1)c}{A^2B^2C} = 0.$$

PROBLEMA 7

319. *Si instrumentum dioptricum quatuor constet lentibus, quarum crassities negligi queat, eam definire dispositionem, ut oculus in eo loco, quem campus apparens postulat, constitutus obiectum sine confusione a diversa radiorum indole oriunda conspiciat.*

SOLUTIO

Posita distantia obiecti ante instrumentum $AE = a$ (Fig. 15) eiusque magnitudine $E\varepsilon = z$, vocentur distantiae imaginum a radiis mediae naturae forma-

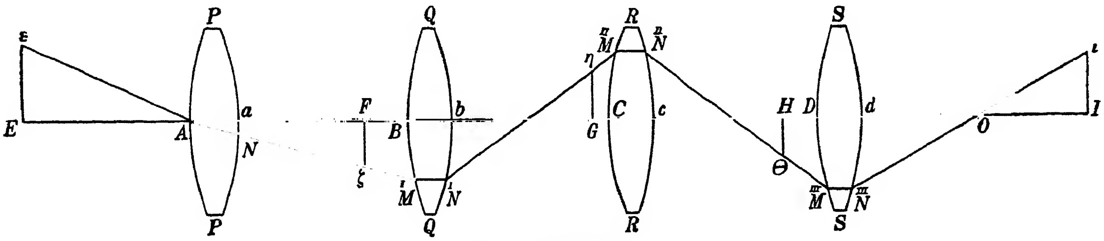

Fig. 15 (iterata).

tarum ut hactenus $aF = \alpha$, $BF = b$, $bG = \beta$, $CG = c$, $cH = \gamma$, $DH = d$, $dI = \delta$. Tum vero ponamus praeterea

$$\mathfrak{a} = Aa, \quad \mathfrak{b} = Bb, \quad \mathfrak{c} = Cc, \quad \mathfrak{d} = Dd,$$

atque introducantur rationes aperturarum pro singulis lentibus post primam, quae sint π pro secunda QQ, π' pro tertia RR et π'' pro quarta SS, sumto pro campo $\frac{z}{a} = \Phi$. His positis erunt imagines $F\zeta = \mathfrak{A}a\Phi$, $G\eta = \mathfrak{A}\mathfrak{B}a\Phi$, $H\theta = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}a\Phi$ et $I\iota = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}a\Phi = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd}z$. Iam posita oculi distantia post instrumentum $dO = O$, ut sit $OI = \delta - O$, erit anguli $IO\iota$ tangens $\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd} \cdot \frac{z}{\delta - O}$, quae, cum ob diversam radiorum refrangibilitatem immutata manere debeat, differentiata dabit hanc aequationem

$$\frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{db}{b} + \frac{d\beta}{\beta} - \frac{dc}{c} + \frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{dd}{d} - \frac{O\,d\delta}{\delta(\delta - O)} = 0,$$

quae ob $db = -d\alpha$, $dc = -d\beta$ et $dd = -d\gamma$ abit in hanc

$$d\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right) + d\beta\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{c}\right) + d\gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{d}\right) - \frac{O\,d\delta}{\delta(\delta - O)} = 0.$$

Verum modo ante notavimus fore (§ 318)

$$d\alpha = \frac{-dn}{n-1}\cdot A(A+1)a, \quad d\beta = BBd\alpha - \frac{dn}{n-1}\cdot B(B+1)b,$$

$$d\gamma = CCd\beta - \frac{dn}{n-1}\cdot C(C+1)c, \quad d\delta = DDd\gamma - \frac{dn}{n-1}\cdot D(D+1)d,$$

ubi pro b, c, d valores § 266 assignati substitui debent. Porro vero iam animadvertimus esse (§ 316)

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b} = \frac{1}{Aa\Phi}\cdot\frac{\pi B}{B+1},$$

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c} = \frac{1}{ABa\Phi}\left(\frac{\pi' C}{C+1}-\frac{\pi}{B+1}\right),$$

$$\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{d} = \frac{1}{ABCa\Phi}\left(\frac{\pi'' D}{D+1}-\frac{\pi'}{C+1}\right)$$

atque

$$\frac{O}{\delta(\delta-O)} = \frac{\pi''}{ABCD(D+1)a\Phi}.$$

Quodsi iam priores valores in posterioribus successive substituantur, habebimus

$$d\alpha = \frac{-dn}{n-1}\cdot A(A+1)a$$

$$d\beta = \frac{-dn}{n-1}\cdot B\big(AB(A+1)a+(B+1)b\big)$$

$$d\gamma = \frac{-dn}{n-1}\cdot C\big(AB^2C(A+1)a+BC(B+1)b+(C+1)c\big)$$

$$d\delta = \frac{-dn}{n-1}\cdot D\big(AB^2C^2D(A+1)a+BC^2D(B+1)b+CD(C+1)c+(D+1)d\big).$$

His igitur valoribus in aequatione differentiali substitutis et divisione per $\frac{dn}{(n-1)a\Phi}$ facta aequatio nostra secundum singula membra distributa erit

$$-\frac{\pi B}{(B+1)}\cdot(A+1)a$$

$$-\frac{1}{A}\left(\frac{\pi' C}{C+1}-\frac{\pi}{B+1}\right)\big(AB(A+1)a+(B+1)b\big)$$

$$-\frac{1}{AB}\left(\frac{\pi'' D}{D+1}-\frac{\pi'}{C+1}\right)\big(AB^2C(A+1)a+BC(B+1)b+(C+1)c\big)$$

$$+\frac{1}{ABC}\cdot\frac{\pi''}{D+1}\big(AB^2C^2D(A+1)a+BC^2D(B+1)b+CD(C+1)c+(D+1)d\big)=0.$$

Terna autem priora membra negativa sola collecta praebent

$$-\frac{BCD(A+1)\pi''}{D+1}a-\frac{CD(B+1)\pi''}{A(D+1)}b-\frac{D(C+1)\pi''}{AB(D+1)}c+\frac{\pi}{A}b+\frac{\pi'}{AB}c,$$

quibus si quartum addatur, prodit

$$\frac{\pi}{A}b+\frac{\pi'}{AB}c+\frac{\pi''}{ABC}d=0.$$

Iam duo hic casus considerari oportet, alterum, quo punctum O post lentem ultimam cadit, alterum vero, quo ob distantiam O negativam oculus lenti ultimae immediate applicatur. Pro priori casu, quo distantia $dO=O$ prodit positiva, habetur ista aequatio, si quidem in aequatione modo inventa pro b, c, d valores § 266 inventi substituantur:

$$\frac{(B+1)\pi}{B\pi-(B+1)\Phi}+\frac{(C+1)\pi'}{C\pi'-(C+1)(\pi-\Phi)}+\frac{(D+1)\pi''}{D\pi''-(D+1)(\pi'-\pi+\Phi)}=0.$$

Pro casu posteriori, quo distantia O evanescens assumitur, facta multiplicatione per $\frac{D+1}{a\Phi}$:

$$\frac{BCD(A+1)\pi''}{\Phi}+\frac{CD(B+1)^2\pi''}{B\pi-(B+1)\Phi}+\frac{D(C+1)^2\pi''}{C\pi'-(C+1)(\pi-\Phi)}$$
$$=\frac{(B+1)(D+1)\pi}{B\pi-(B+1)\Phi}+\frac{(C+1)(D+1)\pi'}{C\pi'-(C+1)(\pi-\Phi)}.$$

Hoc modo efficitur, ut obiectum sine margine colorato appareat; at omnis confusio tolletur, si praeterea fuerit

$$AB^2C^2D(A+1)+\frac{ABC^2D(B+1)^2\Phi}{B\pi-(B+1)\Phi}+\frac{ABCD(C+1)^2\Phi}{C\pi'-(C+1)(\pi-\Phi)}$$
$$+\frac{ABC(D+1)^2\Phi}{D\pi''-(D+1)(\pi'-\pi+\Phi)}=0$$

seu per ABC dividendo:

$$BCD(A+1)+\frac{CD(B+1)^2\Phi}{B\pi-(B+1)\Phi}+\frac{D(C+1)^2\Phi}{C\pi'-(C+1)(\pi-\Phi)}+\frac{(D+1)^2\Phi}{D\pi''-(D+1)(\pi'-\pi+\Phi)}=0$$

seu

$$BCD(A+1)+\frac{CD(B+1)b}{Aa}+\frac{D(C+1)c}{ABa}+\frac{(D+1)d}{ABCa}=0.$$

COROLLARIUM 1

320. Si utrique conditioni satisfieri potest, ut nec locus nec magnitudo imaginis ullam mutationem patiatur, locus oculi non amplius in computum ingreditur, sed imago, undecunque cernatur, ab omni confusione prorsus libera erit.

COROLLARIUM 2

321. Ut ergo hunc summum perfectionis gradum consequamur, binis his aequationibus satisfieri oportet:

$$\frac{(B+1)\pi}{B\pi-(B+1)\Phi}+\frac{(C+1)\pi'}{C\pi'-(C+1)(\pi-\Phi)}+\frac{(D+1)\pi''}{D\pi''-(D+1)(\pi'-\pi+\Phi)}=0$$

et

$$A+1+\frac{(B+1)^2\Phi}{B(B\pi-(B+1)\Phi)}+\frac{(C+1)^2\Phi}{BC(C\pi'-(C+1)(\pi-\Phi))}+\frac{(D+1)^2\Phi}{BCD(D\pi''-(D+1)(\pi'-\pi+\Phi))}=0.$$

COROLLARIUM 3

322. Si porro, ut supra fecimus, ponamus

$$\frac{A}{A+1}=\mathfrak{A},\quad \frac{B}{B+1}=\mathfrak{B},\quad \frac{C}{C+1}=\mathfrak{C}\quad \text{et}\quad \frac{D}{D+1}=\mathfrak{D},$$

istae aequationes sequenti modo simplicius exprimentur:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}=0$$

et

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\Phi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}+\frac{\Phi}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}=0;$$

hic [si diversae refractionis ratio habeatur] prima membra multiplicari debent per $\frac{dn}{n-1}$, secunda per $\frac{dn'}{n'-1}$, tertia per $\frac{dn''}{n''-1}$ etc.

COROLLARIUM 4

323. Sin autem non liceat has ambas aequationes adimplere, curandum est, ut saltem priori, qua magnitudo apparens a confusione liberatur, satisfiat; hoc enim modo obiectum sine margine colorato apparebit, ubi quidem ad duos casus respici convenit, prout distantia oculi dO prodierit positiva vel negativa.

SCHOLION

324. Introducendis ergo rationibus aperturarum, quibus supra iam commode sumus usi ad campum apparentem definiendum, aequationes etiam istae confusionem a diversa radiorum refrangibilitate oriundam tollentes satis fiunt simplices, ut sine molestia tractari queant, si quidem crassities lentium negligatur. Hoc ergo modo problema generale, quicunque fuerit lentium numerus, expediri conveniet.

SUPPLEMENTUM V[1])

Si ratio refractionis in singulis lentibus discrepet, prodit primo quidem eadem aequatio differentialis

$$d\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)+d\beta\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right)+d\gamma\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{d}\right)-\frac{O\,d\delta}{\delta(\delta-O)}=0,$$

in qua ergo casu $O=0$ ultimum membrum abiici debet.

I. Sin autem O habeat valorem positivum, erit ut ante

$$\frac{O}{\delta(\delta-O)}=\frac{\pi''}{ABCD(D+1)a\Phi}$$

atque etiam valores $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}$, $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}$, $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{d}$ manent iidem ut ante.

At vero ob diversitatem refractionis habebimus

$$d\alpha=\frac{-dn}{n-1}\cdot A(A+1)a$$

$$d\beta=BBd\alpha-\frac{dn'}{n'-1}\cdot B(B+1)b$$

$$d\gamma=CCd\beta-\frac{dn''}{n''-1}\cdot C(C+1)c$$

$$d\delta=DDd\gamma-\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot D(D+1)d.$$

Hinc ergo aequatio nostra successive ita formetur:

$$\frac{-O\,d\delta}{\delta(\delta-O)}=\frac{-\pi''\,d\delta}{ABCD(D+1)a\Phi}=\frac{-\pi''D\,d\gamma}{ABC(D+1)a\Phi}+\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{\pi''\cdot d}{ABC\,a\Phi}.$$

1) Hoc supplementum attinet ad § 319—324. E. Ch.

Addatur

$$d\gamma\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{d}\right)=\frac{\pi'' D\,d\gamma}{ABC(D+1)a\Phi}-\frac{\pi' d\gamma}{ABC(C+1)a\Phi},$$

et prodibit

$$\frac{-\pi' d\gamma}{ABC(C+1)a\Phi}+\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{\pi''\cdot d}{ABCa\Phi}$$

et pro $d\gamma$ substituto valore

$$\frac{-\pi' C d\beta}{AB(C+1)a\Phi}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{\pi' c}{ABa\Phi}+\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{\pi''\cdot d}{ABCa\Phi}.$$

Iam addatur

$$d\beta\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right)=\frac{\pi' C d\beta}{AB(C+1)a\Phi}-\frac{\pi d\beta}{AB(B+1)a\Phi},$$

proditque

$$\frac{-\pi d\beta}{AB(B+1)a\Phi}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{\pi' c}{AB\cdot a\Phi}+\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{\pi'' d}{ABCa\Phi}$$

et substituto valore ipsius $d\beta$

$$\frac{-\pi B d\alpha}{A(B+1)a\Phi}+\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{\pi b}{Aa\Phi}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{\pi' c}{ABa\Phi}+\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{\pi'' d}{ABCa\Phi}.$$

Denique addatur

$$d\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)=\frac{\pi B d\alpha}{A(B+1)a\Phi},$$

ac aequatio quaesita, qua margo coloratus evanescit, erit:

$$\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{\pi b}{Aa\Phi}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{\pi' c}{ABa\Phi}+\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{\pi'' d}{ABCa\Phi}=0.$$

II. Sin autem O habeat valorem negativum, tunc sumi debet $O=0$, et pro eodem scopo aequatio ita formabitur:

Cum sit

$$d\gamma\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{d}\right)=\frac{\pi'' D\,d\gamma}{ABC(D+1)a\Phi}-\frac{\pi' d\gamma}{ABC(C+1)a\Phi},$$

substituto valore $d\gamma$ fiet

$$CCd\beta\left(\frac{\pi'' D}{ABC(D+1)a\Phi}-\frac{\pi'}{ABC(C+1)a\Phi}\right)$$

$$-\frac{dn''}{n''-1}\cdot C(C+1)c\left(\frac{\pi'' D}{ABC(D+1)a\Phi}-\frac{\pi'}{ABC(C+1)a\Phi}\right).$$

Addatur

$$d\beta\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}\right)=\frac{\pi' C d\beta}{AB(C+1)a\Phi}-\frac{\pi d\beta}{AB(B+1)a\Phi},$$

eritque

$$d\beta\left(\frac{CD\pi''}{AB(D+1)a\Phi}-\frac{\pi}{AB(B+1)a\Phi}\right)-\frac{dn''}{n''-1}(C+1)c\left(\frac{\pi'' D}{AB(D+1)a\Phi}-\frac{\pi'}{AB(C+1)a\Phi}\right)$$

et substituto valore ipsius $d\beta$

$$d\alpha\left(\frac{BCD\pi''}{A(D+1)a\Phi}-\frac{B\pi}{A(B+1)a\Phi}\right)-\frac{dn'}{n'-1}\left(\frac{(B+1)CDb\pi''}{A(D+1)a\Phi}-\frac{\pi b}{Aa\Phi}\right)$$
$$-\frac{dn''}{n''-1}(C+1)c\left(\frac{\pi'' D}{AB(D+1)a\Phi}-\frac{\pi'}{AB(C+1)a\Phi}\right).$$

Addatur

$$d\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}\right)=\frac{\pi B d\alpha}{A(B+1)a\Phi},$$

eritque

$$-\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{(A+1)BCDa\cdot\pi''}{(D+1)a\Phi}-\frac{dn'}{n'-1}\left(\frac{(B+1)CDb\pi''-(D+1)b\pi}{A(D+1)a\Phi}\right)$$
$$-\frac{dn''}{n''-1}\left(\frac{(C+1)Dc\pi''-(D+1)c\pi'}{AB(D+1)a\Phi}\right).$$

Unde pro casu $O=0$ aequatio, qua margo coloratus destruitur, erit

$$0=\frac{adn}{n-1}\cdot(A+1)BCD\pi''+\frac{bdn'}{n'-1}\cdot\left(\frac{(B+1)CD\pi''-(D+1)\pi}{A}\right)$$
$$+\frac{cdn''}{n''-1}\cdot\left(\frac{(C+1)D\pi''-(D+1)\pi'}{AB}\right).$$

III. Ut autem praeterea omnis confusio tollatur, insuper reddi oportet $d\delta=0$; unde haec aequatio nascitur

$$0=\begin{cases}\dfrac{adn}{n-1}\cdot A(A+1)B^2C^2D^2+\dfrac{bdn'}{n'-1}\cdot B(B+1)C^2D^2\\[2mm] +\dfrac{cdn''}{n''-1}\cdot C(C+1)D^2+\dfrac{ddn'''}{n'''-1}\,D(D+1),\end{cases}$$

quae per $A^2B^2C^2D^2$ divisa dat

$$0=\frac{adn}{n-1}\cdot\frac{A+1}{A}+\frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{B+1}{A^2B}+\frac{cdn''}{n''-1}\cdot\frac{C+1}{A^2B^2C}+\frac{ddn'''}{n'''-1}\cdot\frac{D+1}{A^2B^2C^2D}.$$

Circa hanc autem aequationem inprimis notandum est, si omnes lentes pari facultate refringente sint praeditae, ei satisfieri haud posse; ex quo haec aequatio proprie pertinet ad casum, quo diversae refractiones locum habent.[1])

PROBLEMA 8

325. *Si instrumentum dioptricum ex quotcunque lentibus sit compositum, quarum crassitiem negligere liceat, eam determinare dispositionem, ut oculus in eo loco, quem campus apparens postulat, positus nullam confusionem sentiat.*

SOLUTIO

Sit obiecti ante lentem primam distantia $AE = a$ eiusque magnitudo $E\varepsilon = z$, quae quidem conspici queat, et statuatur $\frac{z}{a} = \Phi$. Deinde sint distantiae imaginum a radiis mediae naturae formatarum ut supra:

$$AE = a, \quad BF = b, \quad CG = c, \quad DH = d, \quad EI = e$$
$$aF = \alpha, \quad bG = \beta, \quad cH = \gamma, \quad dI = \delta, \quad eK = \varepsilon$$
$$\text{etc.,}$$

ac vocemus brevitatis gratia

$$\alpha = Aa, \quad \beta = Bb, \quad \gamma = Cc, \quad \delta = Dd, \quad \varepsilon = Ee \quad \text{etc.,}$$

tum vero etiam

$$\frac{A}{A+1} = \mathfrak{A}, \quad \frac{B}{B+1} = \mathfrak{B}, \quad \frac{C}{C+1} = \mathfrak{C}, \quad \frac{D}{D+1} = \mathfrak{D}, \quad \frac{E}{E+1} = \mathfrak{E} \quad \text{etc.}$$

Iam apertura primae lentis PP ut evanescente considerata sit ratio aperturae pro reliquis lentibus

$$QQ = \pi, \quad RR = \pi', \quad SS = \pi'', \quad TT = \pi''' \quad \text{etc.}$$

His positis supra vidimus (§ 270) fore praeter $\alpha = Aa$

$$b = \frac{Aa\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} \qquad \beta = \frac{ABa\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$$

$$c = \frac{ABa\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} \qquad \gamma = \frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}$$

$$d = \frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} \qquad \delta = \frac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$$

$$e = \frac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} \qquad \varepsilon = \frac{ABCDEa\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$$

$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

1) Finis supplementi V. E. Ch.

Deinde singularum imaginum magnitudo ita se habebit:

$$F\zeta = Aa\Phi, \quad G\eta = ABa\Phi, \quad H\theta = ABCa\Phi, \quad I\iota = ABCDa\Phi \quad \text{etc.}$$

et ipsi aperturarum semidiametri:

$$\text{Lentis secundae } QQ = \frac{A\mathfrak{B}a\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}\pi$$

$$\text{lentis tertiae } RR = \frac{AB\mathfrak{C}a\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}\pi'$$

$$\text{lentis quartae } SS = \frac{ABC\mathfrak{D}a\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}\pi''$$

$$\text{lentis quintae } TT = \frac{ABCD\mathfrak{E}a\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}\pi'''.$$

etc.

Mutata iam refractionis lege $n:1$ infinite parum distantiae α, b, β, c, γ, d, δ etc. tales mutationes recipiunt:

$$d\alpha = \frac{-dn}{n-1}\cdot Aa(A+1)$$

$$d\beta = \frac{-dn}{n-1}\cdot ABa\left((A+1)B + \frac{(B+1)\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}\right)$$

$$d\gamma = \frac{-dn}{n-1}\cdot ABCa\left((A+1)BC + \frac{(B+1)C\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{(C+1)\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}\right)$$

$$d\delta = \frac{-dn}{n-1}\cdot ABCDa\left((A+1)BCD + \frac{(B+1)CD\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{(C+1)D\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{(D+1)\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}\right)$$

etc.

Porro vero habetur:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b} = \frac{1}{Aa\Phi}\mathfrak{B}\pi,$$

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{c} = \frac{1}{ABa\Phi}\left(\mathfrak{C}\pi' - \frac{\mathfrak{B}\pi}{B}\right),$$

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{d} = \frac{1}{ABCa\Phi}\left(\mathfrak{D}\pi'' - \frac{\mathfrak{C}\pi'}{C}\right),$$

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{e} = \frac{1}{ABCDa\Phi}\left(\mathfrak{E}\pi''' - \frac{\mathfrak{D}\pi''}{D}\right)$$

etc.

His positis pro quolibet lentium numero seorsim formulas quaesito satisfacientes expediamus posita distantia oculi post lentem ultimam $= O$:

I. Pro unica lente

Habetur haec aequatio differentialis $\frac{-O\,d\alpha}{\alpha(\alpha-O)}=0$, pro quo casu tam magnitudo imaginis quam eius locus manebit invariatus, si fuerit $d\alpha=0$, hoc est $A(A+1)=0$, unde deberet esse vel $A=0$ vel $A=-1$, quorum prius visio non admittit, posterius autem lentem tollit. Tum vero ob campum esse debet $O=0$.

II. Pro duabus lentibus

Habetur haec aequatio differentialis, qua margo coloratus tollitur:

$$d\alpha\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{O\,d\beta}{\beta(\beta-O)}=0;$$

at ob campum apparentem est $\frac{O}{\beta(\beta-O)}=\frac{1}{BB}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, ita ut habeamus:

$$d\alpha\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{d\beta}{BB}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0.$$

Verum est

$$d\beta=BB\,d\alpha-\frac{dn}{n-1}\cdot AB\,a\cdot\frac{(B+1)\,\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}.$$

Quare si O habeat valorem positivum, erit ob $\mathfrak{B}(B+1)=B$

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}=0.$$

Sin autem valor O prodeat negativus, quo casu capitur $O=0$, erit

$$\frac{(A+1)\mathfrak{B}\pi}{\Phi}=0.$$

Omnis autem confusio penitus tolletur, si insuper fuerit

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}=0.$$

III. Pro tribus lentibus

Si calculum eodem modo prosequamur, obiectum sine margine colorato conspicietur:

1. Si ex campo apparente distantia O prodeat positiva, hanc aequationem adimplendo:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}=0.$$

2. Si ob distantiam O prodeuntem negativam capiatur $O=0$, huic aequationi erit satisfaciendum:

$$\frac{\pi'}{\mathfrak{A}\Phi}+\frac{\pi'}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}=\frac{\pi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}.$$

Omnis autem confusio penitus tolletur, si fuerit insuper

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\Phi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}=0.$$

IV. Pro quatuor lentibus

Ut obiectum sine margine colorato spectetur:

1. Si ex campo apparente distantia O prodeat positiva, huic aequationi erit satisfaciendum:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}=0.$$

2. Sin autem capiatur $O=0$, huic:

$$\frac{\pi''}{\mathfrak{A}\Phi}+\frac{\pi''}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\pi''}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}=\frac{\pi}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\pi'}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}.$$

Omnis vero confusio penitus tolletur, si fuerit praeterea

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\Phi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}+\frac{\Phi}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}=0.$$

V. Pro quinque lentibus

Ut obiectum tantum sine margine colorato conspiciatur:

1. Si ex campo apparente distantia O prodeat positiva, huic aequationi erit satisfaciendum:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}+\frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}=0.$$

2. Sin autem capiatur $O=0$, huic:

$$\frac{\pi'''}{\mathfrak{A}\Phi}+\frac{\pi'''}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\pi'''}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}+\frac{\pi'''}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}$$
$$=\frac{1}{ABCD\mathfrak{E}}\left(\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}\right).$$

Omnis autem confusio penitus tolletur, si praeterea satisfiat huic aequationi:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\Phi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}+\frac{\Phi}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}$$

$$+\frac{\Phi}{ABCD\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}=0.$$

Atque hinc manifesta est progressio ad maiorem lentium numerum.

COROLLARIUM 1

326. In casu ergo unicae lentis licet quidem obiectum a margine colorato liberare neque vero confusionem penitus tollere. Casu autem duarum lentium ne margo quidem coloratus tolli potest, siquidem oculus in eo loco, quem campi apparentis conditio postulat, teneatur.

COROLLARIUM 2

327. Quodsi vero plures duabus habeantur lentes, sufficiens quantitatum numerus adest, quarum determinatione non solum margo coloratus deleri, sed etiam forte omnis confusio penitus auferri posse videtur, praecipue si lentium numerus ternarium superet.

SCHOLION

328. Quod ergo incommodum a diversa radiorum natura oriundum adeo grave vel summo NEUTONO est visum, ut instrumenta dioptrica nullo modo ab eo liberari posse sit arbitratus; id quidem saltem, quod ad marginem coloratum attinet, ad quem NEUTONUS inprimis spectabat, iam satis feliciter tolli posse certum est, ita ut saltem ob hanc causam non opus sit ad Telescopia catoptrica confugere. Hoc autem vitio sublato si praeterea alterum confusionis fontem obstruamus, lentes scilicet nullam confusionem parientes adhibendo, nullum est dubium, quin instrumenta dioptrica ad summum perfectionis gradum evehi queant. Quae igitur hactenus particulatim circa singulas horum instrumentorum affectiones proposuimus, ea colligi conveniet, unde in capite sequente praecepta generalia pro omnium instrumentorum dioptricorum constructione tradere est visum.

SUPPLEMENTUM VI[1])

Ex iis, quae ante sunt adiecta, poterimus etiam problematis solutionem pro casu exhibere, quo singulae lentes peculiari refractione sunt praeditae, ubi quidem tantum postremae aequationes pro confusione vitanda mutationem quandam postulant; interim tamen etiam priores formulas, quibus locus oculi, quem campus apparens requirit, determinatur, distinctius repraesentemus.

I. *Distantia oculi post ultimam lentem* pro quovis lentium numero se habebit, ut sequitur:

Numerus lentium	O id est distantia oculi post lentem ultimam
I	0
II	$\dfrac{A\mathfrak{B}a\pi\Phi}{(\pi-\Phi)(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}$ seu $\dfrac{\mathfrak{B}b\pi}{\pi-\Phi}$
III	$\dfrac{AB\mathfrak{C}a\pi'\Phi}{(\pi'-\pi+\Phi)(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}$ seu $\dfrac{\mathfrak{C}c\pi'}{\pi'-\pi+\Phi}$
IV	$\dfrac{ABC\mathfrak{D}a\pi''\Phi}{(\pi''-\pi'+\pi-\Phi)(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}$ seu $\dfrac{\mathfrak{D}d\pi''}{\pi''-\pi'+\pi-\Phi}$
V	$\dfrac{ABCD\mathfrak{E}a\pi'''\Phi}{(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}$ seu $\dfrac{\mathfrak{E}e\pi'''}{\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}$

etc.

II. Si valor ipsius O sit positivus, ad marginem coloratum tollendum sequentes aequationes sunt adimplendae:

Numerus lentium	
I	$0=0$
II	$0=\dfrac{bdn'}{n'-1}\cdot\dfrac{\pi}{Aa\Phi}$
III	$0=\dfrac{bdn'}{n'-1}\cdot\dfrac{\pi}{Aa\Phi}+\dfrac{cdn''}{n''-1}\cdot\dfrac{\pi'}{ABa\Phi}$
IV	$0=\dfrac{bdn'}{n'-1}\cdot\dfrac{\pi}{Aa\Phi}+\dfrac{cdn''}{n''-1}\cdot\dfrac{\pi'}{ABa\Phi}+\dfrac{ddn'''}{n'''-1}\cdot\dfrac{\pi''}{ABCa\Phi}$

etc.

1) Hoc supplementum attinet ad § 325—328. E. Ch.

III. Si valor ipsius O prodeat negativus, quo casu capi debet $O=0$, ad marginem coloratum tollendum sequentes aequationes sunt adimplendae:

Numerus lentium	
I	$0=0$
II	$0=\frac{adn}{n-1}(A+1)B\pi$
III	$0=\frac{adn}{n-1}(A+1)BC\pi'+\frac{bdn'}{n'-1}\,\frac{(B+1)C\pi'-(C+1)\pi}{A}$
IV	$0=\frac{adn}{n-1}(A+1)\,BCD\pi''+\frac{bdn'}{n'-1}\,\frac{(B+1)CD\pi''-(D+1)\pi}{A}+\frac{cdn''}{n''-1}\,\frac{(C+1)D\pi''-(D+1)\pi'}{AB}$

etc.

IV. Ut autem insuper omnis confusio huius generis tollatur, sequentes aequationes sunt adimplendae:

Numerus lentium	
I	$0=\frac{adn}{n-1}\cdot\frac{A+1}{A}$
II	$0=\frac{adn}{n-1}\cdot\frac{A+1}{A}+\frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{B+1}{A^2B}$
III	$0=\frac{adn}{n-1}\cdot\frac{A+1}{A}+\frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{B+1}{A^2B}+\frac{cdn''}{n''-1}\cdot\frac{C+1}{A^2B^2C}$
IV	$0=\frac{adn}{n-1}\cdot\frac{A+1}{A}+\frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{B+1}{A^2B}+\frac{cdn''}{n''-1}\cdot\frac{C+1}{A^2B^2C}+\frac{ddn'''}{n'''-1}\cdot\frac{D+1}{A^2B^2C^2D}$

etc.

Quarum formularum ordo hinc distinctius perspicitur quam in problemate.[1])

1) Finis supplementi VI. E. Ch.

CAPUT VII

DE CONSTRUCTIONE INSTRUMENTORUM DIOPTRICORUM IN GENERE

PROBLEMA 1

329. *Si instrumentum dioptricum unica constet lente crassitiei cuiuscunque PP, definire omnia momenta ad visionem pertinentia.*

SOLUTIO

Quod primo ad ipsius lentis structuram attinet, ponatur obiecti $E\varepsilon$ (Fig. 12) ante eam distantia $AE = a$ imaginisque $F\zeta$ post eam proiectae $aF = \alpha$;

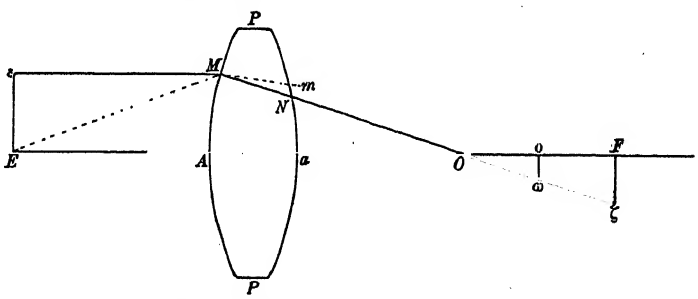

Fig. 12 (iterata).

tum vero lentis crassities $Aa = v$ et quantitas arbitraria $= k$, unde capiatur $\frac{k-v}{k+v} = i$. Hinc facies lentis ita erunt formatae, ut sit existente $n = \frac{31}{20}$ (conf. § 68):

$$\text{radius faciei anterioris} = \frac{(n-1)a(k+v)}{k+v+2na}$$

$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{(n-1)\alpha(k-v)}{k-v-2n\alpha}.$$

Ponatur porro semidiameter obiecti conspicui $E\varepsilon = z$ et semidiameter aperturae in facie anteriori $AM = x$, in facie autem posteriori semidiameter aperturae non sit minor quam ix. Denique oculi post lentem distantia vocetur $aO = O$, cuius distantia iusta sit $= l$. His positis sequentia momenta perpendi oportet:

1. Debet esse $O = \alpha + l$, ut distantia imaginis visae naturae oculi conveniat.

2. Consideranda venit multiplicatio, quae ex ratione definitur, quam diameter obiecti visus tenet ad eiusdem diametrum visum, si nudo oculo in distantia data $= h$ spectaretur. Quodsi ergo hic exponens multiplicationis ponatur $= m$, erit

$$m = \frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha h}{al} \text{ pro situ inverso.}$$

3. Gradus claritatis determinatur semidiametro coni luminosi, qui a quovis obiecti puncto in oculum immittitur; qui si ponatur $= y$, erit

$$y = il \cdot \frac{x}{\alpha} = \frac{hx}{m a}.$$

4. Confusio inquinans visionem mensuratur semidiametro apparente circuli, qui nudo oculo aeque magnus cernitur ac singula obiecti puncta per lentem spectata. Hanc mensuram vocavi (§ 194) semidiametrum confusionis; ad quem definiendum si ponatur

$$P = \frac{n}{2(n-1)^2}\left(\left(\frac{n}{a} + \frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{1}{ia} + \frac{2}{k-v}\right)^2 + \left(\frac{n}{\alpha} - \frac{2}{k-v}\right)\left(\frac{i}{\alpha} - \frac{2}{k+v}\right)^2\right),$$

erit semidiameter confusionis $= \frac{1}{4} i \cdot \frac{\alpha}{l} x^3 P = \frac{1}{4} i^2 \cdot \frac{m\alpha}{h} x^3 P.$

5. Ut oculus maximum campum apparentem percipiat, debet esse

$$O = \frac{-i\alpha v}{n\alpha - iv}.$$

6. Quae distantia si fuerit positiva, semidiameter campi seu obiecti conspicui $E\varepsilon = z$ ita pendet ab apertura faciei posterioris, ut posito huius semidiametro $= \mathfrak{a}$ sit $z = \frac{n\alpha}{v}\mathfrak{a}$.

7. Sin autem distantia illa pro O assignata prodierit negativa, oculum lenti immediate applicari conveniet, ut sit $O = 0$; tum vero pro $\mathfrak{a}$ posito semidiametro pupillae ω erit pro campo apparente $z = \frac{n\alpha}{v}\omega$.

8. Ut obiectum sine margine colorato appareat, existente distantia O ante inventa positiva, debet esse $i = \frac{\alpha}{\alpha + v}$ seu $k = 2\alpha + v$.

9. Sin autem ob illam distantiam negativam prodeuntem capiatur $O = 0$, ut margo coloratus evitetur, oportet esse $\frac{v}{a} + 1 - i = 0$, unde fit $k = -2a - v$.

10. Omnis denique confusio a diversa radiorum refrangibilitate oriunda prorsus tolletur, si insuper fieri posset $(\alpha + v)(a + \alpha + v) = 0$.

COROLLARIUM 1

330. Si exponens multiplicationis m cum gradu claritatis y proponatur, erit $my = \frac{hx}{a}$, quae proprietas ad lentium numerum quantumvis magnum patet. Cum ergo $\frac{h}{a}$ sit quantitas data, erit x ut my; tum vero y ut $\frac{x}{m}$ ac m ut $\frac{x}{y}$.

COROLLARIUM 2

331. Tam maior ergo multiplicatio quam maior claritatis gradus postulat maiorem aperturam. Verum aucto x confusio augetur in ratione triplicata, siquidem quantitas P maneat eadem; quare si x ex confusione etiamnum tolerabili determinetur, simul quantitas my determinatur.

COROLLARIUM 3

332. Ut igitur tam multiplicationem m quam claritatem y salva confusione maxime augere liceat, quantitatem arbitrariam k ita definiri conveniet, ut litterae P minimus valor concilietur.

Cum autem posuerimus $\frac{k - v}{k + v} = i$, valor ipsius P fiet minimus huic aequationi satisfaciendo:

$$2i^4\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{v}\right)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{v}\right)^2 - \frac{2ni^3}{\alpha v}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{v}\right) - \frac{i^3}{v}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{v}\right)^2$$

$$+ \frac{2ni}{av}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{v}\right) + \frac{i}{v}\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{v}\right)^2 - 2\left(\frac{n}{a} + \frac{1}{v}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{v}\right)^2 = 0,$$

uti § 45 invenimus.

COROLLARIUM 4

333. Si loco i valor substituatur suus $\frac{k-v}{k+v}$, aequatio transibit in hanc formam:

$$+\frac{2n}{a^3}(k+v)^4+\frac{(2n+1)}{a\alpha v}(k+v)^3(k+3v)+\frac{4(n+2)}{av}(k+v)^3$$
$$-\frac{2n}{\alpha^3}(k-v)^4-\frac{(2n+1)}{\alpha\alpha v}(k-v)^3(k-3v)+\frac{4(n+2)}{\alpha v}(k-v)^3+32k=0,$$

quae per v multiplicata etiam ad casum accommodari potest, quo est $v=0$: tum autem reperitur

$$k=\frac{4(n+2)a\alpha}{(2n+1)(a-\alpha)}$$

et

$$P=\frac{n}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left((4n-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{4(n-1)^2}{a\alpha}\right).$$

SCHOLION

334. Hic non generatim omnem visionem, quae fit per unicam lentem, considero, sed tantum eam, qua maximus campus apparens conspicitur; quamobrem locum oculi ita definivi, ut ipsi maximus campus adferatur. Sin autem minore campo velimus esse contenti, oculus quoque alibi post lentem constitutus obiecta distincte cernere poterit, quemadmodum per lentes satis amplas, quae tabularum vitrearum nomine sunt notae, fieri solet. Hunc autem casum, quoniam per se facile expeditur atque in instrumentis dioptricis magnitudo campi potissimum spectatur, hic non attingo.

PROBLEMA 2

335. *Si instrumentum dioptricum duabus constet lentibus cuiuscunque crassitiei, definire omnia momenta ad visionem pertinentia.*

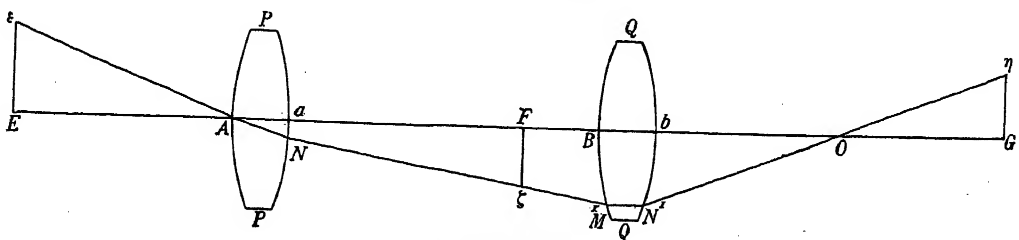

Fig. 13 (iterata).

SOLUTIO

Obiecto constituto in $E\varepsilon$ (Fig. 13) eius imagines proiiciantur per istas lentes in $F\zeta$ et $G\eta$, ac ponantur quantitates utramque lentem determinantes

$$AE = a,\ aF = \alpha,\ \text{crassities } Aa = v \text{ et distantia arbitraria } = k,$$
$$BF = b,\ bG = \beta,\ \text{crassities } Bb = v' \text{ et distantia arbitraria } = k',$$

ponaturque brevitatis gratia $\frac{k-v}{k+v} = i$ et $\frac{k'-v'}{k'+v'} = i'$. Hinc, existente $n = \frac{31}{20}$, constructio utriusque lentis ita se habebit:

Radius faciei	anterioris	posterioris
pro lente PP	$\dfrac{(n-1)a(k+v)}{k+v+2na}$	$\dfrac{(n-1)\alpha(k-v)}{k-v-2n\alpha}$
pro lente QQ	$\dfrac{(n-1)b(k'+v')}{k'+v'+2nb}$	$\dfrac{(n-1)\beta(k'-v')}{k'-v'-2n\beta}$.

Sit porro semidiameter aperturae lentis primae PP in facie anteriori $= x$, in facie autem posteriori maior sit quam ix. Tum vero lentis secundae QQ semidiameter aperturae in facie anteriori maior esse debet quam $i\cdot\frac{bx}{\alpha}$, in posteriori vero maior quam $ii'\cdot\frac{bx}{\alpha}$. Deinde sit semidiameter obiecti conspicui $E\varepsilon = z$, distantia oculi $bO = O$ eiusque distantia iusta $= l$. His positis ad sequentia momenta erit attendendum:

1. Ut oculus imaginem $G\eta$ in distantia iusta conspiciat, oportet esse $O = \beta + l$.

2. Posita distantia $= h$, ad quam multiplicatio referatur, sit exponens multiplicationis $= m$, ac supra invenimus esse oportere $m = \frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta h}{abl}$ pro situ erecto.

3. Denotante y gradum claritatis fiet

$$y = ii'l\cdot\frac{bx}{\alpha\beta} \quad \text{ideoque } my = \frac{hx}{a}.$$

4. Pro confusione posito brevitatis ergo

$$P = \frac{n}{2(n-1)^2}\left(\left(\frac{n}{a}+\frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{1}{ia}+\frac{2}{k-v}\right)^2 + \left(\frac{n}{\alpha}-\frac{2}{k-v}\right)\left(\frac{i}{\alpha}-\frac{2}{k+v}\right)^2\right)$$
$$Q = \frac{n}{2(n-1)^2}\left(\left(\frac{n}{b}+\frac{2}{k'+v'}\right)\left(\frac{1}{i'b}+\frac{2}{k'-v'}\right)^2 + \left(\frac{n}{\beta}-\frac{2}{k'-v'}\right)\left(\frac{i'}{\beta}-\frac{2}{k'+v'}\right)^2\right)$$

erit

$$\text{semidiameter confusionis} = \frac{1}{4}ii'\cdot\frac{\beta}{l}\cdot\frac{b}{\alpha}x^3\left(\frac{1}{i'i'}\cdot\frac{\alpha\alpha}{bb}P + ii\cdot\frac{bb}{\alpha\alpha}Q\right).$$

5. Pro campo apparente definiendo, qui pendet ab apertura singularum acierum lentium, si ponamus

$$\text{semidiametrum aperturae}$$

$$\text{pro lente } PP \begin{cases} \text{faciei anterioris} = \mathfrak{A} = x \\ \text{faciei posterioris} = \mathfrak{a} \end{cases}$$

$$\text{pro lente } QQ \begin{cases} \text{faciei anterioris} = \mathfrak{B} \\ \text{faciei posterioris} = \mathfrak{b}, \end{cases}$$

habebimus sequentes aequationes

$$\mathfrak{a} = \frac{v}{na}z, \quad \mathfrak{B} = \left(\frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a} - \frac{bv}{na\alpha}\right)z, \quad \mathfrak{b} = \left(\frac{i'}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a} - \frac{i'bv}{na\alpha} - \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha v'}{nab}\right)z,$$

ex quibus tribus aequationibus valor ipsius z minimus praebet semidiametrum campi apparentis.

6. Quem campum ut oculus revera perspiciat, eius locus ita debet sumi, ut sit

$$O = \frac{\frac{i'}{i}\frac{\alpha+b}{a} - \frac{i'bv}{na\alpha} - \frac{1}{i}\frac{\alpha v'}{nab}}{\frac{i'}{i}\cdot\frac{\alpha+b}{a} - \frac{i'bv}{na\alpha} - \frac{1}{i}\cdot\frac{\alpha v'}{nab} + \frac{1}{ii'}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}}\cdot\beta,$$

si quidem haec distantia fuerit positiva.

7. Sin autem haec distantia prodierit negativa, oculum lenti QQ immediate applicari convenit, ut sit $O = 0$; tum vero pro campo apparente inveniendo in aequationibus n^0 5 allatis loco $\mathfrak{b}$ scribatur semidiameter pupillae ω, atque ex iisdem valor ipsius z minimus erutus dabit semidiametrum campi apparentis.

8. Obiectum porro sine margine colorato cernetur, existente distantia O n^0 6 inventa positiva, si huic aequationi satisfiat:

$$0 = 1 + \frac{b}{\alpha} + \frac{i'i'b}{\beta}\left(1 + \frac{b}{\alpha}\right) + \frac{(1-i')^2 b(\alpha+b)}{\alpha v'} + \frac{z-i-i'}{n}$$
$$- \frac{iv}{n\alpha} - \frac{i'v'}{n\beta} - \frac{ibv}{n\alpha\alpha} - \frac{ii'i'bbv}{n\alpha\alpha\beta} - \frac{i(1-i')^2 bbv}{n\alpha\alpha v'}.$$

9. Sin autem capiatur distantia $O = 0$, obiectum margine colorato carebit, si fuerit:

$$0 = \frac{1-i}{in} + \frac{1-i'}{i'n} + \frac{v}{ina} + \frac{v'}{inb} + \alpha\left(1 + \frac{\alpha}{iia} + \frac{(1-i)^2\alpha}{iiv}\right)\left(\frac{v'}{ni'bb} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{b}\right).$$

10. Omnis autem confusio penitus tolletur, quae quidem a diversa radiorum refrangibilitate proficiscitur, si huic aequationi satisfacere licuerit $d\beta = 0$ seu huic

$$0 = \frac{\alpha\alpha}{ii'bb}\left(\frac{i}{\alpha} + \frac{1}{ia} + \frac{(1-i)^2}{iv}\right) + \frac{i'}{\beta} + \frac{1}{i'b} + \frac{(1-i')^2}{i'v'}.$$

COROLLARIUM 1

336. Quia ambarum lentium distantia aB necessario est positiva, oportet sit $\alpha + b > 0$. Tum vero aperturae ita debent esse comparatae, ut sit $\mathfrak{a} > ix$, $\mathfrak{B} > i \cdot \frac{bx}{\alpha}$ et $\mathfrak{b} > ii' \cdot \frac{bx}{\alpha}$.

COROLLARIUM 2

337. Casu igitur, quo ob valorem ipsius O prodeuntem negativum distantia $O = 0$ assumitur, quia tum $\mathfrak{b} = \omega$ statuitur, etiam esse debet $\omega > ii' \frac{bx}{\alpha}$ seu $x < \frac{\alpha\omega}{ii'b}$. Scilicet hoc casu inutile esset primam aperturam maiorem sumere, quia radii non in oculum ingrederentur.

SCHOLION

338. Si simili modo instrumenta dioptrica pluribus lentibus instructa prosequi vellemus, in calculos tantopere intricatos delaberemur, ut ex iis nihil fere concludere liceret. Oritur autem haec calculi complicatio a crassitie lentium, qua neglecta omnia fiunt multo concinniora. Quare si pluribus lentibus uti velimus, crassitiem tam parvam assumamus, ut sine errore pro nihilo haberi possit, id quod in praxi etiam sedulo observari solet. Praeterea etiam campi apparentis locique oculi determinatio non capit rigorem geometricum, parumque refert, si in ea aliquantum aberretur. Similis quoque ratio est conditionum, quibus effectus a diversa radiorum refrangibilitate oriundus tollitur; sufficiet enim iis proxime satisfecisse, cum perfecta huius confusionis destructio ne sperari quidem possit. Quocirca in sequentibus, ubi instrumenta pluribus lentibus instructa evolvemus, crassitiem lentium in calculo penitus praetermittamus: in quo negotio ne eadem toties repetere opus habeamus, problema generale praemittamus, in quo omnia momenta generatim tantum exponamus eaque deinceps pro quovis lentium numero accurate describamus.

PROBLEMA 3

339. *Si instrumentum dioptricum compositum sit ex lentibus quotcunque, quarum crassitiem negligere liceat, elementa eius constructionem continentia exponere, ex quibus deinceps regulae dirigentes constructionem ipsam stabiliri possint.*

SOLUTIO

Obiecto in E constituto ponantur distantiae determinatrices singularum lentium una cum numeris arbitrariis ad singulas pertinentibus, ut sequitur:

Pro lente prima	$EA = a$,	$aF = \alpha$,	num. arb. $= \lambda$
pro lente secunda	$FB = b$,	$bG = \beta$,	num. arb. $= \lambda'$
pro lente tertia	$GC = c$,	$cH = \gamma$,	num. arb. $= \lambda''$
pro lente quarta	$HD = d$,	$dI = \delta$,	num. arb. $= \lambda'''$
pro lente quinta	$IE = e$,	$eK = \varepsilon$,	num. arb. $= \lambda''''$
pro lente sexta	$KF = f$,	$fL = \zeta$,	num. arb. $= \lambda'''''$

etc.,

ex quibus elementis quomodo singulae lentes debeant formari, supra est expositum.

Nunc autem porro ponatur brevitatis gratia

$$\alpha = Aa, \quad \beta = Bb, \quad \gamma = Cc, \quad \delta = Dd, \quad \varepsilon = Ee, \quad \zeta = Ff \text{ etc.},$$

tum vero statuatur etiam

$$\frac{A}{A+1} = \mathfrak{A}, \ \frac{B}{B+1} = \mathfrak{B}, \ \frac{C}{C+1} = \mathfrak{C}, \ \frac{D}{D+1} = \mathfrak{D}, \ \frac{E}{E+1} = \mathfrak{E}, \ \frac{F}{F+1} = \mathfrak{F} \text{ etc.},$$

ita ut sint distantiae focales lentium:

$$\mathfrak{A}a, \quad \mathfrak{B}b, \quad \mathfrak{C}c, \quad \mathfrak{D}d, \quad \mathfrak{E}e, \quad \mathfrak{F}f \text{ etc.}$$

Nunc sit semidiameter aperturae primae lentis obiectivae $= x$, pro reliquis vero lentibus ratio aperturarum litteris π, π', π'', π''', π'''' etc. exponatur, ita ut semidiameter aperturae cuiusque maior accipi debeat quam secundum has rationes; scilicet capi oportebit

semidiametrum aperturae

lentis secundae $> \pi\ \mathfrak{B}b$

lentis tertiae $> \pi'\ \mathfrak{C}c$

lentis quartae $> \pi''\ \mathfrak{D}d$

lentis quintae $> \pi'''\ \mathfrak{E}e$

lentis sextae $> \pi''''\mathfrak{F}f$

etc.

Quod si iam semidiameter spatii in obiecto conspicui vocetur $= z$ fiatque $\frac{z}{a} = \Phi$, ut sit $z = a\Phi$, hinc distantiae determinatrices ita exprimentur, ut sit primo $\alpha = Aa$, tum vero:

$$b = \frac{Aa\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}; \qquad \beta = \frac{ABa\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$$

$$c = \frac{ABa\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}; \qquad \gamma = \frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}$$

$$d = \frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}; \qquad \delta = \frac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$$

$$e = \frac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}; \qquad \varepsilon = \frac{ABCDEa\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$$

$$f = \frac{ABCDEa\Phi}{\mathfrak{F}\pi'''' - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi}; \qquad \zeta = \frac{ABCDEFa\Phi}{\mathfrak{F}\pi'''' - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$$

etc.

Circa has expressiones primum notandum est aggregata $\alpha + b$, $\beta + c$, $\gamma + d$, $\delta + e$, $\varepsilon + f$ etc. esse oportere positiva, quippe quibus lentium intervalla exprimuntur. Erit nempe

Intervallum lentium

$$\text{I et II} \quad = \frac{Aa\mathfrak{B}\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} > 0$$

$$\text{II et III} \quad = \frac{ABa\Phi(\mathfrak{C}\pi' - (1 - \mathfrak{B})\pi)}{(\mathfrak{B}\pi - \Phi)(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)} > 0$$

$$\text{III et IV} \quad = \frac{ABCa\Phi(\mathfrak{D}\pi'' - (1 - \mathfrak{C})\pi')}{(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)} > 0$$

$$\text{IV et V} \quad = \frac{ABCDa\Phi(\mathfrak{E}\pi''' - (1 - \mathfrak{D})\pi'')}{(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)} > 0$$

$$\text{V et VI} \quad = \frac{ABCDEa\Phi(\mathfrak{F}\pi'''' - (1 - \mathfrak{E})\pi''')}{(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)(\mathfrak{F}\pi'''' - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi)} > 0$$

etc.

Praeterea ut lentes sequentes omnes radios a prima exceptos transmittant, debet esse

semidiameter aperturae

lentis secundae $> \dfrac{\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}x$

lentis tertiae $> \dfrac{\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}x$

lentis quartae $> \dfrac{\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}x$

lentis quintae $> \dfrac{\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}x$

lentis sextae $> \dfrac{\Phi}{\mathfrak{F}\pi'''' - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi}x$

etc.

Denique ex § 214 posito $\mu = 0{,}938191$ et $\nu = 0{,}232692$ erunt litterarum maiuscularum P, Q, R etc. valores

$$P = \frac{\mu}{A^3a^3}(A+1)\ (\lambda(A+1)^2 + \nu A)$$

$$Q = \frac{\mu}{B^3b^3}(B+1)\ (\lambda'(B+1)^2 + \nu B)$$

$$R = \frac{\mu}{C^3c^3}(C+1)\ (\lambda''(C+1)^2 + \nu C)$$

$$S = \frac{\mu}{D^3d^3}(D+1)(\lambda'''(D+1)^2 + \nu D)$$

$$T = \frac{\mu}{E^3e^3}(E+1)(\lambda''''(E+1)^2 + \nu E)$$

$$V = \frac{\mu}{F^3f^3}(F+1)(\lambda'''''(F+1)^2 + \nu F)$$

etc.

His ita constitutis denominationibus sit O distantia oculi post lentem ultimam, cuius distantia iusta ponatur $= l$. Deinde statuatur exponens multiplicationis $= m$, relatus ad distantiam h, ita ut diameter obiecti per instrumentum visi m vicibus maior cernatur, quam si idem obiectum a nudo oculo in distantia $= h$ aspiceretur; multiplicationi autem adiungi convenit situm indicando, utrum obiectum situ erecto an inverso sit appariturum. Porro

gradus claritatis y denotet semidiametrum coni luminosi, qui a quovis obiecti puncto in oculum transmittitur posito semidiametro pupillae $= \omega$. Semidiametrum denique confusionis voco semidiametrum apparentem circulorum, qui in nudo oculo aeque magni depinguntur atque singula obiecti puncta per instrumentum in oculo.

COROLLARIUM 1

340. Quia pro apertura singularum lentium geminos limites invenimus, semidiameter aperturae cuiusque convenientissime aggregato amborum limitum aequalis assumitur vel saltem non minor. Uterque autem limes, etsi forte alter prodeat negativus, affirmative accipi debet.

COROLLARIUM 2

341. Hinc ergo sequentes consequimur formulas pro singularum lentium aperturis:

Semidiameter aperturae

$$\text{lentis secundae} \quad = \frac{A\mathfrak{B}a\pi \pm x}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} \cdot \Phi$$

$$\text{lentis tertiae} \quad = \frac{AB\mathfrak{C}a\pi' \pm x}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} \cdot \Phi$$

$$\text{lentis quartae} \quad = \frac{ABC\mathfrak{D}a\pi'' \pm x}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} \cdot \Phi$$

$$\text{lentis quintae} \quad = \frac{ABCD\mathfrak{E}a\pi''' \pm x}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} \cdot \Phi$$

$$\text{lentis sextae} \quad = \frac{ABCDE\mathfrak{F}a\pi'''' \pm x}{\mathfrak{F}\pi'''' - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi} \cdot \Phi$$

etc.

COROLLARIUM 3

342. Ex distantiis binis determinatricibus cum numero arbitrario quaelibet lens facile construitur; id quod pro lente prima ex superioribus repetamus. Nempe si sit $\lambda > 1$, lens simplex satisfaciet, cuius constructio posito brevitatis gratia

$$\varrho = 0{,}190781, \quad \sigma = 1{,}627401 \quad \text{et} \quad \tau = 0{,}905133$$

ita se habet:

$$\text{Radius faciei}\quad \overset{\text{anterioris}}{\frac{a\alpha}{\varrho\alpha+\sigma a\pm\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}}};\quad \overset{\text{posterioris}}{\frac{a\alpha}{\varrho a+\sigma\alpha\mp\tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}}}$$

seu numeris substitutis, si sit $\lambda=1+v$,

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{a\alpha}{+0{,}190781\alpha+1{,}627401a\pm 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\\[2mm] \text{posterioris} &= \dfrac{a\alpha}{+1{,}627401\alpha+0{,}190781a\mp 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}.\end{cases}$$

COROLLARIUM 4

343. Sin autem sit $\lambda<1$, sed tamen $>0{,}191827$, lens est duplicanda seu ex duabus simplicibus componenda, quarum constructio, si ponatur

$$\lambda=0{,}191827+v,$$

ita se habet:

Pro lente Radius faciei

$$\text{priori}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{a\alpha}{-0{,}622919\alpha+0{,}813700a\pm 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\\[2mm] \text{posterioris} &= \dfrac{a\alpha}{+1{,}532010\alpha+0{,}095390a\mp 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\end{cases}$$

$$\text{posteriori}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{a\alpha}{+0{,}095390\alpha+1{,}532010a\pm 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\\[2mm] \text{posterioris} &= \dfrac{a\alpha}{+0{,}813700\alpha-0{,}622919a\mp 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}.\end{cases}$$

COROLLARIUM 5

344. At si sit $\lambda=0{,}042165+v$, lente utendum est triplicata ita construenda:

Pro lente Radius faciei

$$\text{priori}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{a\alpha}{-0{,}894153\alpha+0{,}542467a\pm 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\\[2mm] \text{posterioris} &= \dfrac{a\alpha}{+1{,}500214\alpha+0{,}063594a\mp 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\end{cases}$$

Pro lente Radius faciei

$$\text{media}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{-0{,}415280\alpha + 1{,}021340a \pm 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{+1{,}021340\alpha - 0{,}415280a \mp 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\end{cases}$$

$$\text{posteriori}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{+0{,}063594\alpha + 1{,}500214a \pm 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{+0{,}542467\alpha - 0{,}894153a \mp 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}.\end{cases}$$

COROLLARIUM 6

345. Si denique sit $\lambda = -0{,}010216 + v$, lens facienda est quadruplicata ita construenda:

Pro lente Radius faciei

$$\text{prima}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{-1{,}029770\alpha + 0{,}406850a \pm 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{+1{,}484315\alpha + 0{,}047695a \mp 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\end{cases}$$

$$\text{secunda}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{-0{,}670615\alpha + 0{,}766005a \pm 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{+1{,}125160\alpha - 0{,}311460a \mp 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\end{cases}$$

$$\text{tertia}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{-0{,}311460\alpha + 1{,}125160a \pm 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{+0{,}766005\alpha - 0{,}670615a \mp 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\end{cases}$$

$$\text{quarta}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{+0{,}047695\alpha + 1{,}484315a \pm 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{+0{,}406850\alpha - 1{,}029770a \mp 0{,}905133(a+\alpha)\sqrt{v}}.\end{cases}$$

SCHOLION

346. Quae in his corollariis de constructione lentis primae sunt allata, mutatis litteris a et α ad reliquas lentes facile accommodari manifestum est, quarum loco, si usus requirat, ut numeri λ', λ'' etc. sint unitate minores, etiam

lentes sive duplicatae sive triplicatae sive adeo quadruplicatae adhiberi debebunt. Ceterum hae formulae ad lentes quotcunque patent, ita ut proposito lentium numero quocunque tantum litterae, quae ad lentes sequentes pertinerent, sint omittendae. In his autem denominationibus statim introduximus campum apparentem numero Φ contentum, cum sit semidiameter spatii in obiecto conspicui $z = a\Phi$. Interim tamen campum apparentem non ad lubitum augere licet, siquidem is multiplicationis ratione et numeris π, π', π'' etc. determinatur. Hi autem numeri semper infra $\frac{1}{2}$, imo $\frac{1}{3}$ subsistunt ac plerumque $\frac{1}{4}$ vel adeo $\frac{1}{6}$ superare nequeunt; quandoque etiam minores accipi debent, id quod formulae corollarii 2 quovis casu declarabunt, quibus semidiameter aperturae cuiusque lentis exprimitur. Quare retentis his denominationibus momenta constructionis pro quovis lentium numero determinato expendamus.

PROBLEMA 4

347. *Si instrumentum dioptricum duabus constet lentibus, quarum crassitiem negligere liceat, definire momenta, quibus constructio continetur.*

SOLUTIO

Cum hic lens secunda sit ultima, momenta constructionis ita se habebunt:

1. Ut oculus imaginem in distantia iusta conspiciat, debet esse $O = \beta + l$ ideoque

$$O = l + \frac{ABa\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$$

et ex conditione campi apparentis

$$O = \frac{\mathfrak{B}b\pi}{\pi - \Phi}.$$

2. Exponens multiplicationis m ad distantiam h relatus praebet hanc aequationem

$$m = AB\frac{h}{l} \text{ pro situ erecto;}$$

sin autem situs inversus desideretur, numerus m negative est capiendus.

3. Pro gradu claritatis semper est $y = \frac{hx}{ma}$.

4. Pro campo apparente habebitur haec aequatio:

$$\pi - \Phi = \frac{-ma\Phi}{h}, \quad \text{unde fit} \quad \Phi = \frac{-\pi h}{ma-h}.$$

5. Si distantia O hinc prodeat negativa, capi debet $O=0$ seu $\frac{AB\alpha\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}=-l$; tum vero π eiusmodi valorem induit, ut apertura lentis ocularis non superet aperturam pupillae; fiet nempe $\pi\mathfrak{B}b=\omega$ hincque

$$\Phi = \frac{\mathfrak{B}\pi\omega}{A\mathfrak{B}a\pi+\omega} \quad \text{vel} \quad (B+1)\omega = -\pi l.$$

6. Semidiameter confusionis sequenti formula exprimetur:

$$\frac{Bbb}{4Aal}x^3\left(\frac{AAaa}{bb}P+\frac{bb}{AAaa}Q\right),$$

quae factis substitutionibus abit in hanc:

$$\frac{\mu m x^3}{4aah}\left(\frac{(A+1)(\lambda(A+1)^2+\nu A)}{A^3}+\frac{\Phi(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu B)}{A^3B^3(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}\right).$$

7. Ut obiectum sine margine colorato appareat, si distantia O fuerit positiva, necesse est sit $\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}=0$.

8. Sin autem capiatur $O=0$, fieri debet $\frac{(A+1)\mathfrak{B}\pi}{\Phi}=0$ seu $\frac{\pi}{\mathfrak{A}\Phi}=0$.

9. Omnis autem confusio a diversa radiorum refrangibilitate oriunda penitus tolletur, si insuper fuerit $\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}=0$.

10. Praeterea autem erit distantia lentium $\frac{A\mathfrak{B}a\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}$, quae debet esse positiva.

11. Denique semidiameter aperturae lentis ocularis est $\frac{A\mathfrak{B}a\pi\pm x}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}\cdot\Phi$, ubi signorum $\pm$ id capi debet, quod valorem praebet maximum sive positivum sive negativum.

COROLLARIUM 1

348. Cum sit (n^o 4) $\Phi=\frac{-\pi h}{ma-h}$ et ob multiplicationem $B=\frac{ml}{Ah}$ hincque $\mathfrak{B}=\frac{ml}{ml+Ah}$, habebitur pro loco oculi $O=\frac{-Ahl(ma-h)}{mmal+Ahh}$.

Tum vero est $\mathfrak{B}\pi-\Phi=\frac{ml\pi}{ml+Ah}+\frac{\pi h}{ma-h}=\frac{\pi(mmal+Ahh)}{(ma-h)(ml+Ah)}$, unde fit lentium distantia $\frac{A\mathfrak{B}a\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}=\frac{mAa(ma-h)}{mmal+Ahh}l$.

COROLLARIUM 2

349. Cum sit $\frac{A}{A+1} = \mathfrak{A}$ et $A = \frac{\mathfrak{A}}{1-\mathfrak{A}}$, semidiameter confusionis etiam ita exprimi potest, ut sit

$$\frac{\mu m x^3}{4aah}\left(\frac{\lambda + \nu\mathfrak{A}(1-\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\Phi(\lambda' + \nu\mathfrak{B}(1-\mathfrak{B}))}{A^3\mathfrak{B}^3(\mathfrak{B}\pi - \Phi)}\right).$$

COROLLARIUM 3

350. Cum sit lentium distantia $= \frac{A\mathfrak{B}a\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$, obiectum sine coloribus cerni nequit, nisi lentium distantia evanescat; siquidem oculus in eo loco, quem campus apparens postulat, teneatur. Et quoniam huic conditioni satisfieri nequit, multo minus tota confusio ex n° 9 tolli poterit.

SCHOLION

351. Hic statim ab instrumentis duabus lentibus instructis incepi, quoniam lens unica facillime expeditur. Primum enim necesse est, ut sit

$$O = l + \alpha = l + Aa.$$

Tum vero multiplicatio praebet $m = \frac{h}{a}$ pro situ erecto, et campus apparens non terminatur sumendo $Aa + l = 0$ seu $O = 0$, ita ut oculus lenti immediate debeat applicari. Semidiameter vero confusionis erit

$$= \frac{\alpha}{4l}x^3 \cdot P = \frac{Aax^3}{4l} \cdot P = -\frac{1}{4}x^3 \cdot P = \frac{-max^3}{4h} \cdot P \quad \text{ob} \quad l = -Aa \quad \text{et} \quad ma = h.$$

Quare semidiameter confusionis erit

$$\frac{\mu m x^3}{4aah}\left(\frac{(A+1)(\lambda(A+1)^2 + \nu A)}{A^3}\right) = \frac{\mu m x^3}{4aah} \cdot \frac{\lambda + \nu\mathfrak{A}(1-\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}^3}.$$

Pro gradu claritatis autem habetur ut semper $y = \frac{hx}{ma}$.

Obiectum porro hoc casu sine margine colorato cernetur; tota autem confusio tolli nequit, nisi sit $\frac{1}{\mathfrak{A}} = 0$ seu $A = -1$, id quod scopo lentium repugnat. Quare ad considerationem plurium lentium progrediamur.

PROBLEMA 5

352. *Si instrumentum dioptricum tribus instructum sit lentibus, quarum crassities tam sit parva, ut negligi queat, definire cuncta momenta ad constructionem dirigendam necessaria.*

SOLUTIO

Hic igitur lens tertia erit ultima seu ocularis, ideoque momenta sequenti modo se habebunt:

1. Ut oculo imago in distantia iusta spectanda offeratur, debet esse $O = \gamma + l$ ac loco γ valore substituto

$$O = l + \frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}$$

et ex conditione campi apparentis

$$O = \frac{\mathfrak{C}c\pi'}{\pi' - \pi + \Phi}.$$

2. Exponens multiplicationis m ad distantiam h relatus praebet hanc aequationem:

$$m = -\frac{ABCh}{l} \quad \text{pro situ erecto,}$$

unde si situs inversus desideretur, numerum m negative accipi convenit.

3. Pro gradu claritatis habemus, ut semper, $y = \frac{hx}{ma}$.

4. Pro campo autem apparente definiendo habemus hanc aequationem:

$$\Phi = \frac{-\pi + \pi'}{ma - h} h.$$

5. At si distantia O hinc prodeat negativa, ut capi oporteat $O = 0$ ideoque $\frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} = -l$, campus apparens definiri debet ex hac aequatione $\pi'\mathfrak{C}c = \omega$ seu $\frac{AB\mathfrak{C}a\Phi\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} = \omega$ vel $(C+1)\omega = -\pi' l$.

6. Semidiameter confusionis vero ita exprimetur:

$$\frac{Ccc}{4ABal} x^3 \left(\frac{AABBaa}{cc} P + \frac{BBb^4}{AAaacc} Q + \frac{cc}{AABBaa} R \right),$$

quae ob $\frac{1}{l} = \frac{-m}{ABCh}$ abit signo mutato in hanc:

$$\frac{\mu m x^3}{4aah}\left\{\begin{aligned} &+\frac{(A+1)(\lambda(A+1)^2+\nu A)}{A^3}\\ &+\frac{\Phi(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu B)}{A^3B^3(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}\\ &+\frac{\Phi(C+1)(\lambda''(C+1)^2+\nu C)}{A^3B^3C^3(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}\end{aligned}\right\}$$

7. Ut obiectum sine margine colorato appareat, si quidem distantia O prodierit positiva, esse oportet

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}=0.$$

8. Sin autem ob istam distantiam prodeuntem negativam capiatur $O=0$, margo coloratus evanescet faciendo:

$$\frac{\pi'}{\mathfrak{A}\Phi}+\frac{\pi'}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}=\frac{\pi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}.$$

9. Quod si marginem coloratum tollere liceat, praeterea visio ab omni confusione liberabitur, si huic aequationi satisfiat:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\Phi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}=0.$$

10. Denique effici debet, ut distantia lentium fiat positiva, unde habebitur:

Intervallum lentium

I et II $=\frac{A\mathfrak{B}a\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}>0$; II et III $=\frac{ABa\Phi(\mathfrak{C}\pi'-(1-\mathfrak{B})\pi)}{(\mathfrak{B}\pi-\Phi)(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}>0.$

11. Tandem numeros π et π' ita accipi oportet, ut aperturae lentium non fiant nimis magnae; est vero:

Semidiameter aperturae

lentis secundae $=\frac{A\mathfrak{B}a\pi\pm x}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}\cdot\Phi$, lentis tertiae $=\frac{AB\mathfrak{C}a\pi'\pm x}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}\cdot\Phi.$

COROLLARIUM 1

353. Cum sit $C=\frac{-ml}{ABh}$ ideoque $\mathfrak{C}=\frac{-ml}{ABh-ml}$ et $\Phi=\frac{-\pi+\pi'}{ma-h}\cdot h$, si hi valores substituantur, erit pro loco oculi

$$O=\frac{ABhl(ma-h)\pi'}{(mmal-ABhh)\pi'+ma(ABh-ml)\pi}.$$

COROLLARIUM 2

354. Semidiameter confusionis etiam ita exprimi potest, ut sit

$$\frac{\mu m x^3}{4aah}\left(\frac{\lambda+\nu\mathfrak{A}(1-\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\Phi(\lambda'+\nu\mathfrak{B}(1-\mathfrak{B}))}{A^3\mathfrak{B}^3(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\Phi(\lambda''+\nu\mathfrak{C}(1-\mathfrak{C}))}{A^3B^3\mathfrak{C}^3(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}\right),$$

cuius formae cohaerentia cum praecedentibus iam ita est manifesta, ut ad plures lentes facile extendi queat.

PROBLEMA 6

355. *Si instrumentum dioptricum quatuor lentibus sit instructum, quarum crassities in computum duci non mereatur, definire omnia momenta ad constructionem dirigendam necessaria.*

SOLUTIO

Quia hic lens quarta est ultima,

1. Ut oculo imago postrema in distantia iusta offeratur, debet esse $O=\delta+l$ ideoque

$$O=l+\frac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}$$

et ex conditione campi apparentis

$$O=\frac{\mathfrak{D}d\pi''}{\pi''-\pi'+\pi-\Phi}.$$

2. Exponens multiplicationis m ad distantiam h relatus, si obiectum ut hactenus situ erecto exhiberi assumatur, erit

$$m=+ABCD\cdot\frac{h}{l}\quad\text{pro situ erecto;}$$

sin autem situs desideretur inversus, numerus m negative est accipiendus.

3. Pro gradu claritatis perpetuo habetur $y=\frac{hx}{ma}$.

4. Campus autem apparens definiri debet ex hac aequatione

$$\Phi=\frac{-\pi+\pi'-\pi''}{ma-h}\cdot h;$$

hinc enim $a\Phi$ praebebit semidiametrum spatii in obiecto conspicui, siquidem distantia O fuerit positiva.

5. Sin autem distantia O prodeat negativa, quo casu capi oportet $O = 0$ seu $\frac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = -l$, quantitas Φ determinari debet ex hac aequatione $\pi''\mathfrak{D}d = \omega$ seu hac

$$\frac{ABC\mathfrak{D}a\pi''\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = \omega \quad \text{sive} \quad (D+1)\omega = -\pi'' l.$$

6. Semidiameter confusionis ita reperietur expressus:

$$\frac{\mu m x^3}{4aah}\left\{\begin{aligned} &+\frac{(A+1)(\lambda(A+1)^2+\nu A)}{A^3} + \frac{\Phi(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu B)}{A^3B^3(\mathfrak{B}\pi - \Phi)} \\ &+\frac{\Phi(C+1)(\lambda''(C+1)^2+\nu C)}{A^3B^3C^3(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)} + \frac{\Phi(D+1)(\lambda'''(D+1)^2+\nu D)}{A^3B^3C^3D^3(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}\end{aligned}\right\}$$

7. Ut obiectum sine margine colorato appareat, siquidem distantia O sit positiva, esse oportet:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = 0.$$

8. Verum si acceperimus $O = 0$, margo coloratus evanescet huic aequationi satisfaciendo:

$$\frac{\pi''}{\mathfrak{A}\Phi} + \frac{\pi''}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi - \Phi)} + \frac{\pi''}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)} = \frac{\pi}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{B}\pi - \Phi)} + \frac{\pi'}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)}.$$

9. Omnis autem confusio a diversa radiorum natura oriunda penitus tolletur, si satisfieri liceat huic aequationi:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi - \Phi)} + \frac{\Phi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)} + \frac{\Phi}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)} = 0.$$

10. Denique efficiendum est, ut distantiae lentium sint positivae, unde oriuntur formulae sequentes:

Intervallum lentium

$$\text{I et II} \quad = \frac{A\mathfrak{B}a\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} > 0; \qquad \text{II et III} \quad = \frac{ABa\Phi(\mathfrak{C}\pi' - (1-\mathfrak{B})\pi)}{(\mathfrak{B}\pi - \Phi)(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)} > 0;$$

$$\text{III et IV} \quad = \frac{ABCa\Phi(\mathfrak{D}\pi'' - (1-\mathfrak{C})\pi')}{(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)} > 0.$$

11. Aperturae autem singularum lentium ita sunt capiendae, ut sit:

Semidiameter aperturae

$$\text{lentis secundae} = \frac{A\mathfrak{B}a\pi \pm x}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} \cdot \Phi$$

$$\text{lentis tertiae} = \frac{AB\mathfrak{C}a\pi' \pm x}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} \cdot \Phi$$

$$\text{lentis quartae} = \frac{ABC\mathfrak{D}a\pi'' \pm x}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} \cdot \Phi.$$

COROLLARIUM 1

356. Cum sit ob multiplicationem $D = \frac{ml}{ABCh}$ ideoque $\mathfrak{D} = \frac{ml}{ABCh + ml}$ et $\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi''}{ma - h} \cdot h$, pro loco oculi habebitur haec expressio:

$$O = \frac{-ABChl(ma - h)\pi''}{(mmal + ABChh)\pi'' - ma(ABCh + ml)(\pi' - \pi)}.$$

COROLLARIUM 2

357. Quia hic tot occurrunt litterae determinandae, dubium nullum esse videtur, quin formulis sub n^o 7 vel 8 et 9 contentis satisfieri queat, et certum saltem est id fieri posse, si plura adhibeantur mediorum refringentium genera.

PROBLEMA 7

358. *Si instrumentum dioptricum quinque lentibus sit instructum, quarum crassities ob parvitatem negligi queat, definire omnia momenta constructionem dirigentia.*

SOLUTIO

Cum hic lens quinta ultimum locum teneat, habebimus:

1. Pro loco oculi, ut imago visa ipsi in iusta distantia offeratur, debet esse $O = \varepsilon + l$ ideoque

$$O = l + \frac{ABCDEa\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$$

et ex conditione campi apparentis

$$O = \frac{\mathfrak{E} e \pi'''}{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}.$$

2. Exponens multiplicationis m ad distantiam $= h$ relatus, siquidem obiectum situ erecto sit spectandum,

$$m = -ABCDE \cdot \frac{h}{l};$$

pro situ autem inverso numerus m negative capi debet.

3. Pro gradu claritatis est ut hactenus $y = \frac{hx}{ma}$.

4. Campus apparens definiri debet ex hac aequatione

$$\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{ma - h} \cdot h,$$

siquidem distantia illa O prodierit positiva.

5. Sin autem haec distantia prodeat negativa, ut capiatur $O = 0$ seu $\frac{ABCDEa\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = -l$, campus apparens non ex formula n° 4, sed ex hac $\pi''' \mathfrak{E} e = \omega$ definiri debet, unde fit

$$\frac{ABCD\mathfrak{E} a \pi''' \Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = \omega \quad \text{seu} \quad (E+1)\omega = -\pi''' l.$$

6. Semidiameter confusionis ab apertura lentium oriundae sequenti modo exprimitur:

$$\frac{\mu m x^3}{4aah} \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{(A+1)(\lambda(A+1)^2 + \nu A)}{A^3} + \frac{\Phi(B+1)(\lambda'(B+1)^2 + \nu B)}{A^3 B^3 (\mathfrak{B}\pi - \Phi)} \\ &+ \frac{\Phi(C+1)(\lambda''(C+1)^2 + \nu C)}{A^3 B^3 C^3 (\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)} + \frac{\Phi(D+1)(\lambda'''(D+1)^2 + \nu D)}{A^3 B^3 C^3 D^3 (\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)} \\ &+ \frac{\Phi(E+1)(\lambda''''(E+1)^2 + \nu E)}{A^3 B^3 C^3 D^3 E^3 (\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)} \end{aligned} \right\}$$

7. Ut obiectum sine margine colorato appareat, siquidem distantia O fuerit positiva, huic aequationi erit satisfaciendum:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = 0.$$

8. At si distantia O sit negativa capiaturque $O=0$, pro hoc scopo obtinendo oportet sit:

$$\frac{\pi'''}{\mathfrak{A}\Phi}+\frac{\pi'''}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\pi'''}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}+\frac{\pi'''}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}$$
$$=\frac{1}{ABCD\mathfrak{E}}\left(\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}\right).$$

9. Omnis autem confusio a diversa radiorum natura oriunda penitus tolletur, si fieri possit

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\Phi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}+\frac{\Phi}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}$$
$$+\frac{\Phi}{ABCD\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}=0.$$

10. Tum vero efficiendum est, ut intervalla lentium omnia sint positiva, unde oriuntur formulae sequentes:

Intervallum lentium

$$\text{I et II}\quad =\frac{A\mathfrak{B}a\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}>0$$

$$\text{II et III}\quad =\frac{ABa\Phi(\mathfrak{C}\pi'-(1-\mathfrak{B})\pi)}{(\mathfrak{B}\pi-\Phi)(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}>0$$

$$\text{III et IV}\quad =\frac{ABCa\Phi(\mathfrak{D}\pi''-(1-\mathfrak{C})\pi')}{(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}>0$$

$$\text{IV et V}\quad =\frac{ABCDa\Phi(\mathfrak{E}\pi'''-(1-\mathfrak{D})\pi'')}{(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}>0.$$

11. Aperturae denique singularum lentium ita sunt capiendae, ut sit:

Semidiameter aperturae

$$\text{lentis secundae}=\frac{A\mathfrak{B}a\pi\pm x}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}\cdot\Phi$$

$$\text{lentis tertiae}=\frac{AB\mathfrak{C}a\pi'\pm x}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}\cdot\Phi$$

$$\text{lentis quartae}=\frac{ABC\mathfrak{D}a\pi''\pm x}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}\cdot\Phi$$

$$\text{lentis quintae}=\frac{ABCD\mathfrak{E}a\pi'''\pm x}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}\cdot\Phi.$$

COROLLARIUM

359. Ob multiplicationem ergo erit:

$$E = \frac{-ml}{ABCDh} \quad \text{et} \quad \mathfrak{E} = \frac{-ml}{ABCDh - ml},$$

unde oritur:

$$O = \frac{ABCDhl(ma-h)\pi'''}{(mmal - ABCDhh)\pi''' + ma(ABCDh - ml)(\pi'' - \pi' + \pi)}.$$

SCHOLION

360. Hactenus supposui oculum vel in eo loco teneri, quem visio campi apparentis postulat, vel lenti postremae immediate applicari; quorum utroque casu efficiendum est, ut imago ultima oculo ad distantiam iustam offeratur. Hic quidem locum oculi, quem campus praebet, statim coniunxi cum iusta imaginis spectandae distantia; sed etiam sine respectu sive ad hanc distantiam sive ad multiplicationem habito definiri potest. Ex superioribus enim (§ 271) habemus

Pro casu

unius lentis $O = 0$

duarum lentium $O = \dfrac{A\mathfrak{B}a\pi\Phi}{(\pi - \Phi)(\mathfrak{B}\pi - \Phi)}$

trium lentium $O = \dfrac{AB\mathfrak{C}a\pi'\Phi}{(\pi' - \pi + \Phi)(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)}$

quatuor lentium $O = \dfrac{ABC\mathfrak{D}a\pi''\Phi}{(\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}$

quinque lentium $O = \dfrac{ABCD\mathfrak{E}a\pi'''\Phi}{(\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)}$

etc.

Verum si nolimus ad campum apparentem respicere, semper eiusmodi locum oculo assignare licet, unde obiectum sine margine colorato cernatur. Haud abs re autem fore arbitror hunc locum determinasse, quia ex eius distantia a loco oculi ob rationem campi assumto facilius iudicare licebit, quanto margine cinctum apparere debeat obiectum, si oculus in loco isto posteriori teneatur. Si enim aequationi n^o 7 appositae satisfieri nequeat, nil aliud intelligimus, nisi obiectum non sine margine colorato esse appariturum; at si insuper constet ille locus, unde obiectum sine huiusmodi margine spectari posset, facilius quantitatem istius marginis colligere poterimus.

PROBLEMA 8

361. *Si instrumentum dioptricum ex lentibus quotcunque constet, quarum crassitiem negligere liceat, eum pro oculo locum assignare, unde obiectum sine margine colorato conspiciatur.*

SOLUTIO

Ponatur haec oculi post lentem ultimam distantia $= \Omega$, atque ex aequationibus § 325 datis, si pro O scribatur Ω, haec ipsa distantia Ω, quam quaerimus, elici potest. Scilicet pro quovis lentium numero erit, ut sequitur:

I. Pro unica lente

Habetur haec aequatio $\frac{\Omega d\alpha}{\alpha(\alpha-\Omega)} = 0$, unde fit $\frac{\Omega}{\alpha(\alpha-\Omega)} = 0$ seu $\frac{\Omega}{\alpha-\Omega} = 0$. Verum etiam campus apparens exigit $O = 0$, unde hoc casu ambo loca oculi O et Ω conveniunt neque margo coloratus est pertimescendus.

II. Pro duabus lentibus

Hoc casu reperta est ista aequatio $\frac{\Omega d\beta}{\beta(\beta-\Omega)} = d\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right)$, unde substitutis valoribus supra assignatis oritur

$$\frac{\Omega}{\beta(\beta-\Omega)} = \frac{\pi}{\mathfrak{A}\Phi} : (B+1)ABa\left(\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi - \Phi)}\right),$$

seu, si ponamus

$$Y = \frac{\pi}{\mathfrak{A}\Phi} \quad \text{et} \quad Z = \frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi - \Phi)},$$

erit

$$\frac{\Omega}{\beta-\Omega} = \frac{Y}{AB(B+1)aZ} \cdot \beta = \frac{Y}{(B+1)Z} \cdot \frac{\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}.$$

III. Pro tribus lentibus

Eodem modo, si ponamus

$$Y = \frac{\pi'}{\mathfrak{A}\Phi} + \frac{\pi'}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi - \Phi)} - \frac{\pi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{B}\pi - \Phi)}$$

et

$$Z = \frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi - \Phi)} + \frac{\Phi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)},$$

erit pro casu trium lentium

$$\frac{\Omega}{\gamma-\Omega}=\frac{Y}{ABC(C+1)aZ}\cdot\gamma=\frac{Y}{(C+1)Z}\cdot\frac{\Phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi},$$

ubi notandum est $Y=0$ et $Z=0$ esse eas ipsas aequationes, quas in superioribus problematibus sub numeris 8 et 9 retulimus.[1])

IV. Pro quatuor lentibus

Si iam ponatur

$$Y=\frac{\pi''}{\mathfrak{A}\Phi}+\frac{\pi''}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\pi''}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}-\frac{1}{ABC\mathfrak{D}}\left(\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}\right)$$

$$Z=\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\Phi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}+\frac{\Phi}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)},$$

erit

$$\frac{\Omega}{\delta-\Omega}=\frac{Y}{ABCD(D+1)aZ}\cdot\delta$$

hincque

$$\frac{\Omega}{\delta-\Omega}=\frac{Y}{(D+1)Z}\cdot\frac{\Phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}.$$

V. Pro quinque lentibus

Posito secundum aequationes n^0 8 et 9 (§ 358) exhibitas

$$Y=\frac{\pi'''}{\mathfrak{A}\Phi}+\frac{\pi'''}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\pi'''}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}+\frac{\pi'''}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}$$
$$-\frac{1}{ABCD\mathfrak{E}}\left(\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}\right)$$

$$Z=\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{\Phi}{A\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\frac{\Phi}{AB\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}+\frac{\Phi}{ABC\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}$$
$$+\frac{\Phi}{ABCD\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}$$

habebimus

$$\frac{\Omega}{\varepsilon-\Omega}=\frac{Y}{ABCDE(E+1)aZ}\cdot\varepsilon$$

vel

$$\frac{\Omega}{\varepsilon-\Omega}=\frac{Y}{(E+1)Z}\cdot\frac{\Phi}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}.$$

Lex harum formularum pro quovis maiori lentium numero hinc satis est perspicua.

1) Pro duabus lentibus vide § 347, pro tribus § 352, pro quatuor § 355, pro quinque § 358. E. Ch.

COROLLARIUM 1

362. Cum igitur supra pro quovis lentium numero exhibuerimus aequationes n^0 8 et n^0 9, formula n^0 8 dabit valorem Y et formula n^0 9 valorem ipsius Z, quibus cognitis locus oculi, ubi margo coloratus evanescit, facile innotescit.

COROLLARIUM 2

363. Si praeterea ex aequatione n^0 7 (§ 358) exposita ponatur

$$X = \frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi},$$

erit quidem pro casu quinque lentium

$$Y = \frac{\pi'''}{\Phi} Z - \frac{1}{ABCD\mathfrak{E}} X.$$

Pro quatuor lentibus $\quad Y = \dfrac{\pi''}{\Phi} Z - \dfrac{1}{ABC\mathfrak{D}} X$ [1]

pro tribus lentibus $\quad Y = \dfrac{\pi'}{\Phi} Z - \dfrac{1}{AB\mathfrak{C}} X$

et pro duabus lentibus $\quad Y = \dfrac{\pi}{\Phi} Z - \dfrac{1}{A\mathfrak{B}} X.$

SCHOLION

364. Quo facilius haec oculi loca littera Ω designata cum praecedentibus littera O designatis (§ 271) comparare liceat, notandum est esse:

Pro casu

unius lentis $\quad \dfrac{O}{\alpha - O} = 0$

duarum lentium $\quad \dfrac{O}{\beta - O} = \dfrac{\pi}{(B+1)(\mathfrak{B}\pi - \Phi)}$

trium lentium $\quad \dfrac{O}{\gamma - O} = \dfrac{\pi'}{(C+1)(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)}$

quatuor lentium $\quad \dfrac{O}{\delta - O} = \dfrac{\pi''}{(D+1)(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}$

quinque lentium $\quad \dfrac{O}{\varepsilon - O} = \dfrac{\pi'''}{(E+1)(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)}$

etc.

---

1) Pro quatuor, tribus, duabus lentibus valores X simili modo aequationibus sub n^0 7 § 355, 352, 347 dispositis definiuntur. E. Ch.

Quare ut ambo loca congruant retentis pro quovis lentium numero litteris Y et Z modo adhibitis, oportet sit:

Pro una lente	$O = 0$
pro duabus lentibus	$\frac{Y}{Z} = \frac{\pi}{\Phi}$
pro tribus lentibus	$\frac{Y}{Z} = \frac{\pi'}{\Phi}$
pro quatuor lentibus	$\frac{Y}{Z} = \frac{\pi''}{\Phi}$
pro quinque lentibus	$\frac{Y}{Z} = \frac{\pi'''}{\Phi}$ etc.,

unde generatim fit $X = 0$, quae est ipsa aequatio n^0 7 allata.

Haec igitur sunt principia generalia, ex quibus constructio instrumentorum dioptricorum erit perficienda, quae quidem instrumenta hic potissimum ad visionem accommodavi. Nihilo vero minus ad repraesentationem obiectorum in camera obscura super tabula alba adhiberi possunt, ubi praeter iam data praecepta tenendum est has effigies etiam sine margine colorato esse apparituras, si aequationibus n^0 7 satisfiat, omnem vero confusionem a diversa radiorum natura oriundam penitus tolli, si insuper aequationibus n^0 9 satisfiat.

SUPPLEMENTUM VII[1)]

Si ratio refractionis in singulis lentibus fuerit diversa et secundum lentium ordinem litteris n, n', n'', n''' etc. exhibeatur, inde pro lentium constructione

I. Litterae respondentes ϱ, σ, τ et pro confusione litterae μ et ν convenienter definiri debent secundum formulas supra datas § 55:

$$\varrho = \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{n+2} - 1, \quad \sigma = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{n+2} + 1,$$

$$\tau = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{n+2}\right)\sqrt{(4n-1)},$$

1) Hoc supplementum attinet ad § 339—358 et ad supplementum VI. E. Ch.

ita ut sit

$$\varrho + \sigma = \frac{1}{n-1} \quad \text{et} \quad \sigma - \varrho = \frac{-2}{n+2} + 2 = \frac{2(n+1)}{n+2},$$

porro autem

$$\mu = \frac{1}{4(n+2)} + \frac{1}{4(n-1)} + \frac{1}{8(n-1)^2}, \qquad \nu = \frac{4(n-1)^2}{4n-1},$$

unde intelligitur, quemadmodum ex ratione refractionis n' litterae respondentes ϱ', σ', τ', μ', ν' definiri debeant.

II. Quod iam ad elementa occasione campi apparentis introducta π, π', π'' etc. attinet, distantiae determinatrices lentium inde eodem modo manent determinatae ut supra, ita ut non opus sit eas formulas hic transcribere; interim tamen meminisse iuvabit formulas primitivas, unde illae sunt natae, quae sunt:

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = \frac{Aa}{b}$$

$$\frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = \frac{ABa}{c}$$

$$\frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = \frac{ABCa}{d}$$

$$\frac{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = \frac{ABCDa}{e}$$

etc.

III. Verum valores litterarum P, Q, R etc. ob diversas refractiones mutantur, ut sequitur:

$$P = \frac{\mu}{A^3a^3}(A+1)(\lambda\ (A+1)^2 + \nu A)$$

$$Q = \frac{\mu'}{B^3b^3}(B+1)(\lambda'\ (B+1)^2 + \nu' B)$$

$$R = \frac{\mu''}{C^3c^3}(C+1)(\lambda''(C+1)^2 + \nu'' C)$$

$$S = \frac{\mu'''}{D^3d^3}(D+1)(\lambda'''(D+1)^2 + \nu''' D)$$

etc.

IV. Distantiae lentium etiam manent ut ante una cum semidiametris aperturarum singularum lentium; at radii binarum facierum utriusque lentis ita sunt ad praesentem casum accommodandae, ut pro lente, cuius refractio est n', ei respondentes litterae ϱ', σ' et τ' usurpari debeant, similique modo etiam pro sequentibus lentibus, quarum refractio litteris n'', n''' etc. indicatur.

His praemissis singula momenta, quae in constructione instrumentorum dioptricorum sunt observanda, sequenti modo repraesentabimus:

I. Pro loco oculi seu eius distantia post ultimam lentem $= O$ habebimus pro singulis lentium numeris sequentes determinationes:

Numerus lentium		
I	$O = 0 = -\alpha + l$	ideoque $\alpha = l = Aa$
II	$O = \frac{\mathfrak{B}b\pi}{\pi - \Phi} - \beta + l$	ideoque $\beta = \frac{\mathfrak{B}b\pi}{\pi - \Phi} + l = Bb$
		hinc $l = \frac{Bb(\mathfrak{B}\pi - \Phi)}{\pi - \Phi}$;
III	$O = \frac{\mathfrak{C}c\pi'}{\pi' - \pi + \Phi} - \gamma + l$	hinc $\gamma = \frac{\mathfrak{C}c\pi'}{\pi' - \pi + \Phi} + l = Cc$
		hinc $l = \frac{Cc(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)}{\pi' - \pi + \Phi}$;
IV	$O = \frac{\mathfrak{D}d\pi''}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} - \delta + l$	hinc $\delta = \frac{\mathfrak{D}d\pi''}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} + l$
		ideoque $l = \frac{Dd(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$;
V	$O = \frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} - \varepsilon + l$	hinc $\varepsilon = \frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} + l$
		ideoque $l = \frac{Ee(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)}{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$;

etc.

II. Pro ratione multiplicationis ad distantiam h relata habebimus pro quolibet lentium numero sequentes valores litterae m:

Numerus lentium		
I	$m = -A\frac{h}{l}$	pro situ erecto, si m hinc prodierit positivum; pro situ autem inverso, si m obtinuerit valorem negativum.
II	$m = +AB\frac{h}{l}$	
III	$m = -ABC\frac{h}{l}$	
IV	$m = +ABCD\frac{h}{l}$	
V	$m = -ABCDE\frac{h}{l}$	
	etc.	

III. Pro gradu claritatis y

ex superioribus liquet eum semper pari modo exprimi, quantuscunque fuerit lentium numerus: perpetuo enim erit $y = \frac{hx}{ma}$.

IV. Pro campo apparente

si quidem O habeat valorem positivum, eius semidiameter Φ pro quovis lentium numero sequenti modo definietur:

Numerus lentium	
I	$\Phi = \infty$ seu indefinitum
II	$\Phi = \frac{-\pi}{ma-h}\cdot h$
III	$\Phi = \frac{-\pi+\pi'}{ma-h}\cdot h$
IV	$\Phi = \frac{-\pi+\pi'-\pi''}{ma-h}\cdot h$
V	$\Phi = \frac{-\pi+\pi'-\pi''+\pi'''}{ma-h}\cdot h$
	etc.

IV. Pro [illegible]

si distantia O fuerit negativa, [illegible] immediate applicari debet, Φ definietur ex [illegible]

Numerus lentium

I $\Phi = \infty$ [illegible] tum

II [illegible]

III [illegible]

IV [illegible]

V [illegible]

etc.

V. Pro semidiametro [illegible]

habebuntur sequentes expressiones

Numerus lentium

I $\frac{mx^3}{4aah}\cdot\frac{\mu(A+1)(\lambda A+1)^2+\nu A}{A^3}$ [illegible]

II $\frac{mx^3}{4aah}\Big(\frac{\mu(A+1)(\lambda A+1)^2+\nu A}{A^3}$ [illegible] Φ

III $\frac{mx^3}{4aah}$ [illegible]

IV $\frac{mx^3}{4aah}$ [illegible]

V $\frac{mx^3}{4aah}$ [illegible]

etc.

VI. Pro tollendo margine colorato

si distantia O prodierit positiva, obiectum sine margine colorato apparebit satisfaciendo sequentibus aequationibus:

Numerus lentium	
I	$0 = 0$
II	$0 = \frac{bdn}{n-1}\cdot\frac{\pi}{Aa\Phi}$
III	$0 = \frac{bdn}{n-1}\cdot\frac{\pi}{Aa\Phi} + \frac{cdn'}{n'-1}\cdot\frac{\pi'}{ABa\Phi}$
IV	$0 = \frac{bdn}{n-1}\cdot\frac{\pi}{Aa\Phi} + \frac{cdn'}{n'-1}\cdot\frac{\pi'}{ABa\Phi} + \frac{ddn''}{n''-1}\cdot\frac{\pi''}{ABCa\Phi}$

etc.

VI. Pro tollendo margine colorato

sin autem distantia O prodierit negativa, margo coloratus evanescet, si sequentibus aequationibus satisfiat.

Numerus lentium	
I	$0 = 0$
II	$0 = \frac{adn}{n-1}(A+1)B\pi$
III	$0 = \frac{adn}{n-1}(A+1)BC\pi' + \frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{(B+1)C\pi'-(C+1)\pi}{A}$
IV	$0 = \frac{adn}{n-1}(A+1)BCD\pi'' + \frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{(B+1)CD\pi''-(D+1)\pi}{A} + \frac{cdn''}{n''-1}\cdot\frac{(C+1)D\pi''-(D+1)\pi'}{AB}$
V	$0 = \frac{adn}{n-1}(A+1)BCDE\pi''' + \frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{(B+1)CDE\pi'''-(E+1)\pi}{A} + \frac{cdn''}{n''-1}\cdot\frac{(C+1)DE\pi'''-(E+1)\pi'}{AB} + \frac{ddn'''}{n'''-1}\cdot\frac{(D+1)E\pi'''-(E+1)\pi''}{ABC}$

etc.

(IV.) Pro campo apparente

si distantia O fuerit negativa, quo casu oculus lenti ultimae immediate adplicari debet, Φ definietur ex aequationibus sequentibus:

Numerus lentium	
I	$\Phi = \infty$ seu indefinitum
II	$\dfrac{A\mathfrak{B}a\Phi\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} = \omega$
III	$\dfrac{AB\mathfrak{C}a\Phi\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} = \omega$
IV	$\dfrac{ABC\mathfrak{D}a\Phi\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = \omega$
V	$\dfrac{ABCD\mathfrak{E}a\Phi\pi'''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = \omega$
	etc.

V. Pro semidiametro confusionis

habebuntur sequentes expressiones:

Numerus lentium	
I	$\dfrac{mx^3}{4aah} \cdot \dfrac{\mu(A+1)(\lambda(A+1)^2+\nu A)}{A^3}$
II	$\dfrac{mx^3}{4aah}\left\{\dfrac{\mu(A+1)(\lambda(A+1)^2+\nu A)}{A^3} + \dfrac{\mu'(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu' B)}{A^3B^3(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}\Phi\right\}$
III	$\dfrac{mx^3}{4aah}\left\{\begin{aligned}&\dfrac{\mu(A+1)(\lambda(A+1)^2+\nu A)}{A^3} + \dfrac{\mu'(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu' B)}{A^3B^3(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}\Phi\\ &+\dfrac{\mu''(C+1)(\lambda''(C+1)^2+\nu'' C)}{A^3B^3C^3(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}\Phi\end{aligned}\right\}$
IV	$\dfrac{mx^3}{4aah}\left\{\begin{aligned}&\dfrac{\mu(A+1)(\lambda(A+1)^2+\nu A)}{A^3} + \dfrac{\mu'(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu' B)}{A^3B^3(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}\Phi\\ &+\dfrac{\mu''(C+1)(\lambda''(C+1)^2+\nu'' C)}{A^3B^3C^3(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}\Phi + \dfrac{\mu'''(D+1)(\lambda'''(D+1)^2+\nu''' D)}{A^3B^3C^3D^3(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}\Phi\end{aligned}\right\}$
V	$\dfrac{mx^3}{4aah}\left\{\begin{aligned}&\dfrac{\mu(A+1)(\lambda(A+1)^2+\nu A)}{A^3} + \dfrac{\mu'(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu' B)}{A^3B^3(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}\Phi\\ &+\dfrac{\mu''(C+1)(\lambda''(C+1)^2+\nu'' C)}{A^3B^3C^3(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}\Phi + \dfrac{\mu'''(D+1)(\lambda'''(D+1)^2+\nu''' D)}{A^3B^3C^3D^3(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}\Phi\\ &+\dfrac{\mu''''(E+1)(\lambda''''(E+1)^2+\nu'''' E)}{A^3B^3C^3D^3E^3(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}\Phi\end{aligned}\right\}$
	etc.

VI. Pro tollendo margine colorato

si distantia O prodierit positiva, obiectum sine margine colorato apparebit satisfaciendo sequentibus aequationibus:

Numerus lentium	
I	$0 = 0$
II	$0 = \frac{bdn'}{n'-1} \cdot \frac{\pi}{Aa\Phi}$
III	$0 = \frac{bdn'}{n'-1} \cdot \frac{\pi}{Aa\Phi} + \frac{cdn''}{n''-1} \cdot \frac{\pi'}{ABa\Phi}$
IV	$0 = \frac{bdn'}{n'-1} \cdot \frac{\pi}{Aa\Phi} + \frac{cdn''}{n''-1} \cdot \frac{\pi'}{ABa\Phi} + \frac{ddn'''}{n'''-1} \cdot \frac{\pi''}{ABCa\Phi}$

etc.

(VI.) Pro tollendo margine colorato

sin autem distantia O prodierit negativa, margo coloratus evanescet, si sequentibus aequationibus satisfiat:

Numerus lentium	
I	$0 = 0$
II	$0 = \frac{adn}{n-1}(A+1)B\pi$
III	$0 = \frac{adn}{n-1}(A+1)BC\pi' + \frac{bdn'}{n'-1} \frac{(B+1)C\pi' - (C+1)\pi}{A}$
IV	$0 = \frac{adn}{n-1}(A+1)BCD\pi'' + \frac{bdn'}{n'-1} \frac{(B+1)CD\pi'' - (D+1)\pi}{A} + \frac{cdn''}{n''-1} \frac{(C+1)D\pi'' - (D+1)\pi'}{AB}$
V	$0 = \frac{adn}{n-1}(A+1)BCDE\pi''' + \frac{bdn'}{n'-1} \frac{(B+1)CDE\pi''' - (E+1)\pi}{A} + \frac{cdn''}{n''-1} \frac{(C+1)DE\pi''' - (E+1)\pi'}{AB} + \frac{ddn'''}{n'''-1} \frac{(D+1)E\pi''' - (E+1)\pi''}{ABC}$

etc.

VII. Pro tollenda confusione omni

insuper sequentibus aequationibus est satisfaciendum:

Numerus lentium	
I	$0=\frac{adn}{n-1}\cdot\frac{A+1}{A}$
II	$0=\frac{adn}{n-1}\cdot\frac{A+1}{A}+\frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{B+1}{A^2B}$
III	$0=\frac{adn}{n-1}\cdot\frac{A+1}{A}+\frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{B+1}{A^2B}+\frac{cdn''}{n''-1}\cdot\frac{C+1}{A^2B^2C}$
IV	$0=\frac{adn}{n-1}\cdot\frac{A+1}{A}+\frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{B+1}{A^2B}+\frac{cdn''}{n''-1}\cdot\frac{C+1}{A^2B^2C}+\frac{ddn'''}{n'''-1}\cdot\frac{D+1}{A^2B^2C^2D}$

etc.

Distantiae autem lentium et semidiametri aperturarum perinde definiuntur ac supra; tantum notetur insuper formulas pro semidiametro confusionis exhibitas, nisi penitus ad nihilum redigi queant, aequales poni debere formulae $\frac{1}{4x^3}$, existente circiter $x=40$ (§ 193) vel adhuc minore, prout circumstantiae postulaverint.[1])

1) Finis supplementi VII. E. Ch.

SUPPLEMENTUM VIII

DE LENTIBUS OBIECTIVIS PERFECTIS

In Capite III nullas alias lentes obiectivas commemoravimus, nisi quae ex eadem vitri specie et ex principio minimi sunt paratae, neque tales lentes ex diversis vitri speciebus conficere convenit, quoniam eae ad confusionem ex diversa radiorum refrangibilitate oriundam tollendam sunt ineptae. Cum igitur ista confusio aliter tolli nequeat, nisi diversae materiae refringentes adhibeantur, hic accuratius perpendamus, quemadmodum ex diversis mediis diaphanis eiusmodi lentes construi queant, in quibus non solum prior confusio ex apertura lentium sed etiam posterior ex diversa radiorum refrangibilitate oriunda ad nihilum redigi queat, cuiusmodi lentes compositas merito *perfectas* appellare licebit.

I. Primo igitur examinemus, quomodo posteriori confusioni sit occurrendum, quando quotcunque lentes invicem iungantur, ita ut earum distantiae quasi evanescant. Quem in finem considerentur formulae supra [Supplementum VII] datae tam pro margine colorato vitando quam pro confusione penitus tollenda n° VI, VII. At ex aequatione n° VI patet marginem coloratum evanescere, si litterae π, π', π'' etc. sint $= 0$, quod quidem sponte evenit, si lentes immediate coniungantur; quare in genere nullus margo coloratus est metuendus, statim atque intervalla omnia lentium evanescunt.

II. Ut autem aequationibus n° VII satisfiat, pro casu duarum lentium immediate iunctarum habemus

$$0 = \frac{adn}{n-1}\cdot\frac{A+1}{A} + \frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{B+1}{A^2B}, \quad 0 = \frac{adn}{n-1}\cdot\frac{a+\alpha}{\alpha} + \frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{(b+\beta)a^2}{\alpha^2\beta},$$

$$0 = \frac{dn}{n-1}\cdot\frac{a+\alpha}{a\alpha} + \frac{bdn'}{n'-1}\cdot\frac{b+\beta}{\alpha^2\beta}$$

seu ob $\alpha = -b$

$$0 = \frac{dn}{n-1} \cdot \frac{a+\alpha}{a\alpha} + \frac{dn'}{n'-1} \cdot \frac{b+\beta}{b\beta}, \quad 0 = \frac{dn}{n-1} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{dn'}{n'-1} \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right),$$

ubi duo hi coëfficientes denotant reciproca distantiarum focalium primae et secundae lentis.

III. Nunc insuper effici debet, ut prior confusio ab apertura lentium oriunda ad nihilum redigatur; ubi observare debemus hoc casu esse debere $\alpha + b = 0$, $\beta + c = 0$, $\gamma + d = 0$ etc. pro numero lentium, quas coniungere velimus. Unde semidiameter confusionis ex lentibus iunctis ortae evanescet, si reddatur [Supplementum VII, n° V]

$$0 = \frac{\mu(A+1)(\lambda(A+1)^2 + \nu A)}{A^3} - \frac{\mu'(B+1)(\lambda'(B+1)^2 + \nu' B)}{A^3 B^3}$$
$$+ \frac{\mu''(C+1)(\lambda''(C+1)^2 + \nu'' C)}{A^3 B^3 C^3} \quad \text{etc.},$$

quoniam supra iam vidimus fore $\pi = 0$, $\pi' = 0$ etc., atque hinc pro quovis numero lentium invicem iungendarum constructionem lentium perfectarum petere debemus; quas investigationes hic suscipiamus.

DE LENTIBUS PERFECTIS EX DUABUS LENTIBUS COMPOSITIS

Quoniam hoc casu distantiae determinatrices ipsius lentis compositae sunt a et β, statuamus

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} = g\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right)$$

sive

$$\frac{a\alpha}{a+\alpha} = \frac{1}{f} \cdot \frac{a\beta}{a+\beta}, \qquad \frac{b\beta}{b+\beta} = \frac{1}{g} \cdot \frac{a\beta}{a+\beta};$$

unde pro prima conditione implenda sequitur:

$$0 = \frac{dn}{n-1} \cdot f + \frac{dn'}{n'-1} \cdot g.$$

Porro, ob $\frac{1}{\alpha} = \frac{f-1}{a} + \frac{f}{\beta}$ et $\frac{1}{b} = \frac{g}{a} + \frac{g-1}{\beta}$ et $\alpha + b = 0$, erit

$$\frac{f+g-1}{a} + \frac{f+g-1}{\beta} = 0$$

seu

$$f + g = 1.$$

Sit brevitatis gratia

$$\frac{dn}{n-1} = \zeta \quad \text{et} \quad \frac{dn'}{n'-1} = \eta,$$

ut sit

$$\zeta f + \eta g = 0,$$

ex qua aequatione cum altera $f + g = 1$ coniuncta utraque littera f et g determinabitur, ita ut sit

$$f = \frac{\eta}{\eta - \zeta} \quad \text{et} \quad g = -\frac{\zeta}{\eta - \zeta};$$

deinde cum sit

$$A = \frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{\beta(f-1) + af} = \frac{\beta}{af - \beta g} = \frac{(\eta - \zeta)\beta}{a\eta + \beta\zeta}$$

et

$$B = \frac{\beta}{b} = \frac{g\beta + (g-1)a}{a} = \frac{g\beta - fa}{a} = \frac{-\zeta\beta - \eta a}{(\eta - \zeta)a},$$

ergo

$$A + 1 = \frac{\eta(a+\beta)}{a\eta + \beta\zeta} \quad \text{et} \quad B + 1 = \frac{-\zeta(a+\beta)}{a(\eta - \zeta)},$$

unde pro confusione priori tollenda habebimus hanc aequationem

$$0 = \frac{\mu\lambda\eta^3(a+\beta)^3}{(\eta a + \zeta\beta)^3} + \frac{\mu\nu\eta(\eta-\zeta)(a+\beta)\beta}{(\eta a + \zeta\beta)^2} - \frac{\mu'\lambda'\zeta^3(a+\beta)^3}{(\eta a + \zeta\beta)^3} + \frac{\mu'\nu'\zeta(\eta-\zeta)(a+\beta)a}{(\eta a + \zeta b)^2},$$

quae reducitur ad hanc

$$0 = \frac{(a+\beta)^2}{\eta a + \zeta\beta}(\mu\lambda\eta^3 - \mu'\lambda'\zeta^3) + (\eta - \zeta)(\mu\nu\eta\beta + \mu'\nu'\zeta a).$$

Brevius etiam ex § 214 deducitur haec aequatio, cui satisfieri debet $P + Q = 0$ ob $\alpha = -b$, existente pro hoc casu

$$P = \mu f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda f^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \frac{\nu}{a}\left(\frac{f-1}{a} + \frac{f}{\beta}\right)\right)$$

et

$$Q = \mu' g\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda' g^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \frac{\nu'}{\beta}\left(\frac{g}{a} + \frac{g-1}{\beta}\right)\right),$$

ex qua aequatione sive λ sive λ' inveniri potest, dummodo hae litterae non minores prodeant unitate; quamobrem quosdam eiusmodi casus evolvamus et ad praxin accommodemus.

IV. Tria autem mediorum diaphanorum genera hic potissimum contemplabimur, quorum primum sit aqua pluvia, pro qua est $n = \frac{4}{3} = 1{,}3333$, secundum vitrum ordinarium, pro quo est $n = \frac{31}{20} = 1{,}5500$, et tertium vitrum crystallinum, anglice Flint-Glass, pro quo est $n = \frac{8}{5} = 1{,}6000$; factoque calculo invenimus pro litteris graecis inde pendentibus sequentes valores:

	Aqua	Vitrum commune	Vitrum crystallinum
n	$= 1{,}3333$	$= 1{,}5500$	$= 1{,}6000$
ϱ	$= 0{,}8000$	$= 0{,}1907$	$= 0{,}1111$
σ	$= 2{,}2000$	$= 1{,}6274$	$= 1{,}5555$
τ	$= 1{,}2490$	$= 0{,}9051$	$= 0{,}8606$
μ	$= 1{,}9500$	$= 0{,}9381$	$= 0{,}8333$
ν	$= 0{,}1025$	$= 0{,}2326$	$= 0{,}2666$
$\mu\nu$	$= 0{,}1999$	$= 0{,}2184$	$= 0{,}2221.$

V. Quod autem ad valores differentialium dn attinet, optandum esset, ut ii per experimenta accuratissime definirentur; interim tamen duae sequentes hypotheses ex theoria deductae perpendi merentur, quandoquidem NEUTONIANA, ex qua dn ipsi $n-1$ foret proportionale, ad confusionem tollendam esset inepta.[1]) Prima autem hypothesis, quam dudum proposueram[2]), facit dn ipsi $n \cdot \log. n$ proportionale; altera autem ex theoria attractionis deducta dat dn ipsi $\frac{nn-1}{n}$ proportionale; atque hinc valores formulae $\frac{dn}{n-1}$ pro utraque hypothesi evolvamus:

I^ma Hypothesis $dn = n \cdot \log. n$

	Aqua	Vitrum commune	Vitrum crystallinum
dn	0,1665	0,2950	0,3265
$\frac{dn}{n-1}$	0,4995	0,5364	0,5442

1) Vide p. 97. E. Ch.

2) L. EULERI Commentatio 349 (indicis ENESTROEMIANI): *Disquisitio de vera lege refractionis radiorum diversicolorum*, Novi comment. acad. sc. Petrop. 12 (1766/7), 1768, p. 166—194; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series III, vol. 2. E. Ch.

II$^{\text{da}}$ Hypothesis $dn = \frac{nn-1}{n}$

	Aqua	Vitrum commune	Vitrum crystallinum
$\frac{dn}{n-1}$	1,7500	1,6452	1,6250

VI. Verum neutra harum hypothesium cum iis experimentis, quae Celeb. DOLLONDUS[1]) circa prismata instituit, subsistere potest. Usus nempe est duobus prismatibus, quorum alterum ex vitro communi erat paratum angulo refringente existente triginta graduum, alterum autem ex vitro crystallino confectum continebat angulum 19^0; hisque duobus prismatibus inverse iunctis observavit in spectro inde ad parietem proiecto iridis colores nullos adparere; unde conclusit (si n pro ratione refractionis vitri communis, n' vero pro refractione vitri crystallini assumatur) fore $dn : dn' = 2 : 3$, quam rationem vocat rationem dispersionis; quo experimento admisso sequitur

$$\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} = 8 : 11,$$

ita ut pro nostro calculo foret $\zeta = 8$ et $\eta = 11$, quae ratio ab allatis hypothesibus enormiter aberrat. Prima enim dat $\zeta : \eta = 0{,}5364 : 0{,}5442$, hoc est proxime ut $68 : 69$. Altera autem praebet $\zeta : \eta = 1{,}6452 : 1{,}6250$, vel proxime uti $81 : 80$, unde patet hypothesin posteriorem non posse subsistere, quia ex ea sequeretur $\zeta > \eta$; prior vero tantum adhuc discrepat, ut cum experimento neutiquam conciliari possit; ex quo merito ancipites haeremus, quomodo nos in calculo hoc gerere debeamus. Interim experimentum DOLLONDI nonnullis adhuc difficultatibus premi videtur, quas hic ob oculos ponere visum est.

1) JOHN DOLLOND, nat. 10. VI. 1706 — mort. 30. XI. 1761, opticarum rerum gnarus, paene primus constructor telescopii achromatici, anno 1757 scripsit: *An account of some experiments concerning the different refrangibility of light*, Philosophical transactions 1758, atque quatuor alias dissertationes vel epistolas ad telescopia perficienda attinentes, Philosophical transactions 1753—54. E. Ch.

DIGRESSIO DE REFRACTIONE VITRI CRYSTALLINI SECUNDUM EXPERIMENTA DOLLONDI

I. Quo clarius theoriam, cui haec experimenta innituntur, ob oculos ponamus, rem aliquanto generalius, quam DOLLONDUS fecit, consideremus. Repraesentet ergo triangulum ABC (Fig. 17) prisma triangulare ex vitro communi paratum, cuius angulus ad C, quem DOLLONDUS 25° assumit, vocetur $= f$; alterum vero prisma ex vitro crystallino factum DBE ita inverse priori sit applicatum, ut sit angulus $CBD = g$ ipseque angulus huius prismatis $DBE = h$, ubi in experimento examinando erat $g = 0$ et $h = 12°$; tum vero refractio radiorum mediorum in prismate priori sit ut $m : 1$, in posteriori vero ut $n : 1$, ita ut facultates radios dispergendi nobis per differentialia dm et dn repraesententur. Quibus positis DOLLONDUS se observasse affirmat, si radius solis per haec duo prismata transmittatur, spectrum inde in parietem proiectum nullis coloribus inquinari. Unde conclusit fore $dm : dn = 2 : 3$, quam conclusionem accuratius examinemus.

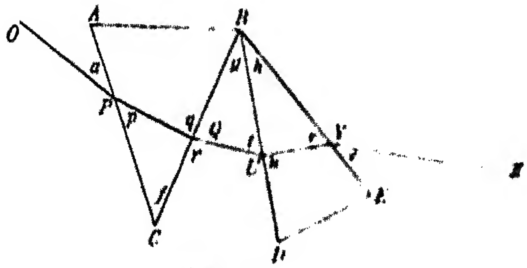

Fig. 17.

II. Hic primum notari convenit angulum, sub quo radius solis OP per faciem prioris prismatis AC immittatur, non definiri, quasi perinde sit, sub quocunque angulo haec immersio fiat, id quod pleniorem expositionem postulat. Ponamus igitur angulum $OPA = a$, qui est complementum anguli incidentiae, et anguli sequentes quavis refractione orti sint p, q, r, t, u, v, e et radius iterum emergens VZ; ex quo statim perspicitur fore $q = p + f$, $r = q + t$ et $u = v + h$; tum vero ex ratione refractionis intelligimus

$$\text{I)}\ \cos a = m \cdot \cos p, \qquad \text{II)}\ \cos r = m \cdot \cos q,$$
$$\text{III)}\ \cos t = n \cdot \cos u, \qquad \text{IV)}\ \cos e = n \cdot \cos v.$$

III. Quia iam hoc transitu nulla colorum dispersio observata esse perhibetur, necesse est, ut in emersione V omnes radii colorati redditi sint inter se paralleli ideoque angulus e constans perinde ac primus angulus a, etiamsi rationes refractionis m et n suis differentialibus dm et dn augeantur; quippe qua mutatione tantum anguli p, q, r, t, u, v fiant variabiles.

IV. Nunc igitur primo hanc angulorum mutationem in primo prismate evolvamus, differentiando scilicet aequationes supra notatas; unde erit $dq = dp$, deinde

$$0 = dm \cdot \cos. p - mdp \cdot \sin. p \quad \text{seu} \quad dp = \frac{dm \cdot \cos. p}{m \cdot \sin. p} = dq;$$

tum vero

$$-dr \cdot \sin. r = dm \cdot \cos. q - mdq \cdot \sin. q$$

seu

$$-dr \cdot \sin. r = dm \cdot \cos. q - \frac{dm \cdot \cos. p \cdot \sin. q}{\sin. p}$$

$$= \frac{dm}{\sin. p}(\cos. q \cdot \sin. p - \cos. p \cdot \sin. q) = \frac{dm \cdot \sin. (p-q)}{\sin. p}$$

hincque tandem

$$dr = \frac{dm \cdot \sin. f}{\sin. p \cdot \sin. r}$$

ob $p - q = -f$.

Simili modo evolvantur refractiones per alterum prisma incipiendo ab angulo constante e, ubi aequatio $\cos. e = n \cdot \cos. v$ dat

$$0 = dn \cdot \cos. v - ndv \cdot \sin. v \quad \text{sive} \quad dv = \frac{dn \cdot \cos. v}{n \cdot \sin. v} = du$$

ob $u = v + h$; deinde vero aequatio $\cos. t = n \cdot \cos. u$ dabit

$$-dt \cdot \sin. t = dn \cdot \cos. u - ndu \cdot \sin. u = dn \cdot \cos. u - \frac{dn \cdot \cos. v \cdot \sin. u}{\sin. v}$$

$$= \frac{dn}{\sin. v}(\cos. u \cdot \sin. v - \cos. v \cdot \sin. u) = \frac{dn}{\sin. v} \cdot \sin. (v - u);$$

ergo ob $u - v = h$ habebitur

$$dt = \frac{dn \cdot \sin. h}{\sin. v \cdot \sin. t}.$$

Cum autem sit $r = g + t$, erit $dr = dt$; ergo

$$\frac{dm \cdot \sin. f}{\sin. p \cdot \sin. r} = \frac{dn \cdot \sin. h}{\sin. v \cdot \sin. t},$$

ex qua aequatione haec relatio inter dm et dn concluditur

$$dm : dn = \frac{\sin. h}{\sin. v \cdot \sin. t} : \frac{\sin. f}{\sin. p \cdot \sin. r} \quad \text{sive} \quad dm : dn = \frac{\sin. p \cdot \sin. r}{\sin. f} : \frac{\sin. v \cdot \sin. t}{\sin. h},$$

quae proportio generaliter locum habet, quoties angulus e prodit constans.

V. Iam hanc conclusionem ad DOLLONDI experimentum adplicemus, et quia ibi est $g=0$ hincque $r=t$, erit ratio inter utramque dispersionem seu $dm:dn$

$$=\frac{\sin. p}{\sin. f}:\frac{\sin. v}{\sin. h}=\frac{CQ}{PQ}:\frac{BU}{VU},$$

ex qua aequatione iam satis clare elucet rationem $\frac{dm}{dn}$ ab angulo incidentiae a neutiquam esse independentem, uti DOLLONDUS supposuisse videtur; ita ut, etsi diffusio colorum pro certo quodam angulo a evanescens sit deprehensa, hanc conclusionem neutiquam ad omnes angulos incidentiae extendere liceat. Quoniam igitur hic angulus a DOLLONDO non est assignatus, ex hoc experimento nihil certi determinari poterit.

VI. Ut autem hic nullum dubium relinquatur, aliquot casus praecipuos pro angulo a calculo evolvamus, ut appareat, quanta diversitas inde in rationem $\frac{dm}{dn}$ ingrediatur, dum tamen plus una vera esse nequit. Quare cum DOLLONDUS invenisset pro utraque vitri specie a se adhibita I. $m=1,53$ et II. $n=1,58$, tum vero angulos $f=30^0$ et $h=19^0$, sequentia exempla hinc expediamus.

EXEMPLUM I

Angulum a ita constitutum concipiamus, ut fiat q angulus rectus ideoque etiam r, t et u recti; erit $\sin. p=\cos. f$ et $\sin. v=\cos. h$, ex quo colligitur $dm:dn=\operatorname{cotang.} f:\operatorname{cotang.} h$ sive $\frac{dm}{dn}=0,59639$, quae iam minor est quam $\frac{2}{3}$.

EXEMPLUM II

Sit $a=90^0$, qui forte est ipse casus DOLLONDI; atque hinc invenientur sequentes anguli: $p=90^0$, $q=120^0$, $r=139^0\,53'=t$, $u=118^0\,57'$, $v=99^0\,57'$, $e=105^0\,50'$. Unde sequitur $\frac{dm}{dn}=\frac{\sin. p\cdot\sin. h}{\sin. f\cdot\sin. v}=0,6615$ ideoque proxime $dm:dn=2:3$, ut habet DOLLONDUS.

Ceterum hinc iam evidens est hanc rationem pendere etiam ab angulo incidentiae, quae tamen in hoc experimento non est commemorata.

Si ergo hanc rationem cum DOLLONDO assumamus, fiet porro

$$\frac{dm}{m-1}:\frac{dn}{n-1}=116:159=7:10,$$

ita ut futurum sit pro lentibus obiectivis duplicatis, quibus DOLLONDUS utitur, $\zeta=7$, $\eta=10$, quarum constructionem hic ex nostris principiis investigemus.

LENS OBIECTIVA CLARISS. DOLLONDI DUPLICATA PRIOR ANTERIORE LENTE EX VITRO COMMUNI POSTERIORE VERO EX VITRO CRYSTALLINO PARATA

I. Cum igitur sit $n = 1{,}53$ et $n' = 1{,}58$, $\zeta = 7$, $\eta = 10$, erit statim

$$f = \frac{\eta}{\eta - \xi} = \frac{10}{3} \quad \text{et} \quad g = \frac{-\xi}{\eta - \xi} = -\frac{7}{3},$$

unde distantiae determinatrices utriusque lentis erunt:

$$\text{Pro prima} \qquad a \text{ et } \alpha = \frac{(\eta - \xi)\, a\beta}{\eta a + \xi\beta}$$

$$\text{pro posteriori} \quad b = \frac{-(\eta - \xi)\, a\beta}{\eta a + \xi\beta} = -\alpha \text{ et } \beta,$$

dum ipsius lentis duplicatae distantiae determinatrices sunt a et β.

Tantum igitur restat, ut pro his binis lentibus numeri arbitrarii λ et λ' definiantur; et quoniam quaestio circa lentes obiectivas versatur, statuamus statim $a = \infty$, ut adhuc resolvi debeat haec aequatio

$$0 = \mu\lambda\eta^3 - \mu'\lambda'\zeta^3 + \eta(\eta - \zeta)\zeta\mu'\nu' \quad \text{seu} \quad \mu'\lambda'\zeta^3 = \mu\lambda\eta^3 + \eta\zeta(\eta - \zeta)\mu'\nu',$$

quae ob $\zeta = 7$ et $\eta = 10$ abit in hanc

$$343\,\mu'\lambda' = 1000\mu\lambda + 210\,\mu'\nu'.$$

II. Ut igitur Dollondum sequamur, pro his valoribus $n = 1{,}53$ et $n' = 1{,}58$ litteras inde derivatas quaerere debemus.

Eruitur autem ex formulis superioribus

$\mu = 0{,}9875$	$\mu' = 0{,}8724$
$l.\ \mu = 9{,}9945449$	$l.\ \mu' = 9{,}9407397$
$\nu = 0{,}2194$	$\nu' = 0{,}2529$
$l.\ \nu = 9{,}3413418$	$l.\ \nu' = 9{,}4030044$
$l.\ \mu\nu = 9{,}3358867$	$l.\ \mu'\nu' = 9{,}3437441.$

Hinc coëfficientes trium terminorum nostrae aequationis computentur:

$l.\ 343 = 2{,}5352941$	$l.\ 1000 = 3{,}0000000$	$l.\ 210 = 2{,}3222193$
$l.\ \mu' = 9{,}9407397$	$l.\ \mu = 9{,}9945449$	$l.\ \mu'\nu' = 9{,}3437441$
$2{,}4760338$	$2{,}9945449$	$1{,}6659634$
Subtrahendo	$2{,}4760338$	$2{,}4760338$
	$0{,}5185111$	$9{,}1899296$
	$3{,}3000$	$0{,}1548$

ita ut sit $\lambda' = 3{,}3000\,\lambda + 0{,}1548$, quare sumto $\lambda = 1$ fit $\lambda' = 3{,}4548$; ergo

$$\lambda' - 1 = 2{,}4548 \quad \text{et} \quad \log. \sqrt{(\lambda' - 1)} = 0{,}1950080.$$

III. Iam ad radios facierum harum lentium definiendos, cum sit

$$a = \infty \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{(\eta - \zeta)\beta}{\eta} \quad \text{et} \quad b = -\frac{(\eta - \zeta)\beta}{\eta},$$

erit pro lente priore

$$\text{radius faciei anterioris} = \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{3\beta}{10\sigma}$$

$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{\alpha}{\varrho} = \frac{3\beta}{10\varrho},$$

pro lente posteriore

$$\text{radius faciei anterioris} = \frac{-3\beta}{10\varrho' - 3\sigma' \pm 7\tau'\sqrt{(\lambda' - 1)}}$$

$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{-3\beta}{10\sigma' - 3\varrho' \mp 7\tau'\sqrt{(\lambda' - 1)}},$$

quare pro duplici refractione $n = 1{,}53$ et $n' = 1{,}58$ valores litterarum ϱ, σ, τ quaeri oportet, qui ita se habebunt:

$n = 1{,}53$	$n' = 1{,}58$
$\varrho = 0{,}2266$	$\varrho' = 0{,}1413$
$\sigma = 1{,}6602$	$\sigma' = 1{,}5827$
$\tau = 0{,}9251$	$\tau' = 0{,}8775.$

IV. Cum igitur β denotet distantiam focalem ipsius lentis duplicatae, quam deinceps littera P indicabimus, pro lente priori ex vitro communi subviridi, cuius refractio est $n = 1{,}53$, reperiemus utramque faciem; erit

$$\text{radius faciei anterioris} = 0{,}1807\,P,$$
$$\text{radius faciei posterioris} = 1{,}3239\,P.$$

Pro altera ex vitro crystallino, cuius refractio $n = 1{,}58$, facies ita erunt comparatae:

$$\text{Radius faciei anterioris} = \frac{-3P}{-3{,}3351 \pm 9{,}6240}$$
$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{-3P}{15{,}4031 \mp 9{,}6240};$$

quia nunc radios curvaturae minores evitari convenit, signorum ambiguorum ea sunt sumenda, quae denominatores minores producunt; id quod fit, si signa superiora valeant; hinc ergo obtinebimus sequentes determinationes:

$$\text{Radius faciei anterioris} = \frac{-3P}{6{,}2889} = -0{,}4770\,P$$
$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{-3P}{5{,}7791} = -0{,}5191\,P,$$

quae lens obiectiva capax est aperturae, cuius semidiameter est $= 0{,}0452\,P$.

LENS OBIECTIVA DUPLICATA ALTERA ANTERIORE LENTE EX VITRO CRYSTALLINO POSTERIORE EX VITRO COMMUNI PARATA

I. Cum igitur hic sit $n = 1{,}58$ et $n' = 1{,}53$, erit $\zeta = 10$ et $\eta = 7$; hinc

$$f = \frac{\eta}{\eta - \zeta} = -\frac{7}{3} \quad \text{et} \quad g = -\frac{\zeta}{\eta - \zeta} = \frac{10}{3};$$

hincque

$$\alpha = \frac{-3a\beta}{7a + 10\beta} = -\frac{3\beta}{7}, \quad \text{ob} \quad a = \infty, \quad \text{et} \quad b = \frac{3\beta}{7}.$$

Confusio autem primi generis ut evanescat, fieri debet

$$0 = 343\mu\lambda - 1000\mu'\lambda' - 210\mu'\nu' \quad \text{seu} \quad 343\mu\lambda = 1000\mu'\lambda' + 210\mu'\nu'.$$

II. Huius aequationis terni coëfficientes iam quaerantur:

$l.\ 343 = 2{,}5352941$	$l.\ 1000 = 3{,}0000000$	$l.\ 210 = 2{,}3222193$
$l.\ \mu = 9{,}9407397$	$l.\ \mu' = 9{,}9945449$	$l.\ \mu'\nu' = 9{,}3358867$
$2{,}4760338$	$2{,}9945449$	$1{,}6581060$
	$2{,}4760338$	$2{,}4760338$
	$0{,}5185111$	$9{,}1820722$
	$3{,}3000$	$0{,}1520$

ita ut sit $\lambda = 3{,}3000\,\lambda' + 0{,}1520$, quare sumto $\lambda' = 1$ fiet $\lambda = 3{,}4520$ ac propterea

$$\lambda - 1 = 2{,}4520 \quad \text{et} \quad \log.\sqrt{(\lambda - 1)} = 0{,}1947603.$$

III. Cum nunc sit

$$a = \infty \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{-3\beta}{7} \quad \text{et} \quad b = \frac{3\beta}{7},$$

erunt radii facierum utriusque lentis: Pro lente priore

$$\text{radius faciei anterioris} = \frac{-3\beta}{7(\sigma \pm \tau\sqrt{(\lambda-1)})}$$

$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{-3\beta}{7(\varrho \mp \tau\sqrt{(\lambda-1)})};$$

pro lente posteriore

$$\text{radius faciei anterioris} = \frac{3\beta}{7\varrho' + 3\sigma'}$$

$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{3\beta}{7\sigma' + 3\varrho'};$$

est autem

$$\varrho = 0{,}1413, \quad \sigma = 1{,}5827, \quad \tau = 0{,}8775, \quad \varrho' = 0{,}2266, \quad \sigma' = 1{,}6602,$$

quibus substitutis erit pro priore lente

$$\text{radius faciei anterioris} = \frac{-3\beta}{11{,}0789 \pm 9{,}6187}$$

$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{-3\beta}{0{,}9891 \mp 9{,}6187};$$

valeant autem ob rationes supra allegatas signa inferiora eritque

$$\text{radius faciei anterioris} = \frac{-3\beta}{1,4602} = -2,0545\,P$$

$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{-3\beta}{10,6078} = -0,2828\,P.$$

Pro lente autem posteriore erit

$$\text{radius faciei anterioris} = \frac{3\beta}{6,5668} = 0,4568\,P$$

$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{3\beta}{12,3012} = 0,2438\,P.$$

Inter quos quatuor radios minimus est $0,2438\,P$, unde haec lens duplicata aperturam admittere potest, cuius semidiameter $= 0,0609\,P$, ita ut haec lens maiorem admittat aperturam quam praecedens.

DE LENTIBUS OBIECTIVIS EX TRIBUS LENTIBUS COMPOSITIS

I. Sit pro prima lente ratio refractionis $= n$, pro secunda $= n'$, pro tertia $= n''$, deinde distantiae determinatrices primae a et α, secundae b et β tertiae c et γ, cum numeris arbitrariis λ, λ', λ'', eritque $\alpha + b = 0$ et $\beta + c = 0$, eruntque a et γ distantiae determinatrices ipsius lentis triplicatae. Iam vero statuatur

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma}\right), \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} = g\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma}\right), \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} = h\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma}\right),$$

fietque

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{f-1}{a} + \frac{f}{\gamma}, \qquad \alpha = \frac{a\gamma}{\gamma(f-1) + af} = -b,$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{g}{a} + \frac{g}{\gamma} + \frac{f-1}{a} + \frac{f}{\gamma}, \qquad \frac{1}{\beta} = \frac{g+f-1}{a} + \frac{g+f}{\gamma} = -\frac{1}{c},$$

ac proinde

$$\frac{-f-g+1}{a} - \frac{f+g-1}{\gamma} = \frac{h}{a} + \frac{h}{\gamma},$$

unde sequitur fore

$$\frac{-f-g-h+1}{a} - \frac{f+g+h-1}{\gamma} = 0,$$

hinc

$$f + g + h = 1.$$

II. Conditio vero confusionem colorum penitus tollens postulat, ut supra vidimus, hanc aequationem

$$0=\frac{dn}{n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{dn'}{n'-1}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{dn''}{n''-1}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}\right),$$

quae ponendo

$$\frac{dn}{n-1}=\zeta,\qquad \frac{dn'}{n'-1}=\eta,\qquad \frac{dn''}{n''-1}=\theta$$

abit in hanc formam

$$0=\zeta f+\eta g+\theta h.$$

III. Ut autem confusio ab apertura pendens destruatur, huic aequationi satifieri debet:

$$0=\frac{\mu(A+1)(\lambda(A+1)^2+\nu A)}{A^3}-\frac{\mu'(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu' B)}{A^3B^3}+\frac{\mu''(C+1)(\lambda''(C+1)^2+\nu'' C)}{A^3B^3C^3},$$

ubi notetur esse

$$\frac{A+1}{A}=af\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)\quad\text{et}\quad\frac{B+1}{B}=bg\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)\quad\text{et}\quad\frac{C+1}{C}=ch\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right);$$

unde termini priores continentes λ erunt

$$a^3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)^3(\mu\lambda f^3+\mu'\lambda' g^3+\mu''\lambda'' h^3),$$

termini vero tres posteriores fiunt

$$a^3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{\mu\nu f}{a\alpha}+\frac{\mu'\nu' g}{b\beta}+\frac{\mu''\nu'' h}{c\gamma}\right),$$

adeoque prodit haec aequatio

$$0=\mu\lambda f^3+\mu'\lambda' g^3+\mu''\lambda'' h^3+\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\gamma}\right)^2}\left(\frac{\mu\nu f}{a\alpha}+\frac{\mu'\nu' g}{b\beta}+\frac{\mu''\nu'' h}{c\gamma}\right),$$

ubi notandum est ex praecedentibus esse

$$\frac{1}{a\alpha}=\frac{1}{a}\left(\frac{f-1}{a}+\frac{f}{\gamma}\right),\qquad \frac{1}{b\beta}=-\left(\frac{f-1}{a}+\frac{f}{\gamma}\right)\left(\frac{g+f-1}{a}+\frac{f+g}{\gamma}\right),$$

$$\frac{1}{c\gamma}=-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{f+g-1}{a}+\frac{f+g}{\gamma}\right).$$

IV. Quodsi nunc ponamus $a = \infty$, sequentes aequationes habebuntur resolvendae:

$$\alpha = \frac{\gamma}{f} \quad \text{et} \quad b = \frac{-\gamma}{f}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{g+f}{\gamma} \quad \text{seu} \quad \beta = \frac{\gamma}{f+g} \quad \text{et} \quad c = \frac{-\gamma}{f+g}.$$

Quibus adiungi debent hae aequationes:

$$f + g + h = 1 \quad \text{et} \quad \zeta f + \eta g + \theta h = 0,$$

et pro omni confusione tollenda, ob

$$\frac{1}{a\alpha} = 0, \quad \frac{1}{b\beta} = \frac{-f(f+g)}{\gamma^2}, \quad \frac{1}{c\gamma} = -\frac{f+g}{\gamma^2},$$

habebitur haec aequatio

$$0 = \mu\lambda f^3 + \mu'\lambda' g^3 + \mu''\lambda'' h^3 - (f+g)(\mu'\nu' fg + \mu''\nu'' h).$$

V. Hic quidem assumsimus omnes tres materias, ex quibus hae lentes sunt confectae, esse diversas; in praxi autem nulla ratio suadet, ut tres diversas vitri species adhibeamus; sed potius primam et tertiam lentem ex eadem materia parari conveniet; ex quo consequimur statim

$$n'' = n, \quad \mu'' = \mu, \quad \nu'' = \nu \quad \text{et} \quad \theta = \zeta,$$

ita ut sit $f + h + \frac{\eta}{\zeta} g = 0$; quae ab altera subtracta dat $g - \frac{\eta}{\zeta} g = 1$ hincque

$$g = \frac{\zeta}{\zeta - \eta};$$

unde porro fit $f + h = -\frac{\eta}{\zeta - \eta}$. Ponamus hunc in finem $f - h = \frac{x}{\zeta - \eta}$, eritque

$$f = \frac{x - \eta}{2(\zeta - \eta)} \quad \text{et} \quad h = \frac{-x - \eta}{2(\zeta - \eta)},$$

ex quibus valoribus prodit

$$\alpha = \frac{2\gamma(\zeta - \eta)}{x - \eta}, \quad b = \frac{-2\gamma(\zeta - \eta)}{x - \eta}, \quad \beta = \frac{2\gamma(\zeta - \eta)}{x + 2\zeta - \eta}, \quad c = \frac{-2\gamma(\zeta - \eta)}{x + 2\zeta - \eta}.$$

VI. Aequatio ergo, cui adhuc satisfieri oportet, erit

$$0 = \frac{1}{4}\mu\lambda(x - \eta)^3 + 2\mu'\lambda'\zeta^3 - \frac{1}{4}\mu\lambda''(x + \eta)^3$$
$$- \frac{1}{2}(x + 2\zeta - \eta)(\mu'\nu'(x - \eta)\zeta - \mu\nu(x + \eta)(\zeta - \eta)),$$

ex qua aequatione vel una litterarum λ vel etiam numerus x definiri quo posteriori casu hoc commodi consequeremur, ut singulae litterae statui possent sicque singulae lentes utpote ex principio minimi facillime construi possent; hanc autem investigationem non aliter exemplis particularibus suscipere licebit.

Ponamus igitur

$$\lambda = 1, \quad \lambda' = 1, \quad \lambda'' = 1,$$

fietque

$$0 = -\frac{1}{2}\mu(3\eta_r x^2 + \eta_r^3) + 2\mu'\zeta^3 - \frac{1}{2}\mu'\nu'\zeta \text{[illegible]}$$
$$+ \frac{1}{2}\mu\nu\zeta \text{[illegible]},$$

quae aequatio reducitur ad hanc

$$x^2(-3\mu\eta - \mu'\nu'\zeta + \mu\nu\zeta \text{[illegible]})$$
$$-\mu\eta_r^3 + 4\mu'\zeta^3 + \mu'\nu'\eta_r\zeta \text{[illegible]} = 0.$$

VII. Adplicemus haec ad illas duas species vitri, quibus Dollond[illegible] est, ac duo casus evolvendi occurrunt. Primus igitur casus esto, qu[illegible] prima quam tertia lens ex vitro crystallino conficitur, media aut[illegible] vitro communi subviridi, ita ut sit $n = n'' = 1,58$ et $n' = 1,53$ ideoque et $\eta = 7$, tum vero $\mu = 0,8724$, $\nu = 0,2529$ et $l.\ \mu\nu = 9,3437441$, $\mu' = 0,9875$, $\nu' = 0,2194$ et $l.\ \mu'\nu' = 9,3358867$, unde superior aequatio re[illegible] ad hanc formam

$$+ 19,8255x^2 - 0,2340x + 4177,6081[1])$$

sive

$$x^2 - 0,0118x + 210,7190,$$

cuius resolutio praebet

$$x = 0,0059 \pm \sqrt{210,7190 - 0,0059} = 14,5161,$$

unde ambo valores ipsius x sunt

$$\text{I.)}\ x = 14,5220, \quad \text{II.)}\ x = -14,5102.$$

1) Accuratius computando assequimur:

$$+ 19,8252x^2 - 0,2382x + 3908,1600,$$

qua aequatione resoluta fit

$$x = +14,046, \quad x = -14,034,$$

quare omnes valores sub n^o VII (p. 257—258) positi essent mutandi. Tamen ista diff[illegible] quoniam est minima, hic neglegi potest. E. Ch.

LENS OBIECTIVA TRIPLICATA PERFECTA PRIOR
CUIUS LENS PRIMA ET TERTIA EX VITRO CRYSTALLINO PRO QUO $n = 1{,}58$
MEDIA VERO EX VITRO COMMUNI SUBVIRIDI $n = 1{,}53$ EST CONFECTA

1. Ob duplicem valorem ipsius x duas etiam eiusmodi lentes exhibere poterimus; sit igitur primo $x = 14{,}5220$, et quia est $\zeta = 10$ et $\eta = 7$, erit

$$f = 1{,}2537, \quad g = 3{,}3333, \quad h = -3{,}5870;$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1{,}2537}{\gamma}, \quad \frac{1}{b} = \frac{-1{,}2537}{\gamma}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{4{,}5870}{\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{1}{c} = \frac{-4{,}5870}{\gamma};$$

quodsi iam harum trium lentium radios facierum anteriorum ponamus F, F', F'', posteriorum vero G, G', G'', ob $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 1$ habebimus:

$$\frac{1}{F} = \frac{\varrho}{a} + \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{1{,}2537 \cdot \sigma}{\gamma}, \quad \frac{1}{G} = \frac{\varrho}{\alpha} + \frac{\sigma}{a} = \frac{\varrho}{\alpha} = \frac{1{,}2537 \cdot \varrho}{\gamma}$$

et

$$\frac{1}{F'} = \frac{\varrho'}{b} + \frac{\sigma'}{\beta}, \quad \frac{1}{G'} = \frac{\varrho'}{\beta} + \frac{\sigma'}{b}$$

et substitutis valoribus

$$\frac{1}{F'} = \frac{-1{,}2537 \cdot \varrho'}{\gamma} + \frac{4{,}5870 \cdot \sigma'}{\gamma}, \quad \frac{1}{G'} = \frac{4{,}5870 \cdot \varrho'}{\gamma} - \frac{1{,}2537 \cdot \sigma'}{\gamma};$$

simili modo pro lente tertia

$$\frac{1}{F''} = \frac{\varrho}{c} + \frac{\sigma}{\gamma}, \quad \frac{1}{G''} = \frac{\varrho}{\gamma} + \frac{\sigma}{c}, \quad \frac{1}{F''} = \frac{-4{,}5870 \cdot \varrho + \sigma}{\gamma}, \quad \frac{1}{G''} = \frac{\varrho - 4{,}5870 \cdot \sigma}{\gamma},$$

existente $\varrho = 0{,}1413$, $\sigma = 1{,}5827$ et $\varrho' = 0{,}2266$, $\sigma' = 1{,}6602$; ac si ipsius lentis triplicatae distantia focalis ponatur $= P$, ut hic sit $\gamma = P$, reperiuntur valores sequentes

$$\frac{1}{F} = \frac{1{,}9843}{P} \quad \text{sive} \quad F = +\,0{,}5039\,P,$$

$$\frac{1}{G} = \frac{0{,}1771}{P} \quad \text{hincque} \quad G = +\,5{,}6450\,P,$$

$$\frac{1}{F'} = \frac{7{,}3312}{P} \quad \text{sive} \quad F' = +\,0{,}1364\,P,$$

$$\frac{1}{G'} = \frac{-1{,}0420}{P} \quad \text{hincque} \quad G' = -\,0{,}9597\,P,$$

$$\frac{1}{F''} = \frac{0{,}9346}{P} \quad \text{hincque} \quad F'' = +\,1{,}0699\,P,$$

$$\frac{1}{G''} = \frac{-7{,}1186}{P} \quad \text{hincque} \quad G'' = -\,0{,}1404\,P.$$

2. Inter hos sex radios cum minimus sit $0{,}1364\,P$, eius pars quarta $= 0{,}0341\,P$ dat semidiametrum maximae aperturae, cuius haec lens triplicata est capax. Contra vero haec lens hac praerogativa gaudet, quod eius constructio ob $\lambda = 1$, $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$ in praxi minimae difficultati sit obnoxia.

ALTERA LENS TRIPLICATA PRO QUA PARITER UT ANTE LENS PRIMA ET TERTIA EX VITRO CRYSTALLINO MEDIA VERO EX VITRO COMMUNI SUBVIRIDI PARATUR

Sumatur iam $x = -14{,}5102$, ob $\zeta = 10$ et $\eta = 7$ erit

$$f = -3{,}5850, \quad g = 3{,}3333, \quad h = 1{,}2517;$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{-3{,}5850}{\gamma}, \quad \frac{1}{b} = \frac{3{,}5850}{\gamma}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{0{,}2517}{\gamma}, \quad \frac{1}{c} = \frac{0{,}2517}{\gamma};$$

unde pro radiis singularum facierum prodibunt sequentes formulae:

$$\frac{1}{F} = \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{-3{,}5850\cdot\sigma}{\gamma}, \qquad \frac{1}{G} = \frac{\varrho}{\alpha} = \frac{-3{,}5850\cdot\varrho}{\gamma},$$

$$\frac{1}{F'} = \frac{\varrho'}{b} + \frac{\sigma'}{\beta} = \frac{3{,}5850\cdot\varrho' - 0{,}2517\cdot\sigma'}{\gamma}, \qquad \frac{1}{G'} = \frac{\varrho'}{\beta} + \frac{\sigma'}{b} = \frac{0{,}2517\cdot\varrho' + 3{,}5850\cdot\sigma'}{\gamma},$$

$$\frac{1}{F''} = \frac{\varrho}{c} + \frac{\sigma}{\gamma} = \frac{0{,}2517\cdot\varrho + \sigma}{\gamma}, \qquad \frac{1}{G''} = \frac{\varrho}{\gamma} + \frac{\sigma}{c} = \frac{\varrho + 0{,}2517\cdot\sigma}{\gamma},$$

unde sequentes valores determinati pro his radiis inveniuntur:

$$\frac{1}{F} = \frac{-5{,}6739}{P} \quad \text{hincque} \quad F = -0{,}1762\,P,$$

$$\frac{1}{G} = \frac{-0{,}5065}{P} \quad \text{hincque} \quad G = -1{,}9741\,P,$$

$$\frac{1}{F'} = \frac{0{,}3945}{P} \quad \text{hincque} \quad F' = +2{,}5349\,P,$$

$$\frac{1}{G'} = \frac{5{,}8948}{P} \quad \text{hincque} \quad G' = +0{,}1696\,P,$$

$$\frac{1}{F''} = \frac{1{,}6182}{P} \quad \text{hincque} \quad F'' = +0{,}6179\,P,$$

$$\frac{1}{G''} = \frac{0{,}5396}{P} \quad \text{hincque} \quad G'' = +1{,}8532\,P,$$

quorum sex radiorum minimus est $0{,}1696\,P$, cuius pars quarta $0{,}0424\,P$ dat semidiametrum aperturae maximae, cuius haec lens triplicata est capax. Ideoque haec lens obiectiva praecedenti est anteferenda.

VIII. Secundum n° VII adhuc alius casus evolvi debet, quo lens prima et tertia ex vitro communi subviridi $n = n'' = 1,53$, media autem ex crystallino $n = 1,58$ parari potest; sicque erit $\zeta = 7$, $\eta = 10$. Unde cum fiat

$$\mu = 0,9875, \quad l.\,\mu\nu = 9,3358867, \quad \mu' = 0,8724, \quad l.\,\mu'\nu' = 9,3437441,$$

aequatio nostra pro confusione tollenda sequentem induet formam:

$$31,8198\,x^2 - 0,1638\,x = 245,2121$$

sive

$$x^2 - 0,0051\,x = 7,7063,$$

cuius resolutio dat

$$x = 0,0025 \pm 2,7760,$$

unde bini valores ipsius x erunt

$$\text{I.)}\quad x = 2,7785, \qquad \text{II.)}\quad x = -2,7735.$$

LENS TRIPLICATA PERFECTA PRIOR CUIUS LENS PRIMA ET TERTIA EX VITRO COMMUNI $n = 1,53$ MEDIA EX CRYSTALLINO $n = 1,58$ EST CONFECTA

Cum igitur sit $x = 2,7785$ et $\zeta = 7$, $\eta = 10$ erit

$$f = 1,2036, \quad g = -2,3333, \quad h = 2,1297$$

hincque

$$\frac{1}{a} = \frac{1,2036}{\gamma}, \quad \frac{1}{b} = \frac{-1,2036}{\gamma}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{-1,1297}{\gamma}, \quad \frac{1}{c} = \frac{1,1297}{\gamma},$$

ex quibus colligitur

$$\frac{1}{F} = \frac{\sigma}{a} = \frac{1,2036\cdot\sigma}{\gamma}, \qquad \frac{1}{G} = \frac{\varrho}{a} = \frac{1,2036\cdot\varrho}{\gamma},$$

$$\frac{1}{F'} = \frac{\varrho'}{b} + \frac{\sigma'}{\beta} = \frac{-1,2036\cdot\varrho' - 1,1297\cdot\sigma'}{\gamma}, \qquad \frac{1}{G'} = \frac{\varrho'}{\beta} + \frac{\sigma'}{b} = \frac{-1,1297\cdot\varrho' - 1,2036\cdot\sigma'}{\gamma},$$

$$\frac{1}{F''} = \frac{\varrho}{c} + \frac{\sigma}{\gamma} = \frac{1,1297\cdot\varrho + \sigma}{\gamma}, \qquad \frac{1}{G''} = \frac{\varrho}{\gamma} + \frac{\sigma}{c} = \frac{1,1297\cdot\sigma + \varrho}{\gamma},$$

ubi

$$\varrho = 0,2266, \quad \sigma = 1,6602, \quad \varrho' = 0,1413, \quad \sigma' = 1,5827.$$

Facto igitur calculo obtinebimus:

$$\frac{1}{F}=\frac{1,9982}{P} \quad \text{hincque} \quad F=+0,5004\,P,$$

$$\frac{1}{G}=\frac{0,2727}{P} \quad \text{hincque} \quad G=+3,6665\,P,$$

$$\frac{1}{F'}=\frac{-1,9580}{P} \quad \text{hincque} \quad F'=-0,5107\,P,$$

$$\frac{1}{G'}=\frac{-2,0645}{P} \quad \text{hincque} \quad G'=-0,4843\,P,$$

$$\frac{1}{F''}=\frac{1,9161}{P} \quad \text{hincque} \quad F''=+0,5219\,P,$$

$$\frac{1}{G''}=\frac{2,1021}{P} \quad \text{hincque} \quad G''=+0,4757\,P,$$

inter quos radios cum minimus sit $0,4757\,P$, eius pars quarta $0,1189\,P$ dat semidiametrum aperturae, quam haec lens admittit; ideoque haec lens duabus praecedentibus est anteferenda.

LENS TRIPLICATA PERFECTA ALTERA CUIUS LENS PRIMA ET TERTIA EX VITRO COMMUNI $n=1,53$ MEDIA EX CRYSTALLINO $n=1,58$ EST PARATA

Sumatur iam ex binis ipsius x valoribus alter negativus $x=-2,7735$; et cum sit $\zeta=7$, $\eta=10$, invenitur

$$f=2,1289, \quad g=-2,3333, \quad h=1,2044$$

hincque

$$\frac{1}{a}=\frac{2,1289}{\gamma}, \quad \frac{1}{b}=\frac{-2,1289}{\gamma}, \quad \frac{1}{\beta}=\frac{-0,2044}{\gamma}, \quad \frac{1}{c}=\frac{0,2044}{\gamma}\text{ [1]},$$

ex quibus consequimur

$$\frac{1}{F}=\frac{\sigma}{\alpha}=\frac{2,1289\cdot\sigma}{\gamma}, \qquad \frac{1}{G}=\frac{\varrho}{\alpha}=\frac{2,1289\cdot\varrho}{\gamma},$$

$$\frac{1}{F'}=\frac{\varrho'}{b}+\frac{\sigma'}{\beta}=\frac{-2,1289\cdot\varrho'-0,2044\cdot\sigma'}{\gamma}, \qquad \frac{1}{G'}=\frac{\varrho'}{\beta}+\frac{\sigma'}{b}=\frac{-0,2044\cdot\varrho'-2,1289\cdot\sigma'}{\gamma},$$

$$\frac{1}{F''}=\frac{\varrho}{c}+\frac{\sigma}{\gamma}=\frac{0,2044\cdot\varrho+\sigma}{\gamma}, \qquad \frac{1}{G''}=\frac{\varrho}{\gamma}+\frac{\sigma}{c}=\frac{0,2044\cdot\sigma+\varrho}{\gamma};$$

1) In editione principe $\frac{1}{\beta}$ et $\frac{1}{c}$ falsos valores $\frac{-0,1044}{\gamma}$ et $\frac{0,1044}{\gamma}$, itaque etiam F', G', F'', G'' falsos valores $-2,1459\,P$, $0,2955\,P$, $0,5938\,P$, $2,5006\,P$ habent. Correxit E. Ch.

unde facto calculo pro radiis facierum singularum lentium sequentes invenientur radii:

$$\frac{1}{F} = \frac{3,5344}{P} \quad \text{seu} \quad F = +0,2829\,P,$$

$$\frac{1}{G} = \frac{0,4824}{P} \quad \text{seu} \quad G = +2,0729\,P,$$

$$\frac{1}{F'} = \frac{-0,6243}{P} \quad \text{seu} \quad F' = -1,6017\,P,$$

$$\frac{1}{G'} = \frac{-3,3983}{P} \quad \text{seu} \quad G' = -0,2943\,P,$$

$$\frac{1}{F''} = \frac{1,7065}{P} \quad \text{seu} \quad F'' = +0,5860\,P,$$

$$\frac{1}{G''} = \frac{0,5659}{P} \quad \text{seu} \quad G'' = +1,7670\,P.$$

Inter quos radios minimus est $0,2829\,P$, cuius pars quarta $0,0707\,P$ dat semidiametrum aperturae maximae, cuius haec lens triplicata est capax.

IX. Hae quatuor lentes triplicatae ideo prae ceteris, quas proponere liceret, sunt commendandae, quod in iis assumsimus $\lambda = 1$, $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$. Quam ob causam in praxi facillime construi possunt; ex iisdem vero principiis etiam constructio eiusmodi lentium compositarum deduci posset, qua inter binas lentes vitreas aqua aliudve fluidum includeretur, ita ut lens media ex fluido constaret: tum autem praeter conditiones ante tractatas duae novae essent implendae, scilicet ut radii facierum mediae lentis aequales essent statuendi et contrarii radiis facierum internarum primae ac tertiae lentis. Ob has igitur novas conditiones non amplius liceret numeros λ, λ' et λ'' unitati aequales assumere, qua positione constructioni practicae quam maxime consulitur; deinde vero etiam radii facierum tam parvi prodirent, ut tales lentes nimis exiguam aperturam essent admissurae; quam ob causam operae pretium haud videtur in earum constructionem accuratius inquirere.

DIOPTRICAE

PARS SECVNDA,

CONTINENS

LIBRVM SECVNDVM,

DE

CONSTRVCTIONE
TELESCOPIORVM
DIOPTRICORVM

CVM

APPENDICE

DE

CONSTRVCTIONE
TELESCOPIORVM CATOPTRICO-DIOPTRICORVM.

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LOND.

PETROPOLI

Impensis Academiae Imperialis Scientiarum

1770.

INDEX CAPITUM

IN TOMO II CONTENTORUM

IN SECTIONE PRIMA

DE TELESCOPIIS PRIMI GENERIS QUAE LENTE OCULARI CONCAVA INSTRUCTA OBIECTA SITU ERECTO REPRAESENTANT

IN SECTIONE SECUNDA

DE TELESCOPIIS SECUNDI GENERIS QUAE LENTE OCULARI CONVEXA INSTRUCTA OBIECTA SITU INVERSO REPRAESENTANT

CAPUT I

DE TELESCOPIIS IN GENERE

DEFINITIO 1

1. *Telescopium est instrumentum dioptricum obiectis valde remotis spectandis inserviens.*

COROLLARIUM 1

2. Cum ergo distantia obiecti sit valde magna, in calculo quantitatem a, qua distantia obiecti a lente obiectiva designatur, tamquam infinitam spectare licet, ideoque a denotabit distantiam focalem lentis obiectivae, neglecta scilicet eius crassitie.

COROLLARIUM 2

3. Cum posuerimus $\alpha = Aa$, ob $a = \infty$ erit numerus A evanescens ideoque et $A = 0$ et $\mathfrak{A} = \frac{A}{A+1} = 0$. Hinc ergo in formulis supra traditis litterae A et $\mathfrak{A}$ ita ex calculo eliminabuntur, ut loco Aa et $\mathfrak{A}a$ scribatur α.

DEFINITIO 2

4. *In telescopiis campus apparens non ex ipsa obiecti conspicui quantitate aestimatur, sed ex angulo, sub quo haec pars conspicua nudo oculo cerneretur.*

COROLLARIUM

5. Littera ergo Φ, quam supra in nostras formulas introduximus, denotabit semidiametrum campi adparentis vel potius eius tangentem; quia autem hic angulus plerumque est valde parvus, is ipse loco tangentis sine errore, praecipue si multiplicatio sit notabilis, usurpatur.

DEFINITIO 3

6. *Multiplicatio in telescopiis ex ratione quantitatis per instrumentum visae ad quantitatem, qua idem obiectum in eadem distantia remotum nudo oculo cerneretur, aestimari solet.*

COROLLARIUM 1

7. Quia ergo supra in genere multiplicationem ad distantiam h retulimus, obiecti vero distantia posita est $= a$, erit quoque $h = a$.

COROLLARIUM 2

8. Exponens ergo multiplicationis $= m$ hoc casu indicat, quoties angulus, sub quo diametrum cuiuspiam obiecti per telescopium cernimus, maior sit angulo, sub quo idem obiectum nudis oculis cerneretur.

SCHOLION 1

9. Hoc scilicet intelligendum est, quamdiu de angulis satis parvis est sermo; quando autem anguli sunt maiores, exponens multiplicationis m declarabit, non quoties ipse angulus, sub quo obiectum quodpiam per telescopium cernitur, sed quoties eius tangens maior sit tangente eius anguli, sub quo idem obiectum nudis oculis esset appariturum, ita ut, etiamsi multiplicatio m foret infinita, tamen angulus visionis non ultra 90° excrescere posset, dum scilicet quantitas obiecti ab axe telescopii aestimatur.

SCHOLION 2

10. His igitur observatis formulae supra erutae facile ad telescopia accommodantur eoque non nihil simpliciores evadunt. Praeterea vero, etsi pro varia oculi constitutione distantia iusta littera l designata sit maxime diversa, tamen hic ista diversitas seponi solet, quia telescopium ad unam oculi speciem accomodatum in praxi facile ad quosvis alios oculos accommodatur, et quia plerumque distantia iusta l satis est magna prae oculi distantia ab ultima lente eaque adeo pro multis oculis in infinitum excrescit, commode statuemus $l = \infty$. Hinc, si ultimae lentis distantiae determinatrices sint f et ζ post eamque locus oculi $= O$, ob $O = \zeta + l$ distantia ζ debebit esse infinita, scilicet $\zeta = O - l$, ita ut sit $\frac{\zeta}{l} = -1$ sive $\frac{l}{\zeta} = -1$, atque ob $\zeta = \infty$ evidens est ultimae lentis distantiam focalem fore $= f$.

PROBLEMA 1

11. *Ex quotcunque lentibus telescopium fuerit compositum, elementa exponere, quibus supra usi sumus ad eius constructionem determinandam, simulque relationem eorum diversorum elementorum inter se repraesentare.*

SOLUTIO

Pro qualibet lente 1° consideravimus eius rationem refractionis pro radiis mediae naturae; 2° eius binas distantias determinatrices cum numero arbitrario λ; 3° nunc etiam cuiusque lentis distantiam focalem in calculum introducemus; 4° etiam introduximus rationes aperturarum pro singulis lentibus littera π indicatas. Quae elementa pro singulis lentibus sequenti modo ob oculos ponamus:

Lentes	Ratio refractionis	Distantiae determinatrices	Numerus arbitrarius	Distantia focalis	Ratio aperturae
I$^{\text{ma}}$	$n\ :1$	$a,\ \alpha$	λ	p	0
II$^{\text{da}}$	$n'\ :1$	$b,\ \beta$	λ'	q	π
III$^{\text{tia}}$	$n''\ :1$	$c,\ \gamma$	λ''	r	π'
IV$^{\text{ta}}$	$n'''\ :1$	$d,\ \delta$	λ'''	s	π''
V$^{\text{ta}}$	$n''''\ :1$	$e,\ \varepsilon$	λ''''	t	π'''
VI$^{\text{ta}}$	$n^{\text{V}}\ :1$	$f,\ \zeta$	λ^{V}	u	π''''

etc.

Deinde etiam posuimus

$$A=\frac{\alpha}{a},\quad B=\frac{\beta}{b},\quad C=\frac{\gamma}{c},\quad D=\frac{\delta}{d},\quad E=\frac{\varepsilon}{e},\quad F=\frac{\zeta}{f}\quad \text{etc.},$$

tum vero etiam

$$\mathfrak{A}=\frac{A}{A+1},\ \mathfrak{B}=\frac{B}{B+1},\ \mathfrak{C}=\frac{C}{C+1},\ \mathfrak{D}=\frac{D}{D+1},\ \mathfrak{E}=\frac{E}{E+1},\ \mathfrak{F}=\frac{F}{F+1}\ \text{etc.}$$

His expositis modo ante vidimus ob $a=\infty$ fore $A=0$ et $\mathfrak{A}=0$, quibus valoribus ita est utendum, ut sit $Aa=\alpha$ et $\mathfrak{A}a=p$ atque $p=\alpha$; pro sequentibus autem lentibus habebimus

$$q=\mathfrak{B}b,\quad r=\mathfrak{C}c,\quad s=\mathfrak{D}d,\quad t=\mathfrak{E}e,\quad u=\mathfrak{F}f\quad \text{etc.},$$

unde vicissim per distantias focales erit

$$b = \frac{q}{\mathfrak{B}} = \frac{B+1}{B}q \quad \text{et} \quad \beta = (B+1)q$$

$$c = \frac{r}{\mathfrak{C}} = \frac{C+1}{C}r \quad \text{et} \quad \gamma = (C+1)r$$

$$d = \frac{s}{\mathfrak{D}} = \frac{D+1}{D}s \quad \text{et} \quad \delta = (D+1)s$$

etc.

Deinde pro rationibus aperturarum habuimus supra sequentes relationes, posita scilicet semidiametro campi apparentis $= \Phi$:

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = \frac{Aa}{b} = \frac{\alpha}{b} \quad \text{seu} \quad \frac{\mathfrak{B}\pi}{\Phi} = \frac{\alpha + b}{b} \quad \text{vel} \quad \frac{\pi}{\Phi} = \frac{\alpha + b}{q}$$

$$\frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = \frac{ABa}{c} = \frac{B\alpha}{c}$$

$$\frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = \frac{ABCa}{d} = \frac{BC\alpha}{d}$$

$$\frac{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = \frac{ABCDa}{e} = \frac{BCD\alpha}{e}$$

etc.

atque hinc vicissim valores sequentes elicuimus:

$$a = \infty \qquad \alpha = p$$

$$b = \frac{p\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} \qquad \beta = \frac{Bp\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$$

$$c = \frac{Bp\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} \qquad \gamma = \frac{BCp\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}$$

$$d = \frac{BCp\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} \qquad \delta = \frac{BCDp\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$$

$$e = \frac{BCDp\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} \qquad \varepsilon = \frac{BCDEp\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$$

etc.

COROLLARIUM 1

12. In superioribus iam satis ostensum est, quomodo ex binis distantiis determinatricibus singulas lentes construi oporteat; quem in finem valores

litterarum ϱ, σ, τ, quibus etiam adiungimus μ et ν, recordari necesse est, qui sunt

$$\varrho + \sigma = \frac{1}{n-1}, \quad \sigma - \varrho = \frac{2n+2}{n+2}, \quad \tau = \frac{n \cdot \sqrt{(4n-1)}}{2(n-1)(n+2)},$$

$$\mu = \frac{n(4n-1)}{8(n-1)^2(n+2)} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{4(n-1)^2}{4n-1}, \quad \mu\nu = \frac{n}{2(n+2)}.$$

COROLLARIUM 2

13. His valoribus pro quavis ratione refractionis cognitis pro distantiis determinatricibus a, α cum numero arbitrario λ facies lentis sequenti modo definientur:

$$\text{Radius faciei anterioris} = \frac{a\alpha}{\varrho\alpha + \sigma a \pm \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}},$$

$$\text{radius faciei posterioris} = \frac{a\alpha}{\varrho a + \sigma\alpha \mp \tau(a+\alpha)\sqrt{(\lambda-1)}},$$

ad quod exemplum omnes reliquae lentes sunt construendae.

COROLLARIUM 3

14. Cum confusio ex tali lente oriunda fiat minima sumto $\lambda = 1$, operae pretium erit investigare, quantum numerum pro λ accipi oporteat, ut ambae lentis facies fiant inter se aequales; reperitur hunc in finem

$$\sqrt{(\lambda-1)} = \frac{a-\alpha}{a+\alpha} \cdot \frac{2(n+1)(n-1)}{n \cdot \sqrt{(4n-1)}}$$

hincque

$$\lambda = 1 + \frac{(a-\alpha)^2}{(a+\alpha)^2} \cdot \frac{4(nn-1)^2}{n^2(4n-1)};$$

cum iam sit

$$\frac{(a-\alpha)^2}{(a+\alpha)^2} = 1 - \frac{4a\alpha}{(a+\alpha)^2},$$

erit

$$\lambda = 1 + \frac{4(nn-1)^2}{n^2(4n-1)} - \frac{16a\alpha(nn-1)^2}{(a+\alpha)^2 n^2(4n-1)};$$

quare, si fuerit vel $a = \infty$ vel $\alpha = \infty$, erit

$$\lambda = 1 + \frac{4(nn-1)^2}{n^2(4n-1)}.$$

SCHOLION

15. Quo nostra investigatio latius pateat, singulis lentibus peculiares refractionis rationes tribuamus, quoniam nunc quidem compertum est diversas vitri species ratione refractionis inter se discrepare, ita tamen, ut valor numeri n intra limites 1,50 et 1,60 contineatur, quamobrem pro praxi consultum erit pro singulis valoribus intra hos limites contentis valores litterarum ϱ, σ, τ, μ, ν et $\mu\nu$ hic exhibere; quem in finem sequentem tabulam hic subiungemus.

n	ϱ	σ	τ	μ	ν	$\mu\nu$
1,50	0,2858	1,7143	0,9583	1,0714	0,2000	0,2143
1,51	0,2653	1,6956	0,9468	1,0420	0,2065	0,2151
1,52	0,2456	1,6776	0,9358	1,0140	0,2129	0,2159
1,53	0,2267	1,6601	0,9252	0,9875	0,2196	0,2168
1,54	0,2083	1,6434	0,9149	0,9622	0,2260	0,2176
1,55	0,1907	1,6274	0,9051	0,9381	0,2326	0,2182
1,56	0,1737	1,6119	0,8956	0,9151	0,2393	0,2192
1,57	0,1573	1,5970	0,8864	0,8932	0,2461	0,2199
1,58	0,1414	1,5827	0,8775	0,8724	0,2529	0,2206
1,59	0,1259	1,5689	0,8689	0,8525	0,2597	0,2214
1,60	0,1111	1,5555	0,8607	0,8333	0,2666	0,2221

Quod vero ad differentialia numerorum n attinet, de iis nihil definio, si quidem experimenta Dollondi veritati sunt consentanea, praeterquam quod, si $n = 1{,}53$ pro vitro coronario, $n' = 1{,}58$ pro crystallino, sit per experimenta

$$dn : dn' = 2 : 3, \quad \frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} = 7 : 10.$$

PROBLEMA 2

16. *Ex quotcunque lentibus telescopium fuerit compositum, definire conditiones, ut singularum lentium intervalla fiant positiva.*

SOLUTIO

Quomodocunque distantiae determinatrices lentium ratione signorum $+$ et $-$ sint adfectae, semper necesse est, ut quantitates $\alpha + b$, $\beta + c$, $\gamma + d$, $\delta + e$

etc., quibus distantiae lentium exprimuntur, fiant positivae; quodsi ergo loco harum litterarum valores ante exhibiti substituantur, sequentibus conditionibus satisfieri oportet:

$$\alpha + b = \frac{\mathfrak{B}\pi p}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} > 0$$

$$\beta + c = \frac{B\Phi p(\mathfrak{C}\pi' - \mathfrak{B}\pi)}{(\mathfrak{B}\pi - \Phi)(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)} > 0$$

$$\gamma + d = \frac{BC\Phi p(\mathfrak{D}\pi'' - \mathfrak{C}\pi')}{(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)} > 0$$

$$\delta + e = \frac{BCD\Phi p(\mathfrak{E}\pi''' - \mathfrak{D}\pi'')}{(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)} > 0$$

etc.;

circa quas distantias observari convenit quasdam earum etiam fieri posse $= 0$, quando scilicet duae pluresve lentes sibi invicem immediate iunguntur, quemadmodum in lentibus obiectivis evenire posse supra vidimus; nunquam autem ulla harum distantiarum fieri debet negativa.

COROLLARIUM 1

17. Hinc manifestum est, si fuerit $\pi = 0$, tum distantiam inter lentem primam et secundam evanescere; ac si praeterea sit $\pi' = 0$, etiam tertia lens praecedentibus immediate iungetur, et quarta lens insuper iis adiungetur, si quoque fuerit $\pi'' = 0$, quod quidem evenit in lentibus obiectivis compositis seu multiplicatis, uti supra iam est ostensum.

COROLLARIUM 2

18. Distantia autem inter lentem primam et secundam fiet maior nihilo, vel tribuendo ipsi π valorem positivum, quoties scilicet fuerit $\frac{\mathfrak{B}p}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$ quantitas positiva, vel tribuendo ipsi π valorem negativum, quoties $\frac{\mathfrak{B}p}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$ fuerit quantitas negativa.

COROLLARIUM 3

19. Quoniam $\alpha = p$ est quantitas positiva, casus notari merentur:

I.) $b = -p$; II.) $b = 0$; III.) $b > 0$.

Primo casu intervallum primum evanescit, ideoque erit vel $\pi = 0$ vel $\mathfrak{B} = 0$,

quod autem fieri nequit, quia foret $B=0$ ideoque $\frac{\beta}{b}=0$ ac propterea $\beta=0$; cuiusmodi autem lens non datur, nisi etiam sit $b=0$; unde in hoc primo casu necessario habebitur $\pi=0$. Secundo casu, quo $b=0$, lens secunda cadet in ipsam imaginem a prima lente proiectam, fietque $\mathfrak{B}\pi-\Phi=\infty$, quia neque p neque Φ esse potest $=0$; unde prodibit pro hoc casu $\mathfrak{B}=\infty$ et $B=-1$, hoc est $\beta=-b=0$, unde patet hoc casu ambas distantias determinatrices secundae lentis evanescere, nihilo vero minus eius distantiam focalem q valorem quemcunque retinere posse, cum sit $q=\mathfrak{B}b$, ob $\mathfrak{B}=\infty$ et $b=0$. Casu denique tertio, quo $b>0$, fieri debet $\mathfrak{B}\pi-\Phi>0$ seu $\mathfrak{B}>\frac{\Phi}{\pi}$.

COROLLARIUM 4

20. Quod hic de casu secundo notavimus, valet quoque de qualibet alia lente, quae in locum imaginis a lente praecedente formatae constituitur; tum enim eius distantiarum determinatricium anterior evanescit, unde et posterior necessario evanescere debet; eveniat enim hoc in lente quarta, cuius distantiae determinatrices sunt d et δ et distantia focalis s, et quia est $\frac{1}{s}=\frac{1}{d}+\frac{1}{\delta}$; si ergo sit $d=0$, necessario quoque fiet $\delta=0$: cum enim sit $\delta=\frac{sd}{d-s}$, posito $d=0$ fiet utique $\delta=0$; tum vero hinc etiam cognoscimus fore $\frac{\delta}{d}=-1=D$, ita ut hoc quoque casu sit $D=-1$ et $\mathfrak{D}=\infty$.

PROBLEMA 3

21. *Si telescopium ex quotcunque lentibus fuerit compositum, definire aperturas singularum lentium, ut omnes radii ab obiecto per lentem obiectivam ingressi simul per omnes lentes sequentes transmittantur.*

SOLUTIO

Hic non obiectum quodcunque est intelligendum, sed tantum, quod per telescopium conspici potest totum, ita ut eius semidiameter apparens conveniat cum semidiametro campi apparentis, quam statuimus $=\Phi$. Quodsi iam lentis obiectivae ponatur semidiameter aperturae $=x$, supra [Liber I, § 341] ostendimus semidiametros aperturae singularum lentium sequentium sequenti modo determinari:

Semidiameter aperturae

lentis II^{dae} $\dfrac{\mathfrak{B}\pi p \pm x}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} \cdot \Phi$

lentis $\mathrm{III}^{\text{tiae}}$ $\dfrac{B\mathfrak{C}\pi' p \pm x}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} \cdot \Phi$

lentis IV^{tae} $\dfrac{BC\mathfrak{D}\pi'' p \pm x}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} \cdot \Phi$

lentis V^{tae} $\dfrac{BCD\mathfrak{E}\pi''' p \pm x}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} \cdot \Phi$

etc.;

singulae hae expressiones constant duabus partibus, et signum ambiguum $\pm$ indicat ambas partes capi debere positivas, etiamsi forte ambae vel saltim alterutra fuerit negativa. Nihil autem impedit, quominus hae aperturae capiantur maiores, etiamsi haec amplificatio omni usu destituatur. Quin etiam sufficit has semidiametros maiori tantum parti, quae plerumque est prior, aequales sumsisse, quia hinc nullum aliud incommodum est metuendum, nisi quod extremitates campi adparentis aliquanto obscurius repraesententur; atque ut lentes tantae aperturae sint capaces, pro litteris π, π', π'', π''' etc. tam exiguas fractiones sumi oportet, uti supra est expositum, veluti $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ vel adhuc minores.

COROLLARIUM 1

22. Priores partes harum formularum multo concinnius exprimi possunt, si distantias focales in calculum introducamus; tum enim eae sequenti modo exprimentur:

$$\pi q, \quad \pi' r, \quad \pi'' s, \quad \pi''' t \quad \text{etc.},$$

quae expressiones immediate ex natura litterarum π, π', π'' etc. supra [Liber I, § 260] exposita sequuntur.

COROLLARIUM 2

23. Hinc etiam alterae partes illarum formularum concinnius exprimi poterunt, cum sit

$$\frac{\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} = \frac{b}{p} = \frac{q}{\mathfrak{B}p} \quad \text{et} \quad \frac{\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} = \frac{r}{B\mathfrak{C}p} \quad \text{et} \quad \frac{\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = \frac{s}{BC\mathfrak{D}p},$$

unde superiores formulae ita repraesentari possunt:

Semidiameter aperturae

lentis $\mathrm{I}^{\mathrm{mae}} = x$

lentis $\mathrm{II}^{\mathrm{dae}} = \pi q \pm \dfrac{qx}{\mathfrak{B}p}$

lentis $\mathrm{III}^{\mathrm{tiae}} = \pi' r \pm \dfrac{rx}{B\mathfrak{C}p}$

lentis $\mathrm{IV}^{\mathrm{tae}} = \pi'' s \pm \dfrac{sx}{BC\mathfrak{D}p}$

lentis $\mathrm{V}^{\mathrm{tae}} = \pi''' t \pm \dfrac{tx}{BCD\mathfrak{E}p}$.

etc.

COROLLARIUM 3

24. Quodsi ergo eveniat, ut litterarum π, π', π'', π''' etc. quaepiam evanescat, tum pro lente respondente semidiameter aperturae soli secundae parti aequalis sumi debet. Aliis vero casibus, quibus pars prima maior est secunda, sufficit aperturam ex sola prima parte definiri.

SCHOLION

25. Casus iste, quo litterarum π, π', π'' etc. quaepiam fit $= 0$, tum habet locum, quando lens respondens in eiusmodi loco collocatur, quem supra [Liber I, § 233] pro idoneo loco oculi assignavimus, in quo scilicet radii ab extremitate obiecti per centrum lentis primae transmissi iterum uspiam cum axe concurrunt. In hoc enim loco lens constituta nulla alia apertura indigebit nisi ea, quae ob aperturam lentis obiectivae requiritur. Quare probe notandum est, quoties quaepiam lens in tali loco collocatur, pro ea valorem ipsius π respondentis fore $= 0$ et vicissim. Quoniam igitur plerumque pars aperturae ab x pendens fit valde parva, huiusmodi lentes commodissime loco diaphragmatum, quae vulgo in telescopiis adplicari solent, usurpari poterunt, ut earum tam exigua apertura radii peregrini excludantur.

PROBLEMA 4

26. *Ex quotcunque lentibus telescopium fuerit compositum, definire rationem multiplicationis m, qua obiecta per id visa aucta conspicientur.*

SOLUTIO

Ex formulis, quas iam supra [Liber I, § 214] pro multiplicatione invenimus, obtinebimus pro singulis lentium numeris sequentes formulas:

Pro numero lentium	Ratio multiplicationis		
I	$m = +1$	ob	$\frac{\alpha}{l} = -1$
II	$m = -\frac{\alpha}{b}$	ob	$\frac{\beta}{l} = -1$
III	$m = +\frac{\alpha\beta}{bc}$	ob	$\frac{\gamma}{l} = -1$
IV	$m = -\frac{\alpha\beta\gamma}{bcd}$	ob	$\frac{\delta}{l} = -1$
V	$m = +\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcde}$	ob	$\frac{\varepsilon}{l} = -1$

etc.;

hic scilicet notandum est, si pro m prodeat valor positivus, obiectum situ erecto, sin autem negativus, situ inverso repraesentatum iri. Vicissim igitur, si velimus, ut telescopium v. gr. centies multiplicet, duo casus sunt evolvendi, alter, quo repraesentatio requiritur erecta, alter, quo inversa; ac priori casu statuimus $m = +100$, posteriori vero $m = -100$, ita ut tunc satis sit perspicuum, quomodo pro quovis lentium numero valores litterarum α, b; β, c; γ, d etc. esse debeant comparati.

COROLLARIUM 1

27. Si litteras latinas maiusculas introducere velimus, erit pro duabus lentibus $m = -\frac{\alpha}{b}$, pro tribus $m = +\frac{\alpha}{c}B$, pro quatuor $m = -\frac{\alpha}{d}BC$, pro quinque $m = +\frac{\alpha}{e}BCD$ etc.

COROLLARIUM 2

28. Cum porro sit $\alpha = p =$ distantiae focali lentis obiectivae et littera latina minuscula in his formulis denotet distantiam focalem lentis ultimae, formulae istae pro multiplicatione concinnius hoc modo repraesentantur:

$$\text{I. } m = +1$$

$$\text{II. } m = -\frac{p}{q}$$

$$\text{III. } m = +\frac{p}{r}B$$

$$\text{IV. } m = -\frac{p}{s}BC$$

$$\text{V. } m = +\frac{p}{t}BCD$$

etc.

SCHOLION

29. In hoc problemate pro casu unius lentis invenimus $m = +1$, quo indicatur obiecta per unicam lentem non aucta, sed naturali quantitate spectari; id quod per se est manifestum, quoniam distantiam oculi iustam l infinitam assumimus; tum enim erit etiam $\alpha = p = \infty$, ideoque haec lens habebit suas facies inter se parallelas, per quam obiecta perinde cernuntur ac nudis oculis; deinde pro casu duarum lentium invenimus $m = \frac{-p}{q}$; quare, cum p sit positivum, si q fuerit negativum, telescopium referet obiecta situ erecto et aucta in ratione $p:q$, seu quoties distantia focalis lentis obiectivae maior fuerit quam distantia focalis lentis ocularis concavae; sin autem lens ocularis quoque fuerit convexa, seu q positivum, obiecta cernentur situ inverso ac toties aucta, quoties q continebitur in p. Tum vero hinc etiam liquet, ob $\alpha = p$ et $b = q$, distantiam inter has duas lentes $\alpha + b$ seu longitudinem telescopii fore aequalem quantitati $p + q$, uti satis constat. At si plures lentes adhibeantur, ratio multiplicationis non amplius per solas distantias focales lentium obiectivae et ocularis determinatur, sed insuper ratio est habenda numerorum B, C, D etc. seu lentium intermediarum.

PROBLEMA 5

30. *Ex quotcunque lentibus telescopium fuerit compositum, definire locum oculi seu eius distantiam post ultimam lentem ocularem.*

SOLUTIO

Hanc distantiam supra [Liber I, § 180, 347—358] littera O indicavimus statimque vidimus pro casu unicae lentis fore $O = 0$.

Pro casu autem duarum lentium invenimus $O=\frac{\mathfrak{B}b\pi}{\pi-\Phi}$, quae ob $\beta=\infty$ hincque $B=\infty$ et $\mathfrak{B}=1$ abit in hanc $O=\frac{b\pi}{\pi-\Phi}$. Cum autem porro sit $b=\frac{p\Phi}{\pi-\Phi}$ ideoque $\pi-\Phi=\frac{p\Phi}{b}$, habebitur $O=\frac{b^2\pi}{p\Phi}=\frac{q^2\pi}{p\Phi}$, et ob $m=-\frac{p}{q}$ seu $p=-mq$ erit $O=-\frac{q\pi}{m\Phi}$, et ob $\frac{\pi}{\Phi}=\frac{p+q}{q}$ habebitur etiam

$$O=-\frac{(p+q)}{m}=+\frac{m-1}{m}q.$$

Pro casu trium lentium ob $\gamma=\infty$ ideoque $C=\infty$ et $\mathfrak{C}=1$ habebimus $O=\frac{c\pi'}{\pi'-\pi+\Phi}$; est vero $c=r=\frac{Bp\Phi}{\pi'-\pi+\Phi}$ et $m=\frac{p}{r}B$ atque hinc $pB=mr$ adeoque $c=\frac{mr\Phi}{\pi'-\pi+\Phi}$; unde erit $O=\frac{\pi'}{m\Phi}r$.

Pro casu quatuor lentium ob $\delta=\infty$ ideoque $D=\infty$ et $\mathfrak{D}=1$ invenimus $O=\frac{d\pi''}{\pi''-\pi'+\pi-\Phi}$; at est $d=s=\frac{BCp\Phi}{\pi''-\pi'+\pi-\Phi}=\frac{-ms\Phi}{\pi''-\pi'+\pi-\Phi}$ hincque $\pi''-\pi'+\pi-\Phi=-m\Phi$ adeoque $O=-\frac{\pi''}{m\Phi}s$.

Quo haec ad plures lentes accommodari queant, tabulam sequentem subiungam:

Numerus lentium	Locus oculi
I	$O=0$
II	$O=\frac{b\pi}{\pi-\Phi}=-\frac{\pi}{m\Phi}q$
III	$O=\frac{c\pi'}{\pi'-\pi+\Phi}=\frac{\pi'}{m\Phi}r$
IV	$O=\frac{d\pi''}{\pi''-\pi'+\pi-\Phi}=-\frac{\pi''}{m\Phi}s$
V	$O=\frac{e\pi'''}{\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}=\frac{\pi'''}{m\Phi}t$

etc.

COROLLARIUM 1

31. Ex superioribus hic repeti conveniet, si valor
sitivus, tum pro oculo locum idoneum inveniri, ex quo t
conspici queat, sin autem pro O prodeat valor negativ
ultimae immediate adplicari debere hocque casu cam
aperturam pupillae determinari.

Pro casu duarum lentium ob $\mathfrak{B} = 1$ et $b = q$ erit primo $\pi q = \omega$, deinde $\Phi = \frac{\pi\omega}{\pi p + \omega}$, quae expressio ob $\pi = \frac{\omega}{q}$ abit in hanc

$$\Phi = \frac{\omega}{p+q} = \frac{-\omega}{(m-1)q} = \frac{-\pi}{m-1}$$

ob $p = -mq$, quae expressio, quia hoc casu q negativum valorem obtinet, per se fit positiva.

Pro casu trium lentium primo ob $\mathfrak{C} = 1$ et $c = r$ erit $\pi' r = \omega$; tum vero fit $\frac{Bp\Phi\pi'}{\pi' - \pi + \Phi} = \omega$ seu $\frac{mr\Phi\pi'}{\pi' - \pi + \Phi} = \omega$, unde invenitur

$$\Phi = \frac{(\pi' - \pi)\omega}{mr\pi' - \omega} = \frac{(\pi' - \pi)\omega}{(m-1)\pi' r} = \frac{\pi' - \pi}{m-1}.$$

Pro casu quatuor lentium ob $\mathfrak{D} = 1$ et $d = s$ erit primo $\pi'' s = \omega$, tum vero $\frac{BCp\pi''\Phi}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = \omega = \frac{ms\pi''\Phi}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$, unde invenitur

$$\Phi = \frac{(\pi'' - \pi' + \pi)\omega}{\omega - ms\pi''} = \frac{-(\pi'' - \pi' + \pi)\omega}{(m-1)\pi'' s} = \frac{-\pi'' + \pi' - \pi}{m-1}.$$

Quas determinationes in sequenti tabula repraesentemus:

Pro numero lentium	erit	et pro campo apparente
II	$\pi = \frac{\omega}{q}$	$\Phi = \frac{-\omega}{(m-1)q} = \frac{-\pi}{m-1}$
III	$\pi' = \frac{\omega}{r}$	$\Phi = \frac{-(\pi - \pi')\omega}{(m-1)\pi' r} = \frac{-\pi + \pi'}{m-1}$
IV	$\pi'' = \frac{\omega}{s}$	$\Phi = \frac{-(\pi - \pi' + \pi'')\omega}{(m-1)\pi'' s} = \frac{-\pi + \pi' - \pi''}{m-1}$
V	$\pi''' = \frac{\omega}{t}$	$\Phi = \frac{-(\pi - \pi' + \pi'' - \pi''')\omega}{(m-1)\pi''' t} = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m-1}$

etc.

COROLLARIUM 1

38. Hinc patet formulas pro semidiametro campi apparentis Φ non discrepare a casu praecedente; verum autem discrimen in hoc consistit, quod casu praecedente ultima litterarum π, π', π'' etc. ab arbitrio nostro pendebat, dummodo intra limitem praescriptum $\frac{1}{4}$ vel $\frac{1}{5}$ contineretur, hic autem ea a constitutione pupillae determinari debeat.

COROLLARIUM 2

39. Eatenus ergo hoc casu campus apparens minor fit quam casu praecedente, quatenus litterarum π, π', π'' etc. ultimae minor valor tribui debet, id quod fit, si fractiones $\frac{\infty}{q}$, $\frac{\infty}{r}$, $\frac{\infty}{s}$ etc. minores fuerint quam limes ille $\frac{1}{4}$ vel $\frac{1}{5}$. Sin autem huic limiti prodierint aequales, utroque casu idem habebitur campus apparens.

COROLLARIUM 3

40. Hinc autem concludere non licet, si istae fractiones $\frac{\infty}{q}$, $\frac{\infty}{r}$, $\frac{\infty}{s}$ etc. maiores fiant limite praescripto, tum hoc posteriori casu campum adeo maiorem visum iri, propterea quod ipsa lentis postremae natura non permittit maiorem valorem litterae respondentis π. Atque ob hanc causam nequidem convenit tam exiguas lentes oculares admittere, ut valor ultimae litterae π limitem $\frac{1}{4}$ vel $\frac{1}{5}$ superans prodeat, quia tum ipsa huius lentis apertura minor capi deberet quam pupilla.

SCHOLION

41. Nihil autem obstat, quominus lenti oculari apertura maior tribuatur quam pupillae, quandoquidem inde nullum aliud incommodum esset metuendum, nisi quod non omnes radii per hanc lentem transmissi in oculum ingrederentur; quod autem tantum abest, ut sit incommodum, ut potius insigne lucrum inde obtineri possit; tum enim pupilla successive per totam lentis aperturam vagari poterit, quo id commodi consequemur, ut successive alias atque alias obiecti partes conspiciamus. Id quod in telescopiis ad praecedentem casum pertinentibus locum habere nequit. Determinatio igitur ultimae litterarum π, π', π'' etc. in problemate exhibita ei tantum fini inservit, ut inde magnitudo campi uno obtutu visi rite definiatur, cum adeo insigne lucrum exspectari queat, si lenti oculari multo maior apertura tribui queat; ex quo iam ratio multo clarius perspicitur, cur lentes oculares nimis parvas evitari conveniat.

PROBLEMA 8

42. *Si telescopium ex quotcunque lentibus fuerit compositum atque adeo singulae lentes ex diversis vitri speciebus sint formatae, definire semidiametrum confusionis, qua repraesentatio obiectorum erit inquinata.*

SOLUTIO

Iam in limine huius capitis cuilibet lenti peculiarem refractionis rationem tribuimus huncque in finem litteras n, n', n'', n''' etc. in calculum introduximus. Quare tantum opus est, ut formulas in additamento paenultimo I$^{\text{mae}}$ partis inventas [p. 238] ad casum telescopiorum, quo fit $a=\infty$, $h=a$ hincque $A=0$ et $Aa=\alpha=p$, transferamus; ad quod efficiendum ex denominatoribus singulorum membrorum factor A^3 cum factore communi coniungatur, ut fiat in eius denominatore $A^3\cdot aah=\alpha^3=p^3$. Quo facto pro quolibet lentium numero semidiameter confusionis sequenti formula exprimetur:

$$\frac{mx^3}{4p^3}\left\{\begin{array}{l}\mu\lambda+\dfrac{\mu'(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu'B)\Phi}{B^3(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}+\dfrac{\mu''(C+1)(\lambda''(C+1)^2+\nu''C)\Phi}{B^3C^3(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}\\ +\dfrac{\mu'''(D+1)(\lambda'''(D+1)^2+\nu'''D)\Phi}{B^3C^3D^3(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}\quad\text{etc.}\end{array}\right\}$$

quae, si singula membra in duas partes discerpantur, commodius exprimi poterit ob valores $\frac{B}{B+1}=\mathfrak{B}$, $\frac{C}{C+1}=\mathfrak{C}$ etc. Erit scilicet haec expressio:

$$\frac{mx^3}{4p^3}\left\{\begin{array}{l}\mu\lambda+\dfrac{\mu'\Phi}{\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\pi-\Phi)}\left(\dfrac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2}+\dfrac{\nu'}{B}\right)+\dfrac{\mu''\Phi}{B^3\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}\left(\dfrac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2}+\dfrac{\nu''}{C}\right)\\ +\dfrac{\mu'''\Phi}{B^3C^3\cdot\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi)}\left(\dfrac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^2}+\dfrac{\nu'''}{D}\right)\ \text{etc.}\end{array}\right\}$$

quae porro formulis § 23 in subsidium vocatis ad hanc formam redigitur:

$$\frac{mx^3}{4p^3}\left\{\mu\lambda+\frac{\mu'q}{\mathfrak{B}^2p}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2}+\frac{\nu'}{B}\right)+\frac{\mu''r}{B^4\mathfrak{C}^2p}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2}+\frac{\nu''}{C}\right)+\frac{\mu'''s}{B^4C^4\mathfrak{D}^2p}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^2}+\frac{\nu'''}{D}\right)\ \text{etc.}\right\}$$

atque hinc pro quovis lentium numero semidiameter confusionis sequenti modo exprimetur:

Pro duabus lentibus ob $B=\infty$, $b=q$, $\mathfrak{B}=1$ erit semidiameter confusionis $=\frac{mx^3}{4p^3}\left(\mu\lambda+\frac{\mu'\lambda'q}{p}\right)$, quae forma ob $p=-mq$ reducitur ad hanc:

$$\frac{mx^3}{4p^3}\left(\mu\lambda-\frac{\mu'\lambda'}{m}\right).$$

Pro tribus lentibus ob $C=\infty$ et $\mathfrak{C}=1$ et $Bp=mr$ erit semidiameter confusionis

$$=\frac{mx^3}{4p^3}\left\{\mu\lambda+\frac{\mu'q}{\mathfrak{B}^2p}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2}+\frac{\nu'}{B}\right)+\frac{\mu''\lambda''}{B^3m}\right\}.$$

Pro quatuor lentibus ob $D = \infty$ et $\mathfrak{D} = 1$ et $BCp = -ms$ erit semidiameter confusionis

$$= \frac{mx^3}{4p^3}\left\{\mu\lambda + \frac{\mu' q}{\mathfrak{B}^2 p}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu'}{B}\right) + \frac{\mu'' r}{B^4 \mathfrak{C}^2 p}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2} + \frac{\nu''}{C}\right) - \frac{\mu''' \lambda'''}{B^3 C^3 m}\right\}.$$

Pro quinque lentibus ob $E = \infty$ et $\mathfrak{E} = 1$ et $BCDp = mt$ erit semidiameter confusionis

$$= \frac{mx^3}{4p^3}\left\{\begin{array}{l} \mu\lambda + \dfrac{\mu' q}{\mathfrak{B}^2 p}\left(\dfrac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \dfrac{\nu'}{B}\right) + \dfrac{\mu'' r}{B^4 \mathfrak{C}^2 p}\left(\dfrac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2} + \dfrac{\nu''}{C}\right) \\ \quad + \dfrac{\mu''' s}{B^4 C^4 \mathfrak{D}^2 p}\left(\dfrac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^2} + \dfrac{\nu'''}{D}\right) + \dfrac{\mu'''' \lambda''''}{B^3 C^3 D^3 m} \end{array}\right\}$$

etc.

COROLLARIUM 1

43. His igitur formulis semidiameter confusionis per numerum seu fractionem quandam numericam expressa reperitur, quae fractio in gradus, minuta et secunda conversa indicabit, sub quanto angulo singula obiectorum puncta per telescopium conspiciantur, quippe in quo effectus confusionis existit.

COROLLARIUM 2

44. Ne igitur haec confusio fiat intolerabilis, necesse est, ut semidiameter confusionis infra certum limitem subsistat; pro quo limite supra hanc formulam constituimus $\frac{1}{4k^3}$, existente $k = 40$ vel $k = 30$ circiter.

COROLLARIUM 3

45. Quodsi ergo in genere numeros in clausulis contentos ponamus $= N$, efficiendum est, ut $\frac{mx^3}{4p^3} \cdot N$ non excedat limitem $\frac{1}{4k^3}$, ex quo statui debebit $\frac{mx^3}{p^3} \cdot N = \frac{1}{k^3}$, unde quantitas p seu distantia focalis lentis obiectivae determinatur; fiet scilicet $p = k \cdot x \cdot \sqrt[3]{mN}$.

COROLLARIUM 4

46. Si porro gradus claritatis littera y indicetur, ut supra fecimus, ubi vidimus capi debere $x = m \cdot y$ et vulgo statui $y = \frac{1}{50}$ dig., unde satis notabilis

gradus claritatis oritur, aequatio modo inventa erit $p = m \cdot ky \cdot \sqrt[3]{mN}$; unde patet ceteris paribus distantiam focalem lentis obiectivae p sequi rationem sesquitriplicatam multiplicationis m, ubi notandum, quia $y = \frac{1}{30}$ dig. et $k = 40$, fore propemodum $ky = \frac{4}{5}$ dig. seu quasi 1 dig. plus vel minus secundum circumstantias.

SCHOLION 1

47. Ne quem offendat, quod ex hac aequatione valorem ipsius p definivimus, cum tamen haec quantitas iam insit in numero N, notandum est hic non tam ipsam quantitatem p quam eius rationem ad reliquas distantias focales q, r, s etc. in numerum N ingredi; quae rationes cum aliunde ut iam cognitae spectari possint, nostra aequatio utique est idonea, ex qua valor absolutus ipsius p determinetur, id quod fit ex quantitate x, quae in digitis expressa habetur, cum sit $x = my$ et y in partibus digiti detur seu capiatur $y = \frac{1}{50}$ dig. sive maior sive minor, prout maior vel minor claritatis gradus desideratur.

SCHOLION 2

48. Cum maxime sit optandum, ut haec confusio penitus ad nihilum redigatur fiatque $N = 0$, si hoc successerit, ostendendum adhuc est, quomodo hinc distantia focalis lentis obiectivae p definiri debeat, siquidem pro casu $N = 0$ nostra aequatio daret $p = 0$; quod cum fieri nequeat, ad eius aperturam seu quantitatem x est respiciendum; quae quia ex gradu claritatis y cum multiplicatione m coniuncto est data, huic lenti necessario tantam distantiam focalem p tribui oportet, ut lens tantae aperturae fiat capax; ad minimum scilicet debet esse $p > 5x$ atque interdum adhuc maius, prout lentis facies magis prodeunt incurvatae. In genere autem observandum est nihil impedire, quominus maior statuatur quantitas p, dummodo non fiat minor.

PROBLEMA 9

49. *Si telescopium quotcunque lentibus constet oculique distantia post ultimam lentem inventa fuerit positiva, definire lentium dispositionem, ut obiecta sine margine colorato conspiciantur.*

SOLUTIO

Quoniam huic conditioni iam supra generatim satisfecimus, aequationem ibi inventam ad casum praesentem telescopiorum accommodemus ac videbimus scopum obtineri, si huic aequationi satisfieri possit:

$$0=\frac{b\,dn'}{n'-1}\cdot\frac{\pi}{p\Phi}+\frac{c\,dn''}{n''-1}\cdot\frac{\pi'}{Bp\Phi}+\frac{d\,dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{\pi''}{BCp\Phi}\ \text{etc.},$$

quam ad singulos lentium numeros applicemus.

Pro duabus lentibus ob $b=q$ erit

$$0=\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{\pi q}{\Phi p}=-\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{\pi}{m\Phi}.$$

Pro tribus lentibus ob $c=r$ et $Bp=mr$ erit

$$0=\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{\pi b}{\Phi p}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{\pi' r}{B\Phi p}$$

sive

$$0=\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{\pi b}{\Phi p}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{\pi'}{m\Phi}.$$

Pro quatuor lentibus ob $d=s$ et $BCp=-ms$ erit

$$0=\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{\pi b}{\Phi p}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{\pi' c}{B\Phi p}-\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{\pi''}{m\Phi}.$$

Pro quinque lentibus ob $e=t$ et $BCDp=mt$ erit

$$0=\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{\pi b}{\Phi p}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{\pi' c}{B\Phi p}+\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{\pi'' d}{BC\Phi p}+\frac{dn''''}{n''''-1}\cdot\frac{\pi'''}{m\Phi}.$$

COROLLARIUM 1

50. Cum pro casu duarum lentium sit $\frac{-\pi}{\Phi}=m-1$, habeb
equatio $0=\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{m-1}{m}$; quod cum fieri non possit, ma
x duabus lentibus composita a vitio marginis colorat

COROLLARIUM 2

51. Si omnes lentes ex eadem vitri specie sint factae, aequationes nostras per factores differentiales dividere licebit, indeque eaedem formulae reperiuntur, quae pro hoc casu supra sunt datae.

PROBLEMA 10

52. *Si telescopium quotcunque constet lentibus oculique distantia post ultimam lentem inventa fuerit negativa, definire lentium dispositionem, ut obiecta sine margine colorato conspiciantur.*

SOLUTIO

Ex superioribus pro quovis lentium numero sequentibus aequationibus erit satisfaciendum:

Pro duabus lentibus, si superior aequatio per A multiplicetur, habebitur

$$0 = \frac{dn}{n-1} \cdot B\pi p,$$

quod ob $B = \infty$ fieri nequit.

Pro tribus lentibus multiplicando per A habebitur ob $C = \infty$

$$0 = \frac{dn}{n-1} \cdot B\pi' p + \frac{dn'}{n'-1} \cdot b((B+1)\pi' - \pi).$$

Pro quatuor lentibus ob $D = \infty$ habebitur

$$0 = \frac{dn}{n-1} \cdot BC\pi'' p + \frac{dn'}{n'-1} \cdot b((B+1)C\pi'' - \pi) + \frac{dn''}{n''-1} \cdot c\left(\frac{(C+1)\pi'' - \pi'}{B}\right).$$

Pro quinque lentibus ob $E = \infty$

$$0 = \frac{dn}{n-1} \cdot BCD\pi''' p + \frac{dn'}{n'-1} \cdot b((B+1)CD\pi''' - \pi) + \frac{dn''}{n''-1} \cdot c\left(\frac{(C+1)D\pi''' - \pi'}{B}\right)$$
$$+ \frac{dn'''}{n'''-1} \cdot d\left(\frac{(D+1)\pi''' - \pi''}{BC}\right).$$

PROBLEMA 11

53. *Si telescopium ex quotcunque lentibus sit compositum, eam definire lentium dispositionem, ut omnis confusio a diversa radiorum refrangibilitate oriunda penitus tollatur.*

SOLUTIO

Ex supra traditis pro omni lentium numero aequationem exhibere possumus, quae scopo proposito satisfiet; multiplicando enim per A^2 habebitur

$$0=\frac{dn}{n-1}\cdot a+\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{b}{\mathfrak{B}}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{c}{\mathfrak{C}B^2}+\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{d}{\mathfrak{D}B^2C^2}+\frac{dn''''}{n''''-1}\cdot\frac{e}{\mathfrak{E}B^2C^2D^2}$$
etc.,

quae ob $a=p$, $b=\frac{q}{\mathfrak{B}}$, $c=\frac{r}{\mathfrak{C}}$, $d=\frac{s}{\mathfrak{D}}$ etc. abit in hanc:

$$0=\frac{dn}{n-1}\cdot p+\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{q}{\mathfrak{B}^2}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{r}{B^2\mathfrak{C}^2}+\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{s}{B^2C^2\mathfrak{D}^2}+\frac{dn''''}{n''''-1}\cdot\frac{t}{B^2C^2D^2\mathfrak{E}^2}$$
etc.

Hinc ergo pro singulis lentium numeris nanciscimur sequentes aequationes adimplendas:

Pro duabus lentibus ob $\mathfrak{B}=1$

$$0=\frac{dn}{n-1}\cdot p+\frac{dn'}{n'-1}\cdot q.$$

Pro tribus lentibus ob $\mathfrak{C}=1$

$$0=\frac{dn}{n-1}\cdot p+\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{q}{\mathfrak{B}^2}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{r}{B^2}.$$

Pro quatuor lentibus ob $\mathfrak{D}=1$

$$0=\frac{dn}{n-1}\cdot p+\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{q}{\mathfrak{B}^2}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{r}{B^2\mathfrak{C}^2}+\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{s}{B^2C^2}.$$

Pro quinque lentibus ob $\mathfrak{E}=1$

$$0=\frac{dn}{n-1}\cdot p+\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{q}{\mathfrak{B}^2}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{r}{B^2\mathfrak{C}^2}+\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{s}{B^2C^2\mathfrak{D}^2}+\frac{dn''''}{n''''-1}\cdot\frac{t}{B^2C^2D^2}.$$

COROLLARIUM 1

54. Cum sit $\mathfrak{B}=\frac{q}{b}$, $\mathfrak{C}=\frac{r}{c}$, $\mathfrak{D}=\frac{s}{d}$ etc., tum vero $B=\frac{\beta}{b}$, $C=\frac{\gamma}{c}$, $D=\frac{\delta}{d}$ etc., aequatio generalis per pp seu $\alpha\alpha$ divisa abibit in sequentem formam:

$$0=\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{1}{p}+\frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{bb}{\alpha\alpha}\cdot\frac{1}{q}+\frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{bb\cdot cc}{\alpha\alpha\cdot\beta\beta}\cdot\frac{1}{r}+\frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{bb\cdot cc\cdot dd}{\alpha\alpha\cdot\beta\beta\cdot\gamma\gamma}\cdot\frac{1}{s}$$
$$+\frac{dn''''}{n''''-1}\cdot\frac{bb\cdot cc\cdot dd\cdot ee}{\alpha\alpha\cdot\beta\beta\cdot\gamma\gamma\cdot\delta\delta}\cdot\frac{1}{t}\text{ etc.},$$

quae aequatio commodior videtur praecedente.

COROLLARIUM 2

55. Quod ad numerum horum terminorum attinet, perspicuum est eum esse numero lentium aequalem, neque igitur opus est, ut hanc formulam seorsim ad quemlibet lentium numerum accommodemus.

COROLLARIUM 3

56. Si omnes lentes ex eadem vitri specie essent confectae, tum haec aequatio per coëfficientes differentiales dividi posset prodiretque

$$0=\frac{1}{p}+\frac{b^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{q}+\frac{b^2c^2}{\alpha^2\beta^2}\cdot\frac{1}{r}+\frac{b^2c^2d^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\cdot\frac{1}{s}\text{ etc.},$$

cui autem nullo modo satisfieri potest.

SCHOLION 1

57. Quod haec aequatio, quando omnes lentes ex eadem vitri specie sunt paratae, nullo modo subsistere queat, sequenti modo ostendi potest. Cum sit

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{\alpha},\quad \frac{1}{q}=\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta},\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma},\quad \frac{1}{s}=\frac{1}{d}+\frac{1}{\delta},$$

si hi valores substituantur singulaque membra post primum in duas partes discerpantur, aequatio induet hanc formam:

$$0=\frac{1}{\alpha}+\frac{b}{\alpha^2}+\frac{b^2c}{\alpha^2\beta^2}+\frac{b^2c^2d}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}+\frac{b^2}{\alpha^2\beta}+\frac{b^2c^2}{\alpha^2\beta^2\gamma}+\frac{b^2c^2d^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta}\text{ etc.},$$

hic iam iungantur iterum bini termini, et aequatio prodiens ita erit comparata:

$$0 = \frac{\alpha + b}{\alpha^2} + \frac{b^2(\beta + c)}{\alpha^2 \beta^2} + \frac{b^2 c^2 (\gamma + d)}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2} + \frac{b^2 c^2 d^2}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \delta};$$

quia nunc $\alpha + b$, $\beta + c$, $\gamma + d$ ut lentium distantiae necessario sunt positivae, omnes plane termini usque ad ultimum necessario positivi sunt; ultimus autem terminus $\frac{b^2 c^2 d^2}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \delta}$ ob $\delta = \infty$ per se evanescit, scilicet pro casu quatuor lentium, quem hic consideravimus.

SCHOLION 2

58. His igitur praeparatis iam possemus ad diversa genera telescopiorum constituenda progredi singularumque specierum constructionem docere. Sed quoniam ea, quae supra de lentibus multiplicatis sunt tradita, maximum usum in perficiendis telescopiis habere possunt, dum scilicet loco lentium simplicium multiplicatae adhibentur, quae multo minorem confusionem pariant, consultum videtur ea hic repetere et ad telescopia accommodare. Inprimis autem ex formula pro semidiametro confusionis inventa patet lentem obiectivam in ea praecipuas partes tenere, siquidem pro ea fuerit $\lambda = 1$; quare, si eius loco lens multiplicata substituatur, pro qua valor numeri λ vehementer sit minor vel adeo evanescat, statim maximum inde commodum adipiscimur, dum tota confusio ad valde exiguum vel fortasse ad nihilum redigitur. Quocirca in capite sequente praecipuas lentes compositas, quas in locum lentis obiectivae substituere licebit, enumerabimus et pro singulis valorem ipsius λ indicabimus, ut deinceps pro circumstantiis hinc depromi possint.

CAPUT II

DE LENTIBUS OBIECTIVIS COMPOSITIS ATQUE PERFECTIS

PROBLEMA 1

59. *Constructionem lentis obiectivae simplicis, quae minimam confusionem ariat, describere.*

SOLUTIO

Cum lens simplex minorem confusionem parere nequeat, quam si fuerit $\lambda = 1$, statuamus statim $\lambda = 1$, et cum sit $a = \infty$, ex iis, quae supra sunt tradita, facile intelligitur hanc lentem ita construi debere, ut sit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{\alpha}{\sigma} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{\alpha}{\varrho}, \end{cases}$$

ubi numeri σ et ϱ ex ratione refractionis sunt sumendi secundum tabulam § 15 exhibitam. Pro variis igitur vitri speciebus haec constructio ita se habebit; scilicet, cum sit $\alpha = p$, erit

pro n	radius faciei anterioris F	radius faciei posterioris G
1,50	$0,58333\,p$	$3,4989\,p$
1,51	$0,58976\,p$	$3,7693\,p$
1,52	$0,59609\,p$	$4,0717\,p$
1,53	$0,60237\,p$	$4,4111\,p$
1,54	$0,60849\,p$	$4,8008\,p$
1,55	$0,61448\,p$	$5,2438\,p$
1,56	$0,62039\,p$	$5,7571\,p$
1,57	$0,62617\,p$	$6,3578\,p$
1,58	$0,63183\,p$	$7,0721\,p$
1,59	$0,63739\,p$	$7,9428\,p$
1,60	$0,64283\,p$	$9,0009\,p$

COROLLARIUM 1

60. Cum in expressione pro semidiametro confusionis λ multiplicetur per μ, ex § 15 intelligitur confusionem ceteris paribus eo fieri minorem, quo maior fuerit ratio refractionis n, ita ut hoc respectu ea vitri species, quae maximam refractionem habet, reliquis sit anteferenda.

COROLLARIUM 2

61. Vulgo lentes obiectivae utrinque aequaliter convexae confici solent, pro quo casu operae pretium erit investigare, quanto numerus λ unitatem sit superaturus; quia autem est

$$F = \frac{a}{\sigma - \tau\cdot\sqrt{\lambda - 1}} \quad \text{et} \quad G = \frac{a}{\varrho + \tau\cdot\sqrt{\lambda - 1}},$$

posito $F = G$ erit

$$\sqrt{\lambda - 1} = \frac{\sigma - \varrho}{2\tau} = \frac{2(nn - 1)}{n\sqrt{(4n - 1)}};$$

tum vero habebitur

$$\frac{1}{F} + \frac{1}{G} = \frac{\sigma + \varrho}{a} = \frac{1}{(n - 1)a} = \frac{2}{F}$$

seu

$$F = G = 2(n - 1)a = 2(n - 1)p.$$

Quod autem ad λ attinet, pro casu $n = 1,55$ erit

$$\sqrt{\lambda - 1} = \frac{1,4025}{1,7673} = 0,79367$$

hincque $\lambda = 1,62991$; unde patet, quanto maiorem confusionem talis lens obiectiva pariat.

COROLLARIUM 3

62. Si lentem obiectivam convexo-planam facere velimus, ut eius facies posterior fiat plana seu $G = \infty$, erit

$$\sqrt{\lambda - 1} = \frac{-\varrho}{\tau} \quad \text{et} \quad F = \frac{a}{\sigma + \varrho} = (n - 1)a$$

et pro casu, quo $n = 1,55$, $\lambda = 1,0444$, unde confusio non nisi perparum superat illam, quae oritur ex casu $\lambda = 1$.

COROLLARIUM 4

63. Sin autem eadem lens plano-convexa invertatur, ut sit $F = \infty$ ideoque $\sqrt{(\lambda - 1)} = \frac{\sigma}{\tau}$ et $G = \frac{\alpha}{\varrho + \sigma} = (n-1)\alpha$, erit, pro casu, quo $n = 1{,}55$, $\lambda = 4{,}2329$, ita ut talis lens plus quam quadruplo maiorem pariat confusionem quam nostra lens commendata.

COROLLARIUM 5

64. Patet ergo, si lens adhibeatur plano-convexa, quantum intersit, utrum facies eius convexa an plana versus obiectum dirigatur, cum posteriori casu confusio circiter quater maior fiat quam priori.

PROBLEMA 2

65. *Constructionem lentis obiectivae duplicatae, siquidem ambae lentes ex eadem vitri specie sint confectae, describere, quae minimam confusionem pariat.*

SOLUTIO

Ex § 114 libri superioris, cum hic sit $a = \infty$ et $\beta = p$, colligimus sequentem constructionem:

$$\text{pro lente priori} \quad \text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{2p}{\sigma} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{2p}{\varrho} \end{cases}$$

$$\text{pro lente posteriori radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{2p}{2\sigma - \varrho} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{2p}{2\varrho - \sigma}, \end{cases}$$

ac si haec lens duplicata loco lentis obiectivae adhibeatur, pro ea erit $\lambda = \frac{1-\nu}{4}$, quos valores pro praecipuis tantum vitri speciebus determinemus.

Contemplemur igitur primo vitrum coronarium, pro quo $n = 1{,}53$, et cum sit $\varrho = 0{,}2267$, $\sigma = 1{,}6601$, erit $2\sigma - \varrho = 3{,}0935$ et $2\varrho - \sigma = -1{,}2067$; tum vero ob $\nu = 0{,}2196$ prodit $\lambda = 0{,}1951$ atque habetur sequens constructio:

Pro vitro coronario $n = 1{,}53$

$$\text{pro lente priori} \quad \text{radius faciei} \left\{ \begin{array}{ll} \text{anterioris} & = +\,1{,}2047\,p \\ \text{posterioris} & = +\,8{,}8222\,p \end{array} \right.$$

$$\text{pro lente posteriori} \quad \text{radius faciei} \left\{ \begin{array}{ll} \text{anterioris} & = +\,0{,}6465\,p \\ \text{posterioris} & = -\,1{,}6574\,p \end{array} \right.$$

et $\lambda = 0{,}1951$.

Ponamus nunc $n = 1{,}55$ pro vitro ordinario, eritque

$\varrho = 0{,}1907$, $\sigma = 1{,}6274$ et $2\sigma - \varrho = 3{,}0641$, $2\varrho - \sigma = -1{,}2460$, $\nu = 0{,}2326$,

hinc $\lambda = 0{,}1918$, unde elicitur sequens constructio:

Pro vitro communi $n = 1{,}55$

$$\text{pro lente priori} \quad \text{radius faciei} \left\{ \begin{array}{ll} \text{anterioris} & = +\,1{,}2289\,p \\ \text{posterioris} & = +\,10{,}4876\,p \end{array} \right.$$

$$\text{pro lente posteriori} \quad \text{radius faciei} \left\{ \begin{array}{ll} \text{anterioris} & = +\,0{,}6527\,p \\ \text{posterioris} & = -\,1{,}6051\,p \end{array} \right.$$

et $\lambda = 0{,}1918$.

Ponamus porro $n = 1{,}58$ pro vitro crystallino, eritque

$\varrho = 0{,}1414$, $\sigma = 1{,}5827$, $2\sigma - \varrho = 3{,}0240$, $2\varrho - \sigma = -1{,}2999$, $\nu = 0{,}2529$,

hincque $\lambda = 0{,}1868$, unde habetur sequens constructio:

Pro vitro crystallino $n = 1{,}58$

$$\text{pro lente priori} \quad \text{radius faciei} \left\{ \begin{array}{ll} \text{anterioris} & = +\,1{,}26366\,p \\ \text{posterioris} & = +\,14{,}14427\,p \end{array} \right.$$

$$\text{pro lente posteriori} \quad \text{radius faciei} \left\{ \begin{array}{ll} \text{anterioris} & = +\,0{,}66187\,p \\ \text{posterioris} & = -\,1{,}58858\,p \end{array} \right.$$

et $\lambda = 0{,}1868$.

COROLLARIUM 2

68. Deinde etiam hinc patet, quo maior fuerit refractio seu numerus n pro huiusmodi lente obiectiva, eo maius lucrum in constructionem telescopiorum redundare, quia tum non solum numerus λ prodit minor, sed etiam numerus μ, per quem λ multiplicari oportet.

SCHOLION

69. Huiusmodi autem lentes duplicatae et triplicatae in obiectivae lentis locum substituendae nihil plane conferunt ad alterum confusionis genus, quod ex diversa radiorum refrangibilitate nascitur, diminuendum, sed aequationes in capite primo datae pro hoc genere confusionis tollendo prorsus manent eaedem, ac si lens obiectiva esset simplex; verum reliquae lentes duplicatae et triplicatae, quas supra in additamento [VIII] commendavimus, primum etiam terminum in aequatione pro dispersione ante inventa ad nihilum redigunt, in quo praecipua pars huius confusionis continetur. Quocirca in hoc capite illas lentium tam duplicatarum quam triplicatarum species repeti conveniet.

DEFINITIO 4

70. *Lens obiectiva perfecta est, quae non solum nullam parit confusionem ab apertura oriundam, sed etiam nullam plane radiorum dispersionem gignit.*

COROLLARIUM 1

71. Si igitur talis lens adhibeatur, numerus λ penitus evanescet, unde semidiameter confusionis multo fit minor quam pro lentibus obiectivis compositis hactenus explicatis.

COROLLARIUM 2

72. Ex superioribus etiam satis intelligitur ad huiusmodi lentes perfectas construendas duas ad minimum diversas vitri species requiri, et quia experimenta circa alias vitri species adhuc desiderantur, alias species adhibere non licet praeter vitrum coronarium et crystallinum, quibus Clarissimus DOLLONDUS est usus.

PROBLEMA 4

73. *Lentem obiectivam duplicatam partim ex vitro coronario $n = 1,53$, partim ex crystallino $n = 1,58$ compositam construere.*

SOLUTIO

In additamento ad calcem capitis VII partis praecedentis annexo [p. 249—253] duas huiusmodi lentes perfectas dedimus, quarum alterius lens prior ex vitro coronario, posterior vero ex vitro crystallino erat confecta; alterius vero contra lens prior ex vitro crystallino, posterior vero ex coronario; has duas lentium perfectarum species hic referamus.

I. Lens obiectiva perfecta duplicata

Pro lente priori ex vitro coronario $n = 1,53$ parata

$$\text{radius faciei}\left\{\begin{array}{l}\text{anterioris} = +0,1807p\\ \text{posterioris} = +1,3239p\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Crown}\\ \text{Glass.}\end{array}$$

Pro lente posteriori ex vitro crystallino $n = 1,58$ parata

$$\text{radius faciei}\left\{\begin{array}{l}\text{anterioris} = -0,4770p\\ \text{posterioris} = -0,5191p\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Flint}\\ \text{Glass.}\end{array}$$

Quae capax est aperturae, cuius semidiameter est $x = 0,0452p$.

II. Lens obiectiva perfecta duplicata

Pro lente priori ex vitro crystallino $n = 1,58$ parata

$$\text{radius faciei}\left\{\begin{array}{l}\text{anterioris} = -2,0545p\\ \text{posterioris} = -0,2828p\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Flint}\\ \text{Glass.}\end{array}$$

Pro lente posteriori ex vitro coronario $n = 1,53$ parata

$$\text{radius faciei}\left\{\begin{array}{l}\text{anterioris} = +0,4568p\\ \text{posterioris} = +0,2438p\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Crown}\\ \text{Glass.}\end{array}$$

Eritque semidiameter aperturae $x = 0,0609p$, ubi notandum est p designare distantiam focalem ipsius lentis duplicatae.

COROLLARIUM 1

74. Cum igitur harum lentium posterior maiorem admittat aperturam quam prior, haec illi sine dubio est anteferenda, quoniam, ut infra patebit, omnis telescopiorum perfectio eo redit, ut lens obiectiva quam maximam aperturam admittat.

COROLLARIUM 2

75. Observandum hic est utroque casu lentem ex vitro crystallino parandam esse debere concavam, eam vero, quae ex vitro coronario conficitur, convexam, prouti eae revera a DOLLONDO parantur.

SCHOLION

76. Ceterum hic non est reticendum ambas has species summam artificis sollertiam requirere; si enim tantillum in earum constructione a mensuris hic praescriptis aberretur, fieri potest, ut eae minus valeant, quam si lentes adeo simplices adhiberentur. Sequentes vero lentes triplicatae multo minorem sollertiam postulant, cum pro singulis lentibus simplicibus numerus λ unitati aequetur ideoque leves errores in constructione commissi non adeo sint pertimescendi.

PROBLEMA 5

77. *Lentem obiectivam perfectam triplicatam partim ex vitro coronario $n = 1,53$, partim ex crystallino $n = 1,58$ compositam construere.*

SOLUTIO

Pro hoc lentium perfectarum genere supra [p. 257—261] quatuor dedimus species, quas hic referamus:

I. Lens obiectiva perfecta triplicata cuius lens prima et tertia ex vitro crystallino media ex coronario est parata

Pro lente prima	radius faciei	anterioris	$= +0,5039\,p$	Flint
		posterioris	$= +5,6450\,p$	Glass
pro lente secunda	radius faciei	anterioris	$= +0,1364\,p$	Crown
		posterioris	$= -0,9597\,p$	Glass
pro lente tertia	radius faciei	anterioris	$= +1,0699\,p$	Flint
		posterioris	$= -0,1404\,p$	Glass.

Quae lens capax est aperturae, cuius semidiameter $x = 0,0341\,p$.

II. Lens obiectiva perfecta triplicata cuius lens prima et tertia ex vitro crystallino media ex coronario est parata

Pro lente prima	radius faciei	anterioris	$= -0{,}1762\,p$	Flint
		posterioris	$= -1{,}9741\,p$	Glass
pro lente secunda	radius faciei	anterioris	$= +2{,}5349\,p$	Crown
		posterioris	$= +0{,}1696\,p$	Glass
pro lente tertia	radius faciei	anterioris	$= +0{,}6179\,p$	Flint
		posterioris	$= +1{,}8532\,p$	Glass.

Quae lens capax est aperturae, cuius semidiameter $x = 0{,}0424\,p$.

III. Lens obiectiva perfecta triplicata cuius lens prima et tertia ex vitro coronario media ex crystallino est parata

Pro lente prima	radius faciei	anterioris	$= +0{,}5004\,p$	Crown
		posterioris	$= +3{,}6665\,p$	Glass
pro lente secunda	radius faciei	anterioris	$= -0{,}5107\,p$	Flint
		posterioris	$= -0{,}4843\,p$	Glass
pro lente tertia	radius faciei	anterioris	$= +0{,}5219\,p$	Crown
		posterioris	$= +0{,}4757\,p$	Glass.

Aperturae semidiametro $x = 0{,}1189\,p$.

IV. Lens obiectiva perfecta triplicata cuius lens prima et tertia ex vitro coronario media ex crystallino est parata

Pro lente prima	radius faciei	anterioris	$= +0{,}2829\,p$	Crown
		posterioris	$= +2{,}0729\,p$	Glass
pro lente secunda	radius faciei	anterioris	$= -1{,}6017\,p$	Flint
		posterioris	$= -0{,}2948\,p$	Glass
pro lente tertia	radius faciei	anterioris	$= +0{,}5860\,p$	Crown
		posterioris	$= +1{,}7670\,p$	Glass.

Semidiametro aperturae $x = 0{,}0707\,p$.

In his formulis littera p denotat distantiam focalem cuiusque lentis perfectae.

COROLLARIUM 1

78. Inter has quatuor lentes tertia imprimis est notatu digna, quod maximam aperturam admittat.

COROLLARIUM 2

79. Si ergo eiusmodi lens perfecta in quodam telescopio loco lentis obiectivae adhibeatur, in expressione pro semidiametro confusionis primus terminus $\mu\lambda$ prorsus evanescit; tum vero etiam in aequatione ultima pro dispersione destruenda terminus primus quoque ad nihilum redigitur.

COROLLARIUM 3

80. Huiusmodi igitur lentes perfectae etiam speculis, quibus in telescopiis catoptricis utuntur, longe sunt anteferendae, cum specula tantum a dispersione radiorum sint immunia, neutiquam vero a priori confusionis genere, quod ab apertura oritur.

CAPUT III

DE DISTRIBUTIONE TELESCOPIORUM IN TRIA GENERA PRAECIPUA

DEFINITIO 1

81. *Imago vera est, ad quam formandam radii revera concurrunt indeque porro diffunduntur; dum contra eae imagines fictae vocantur, ad quas radii tantum convergendo diriguntur neque vero ad eas actu formandas concurrunt, vel etiam ab iis divergendo ulterius discedunt neque tamen ab iis prodierunt.*

COROLLARIUM 1

82. Imago igitur vera hac gaudet proprietate, ut, si in eius loco charta alba esset expansa, super ea effigies a radiis incidentibus exprimeretur, quod in imaginibus fictis usu non venit.

COROLLARIUM 2

83. Imagines autem fictae duplicis sunt generis; vel enim radii inde divergendo ulterius progrediuntur, cum tamen inde non discesserint, vel ad eas convergendo tendunt neque tamen eo revera perveniunt, sed ante ab alia lente aliam directionem accipiunt.

SCHOLION

84. Ad ea, quae hactenus sunt proposita, figuras ita repraesentavimus, quasi per singulas lentes imagines verae formarentur, ita ut inter binas quas-

que lentes successivas imago vera caderet, neque in his figuris ulla imago ficta est indicata (Fig. 15, Lib. I). Imagines autem illas veras litteris $F\zeta$, $G\eta$, $H\theta$ etc. designavimus, quae omnes ita sunt comparatae, ut, si ibi charta alba expanderetur, super ea effigies obiecti revera exprimeretur.

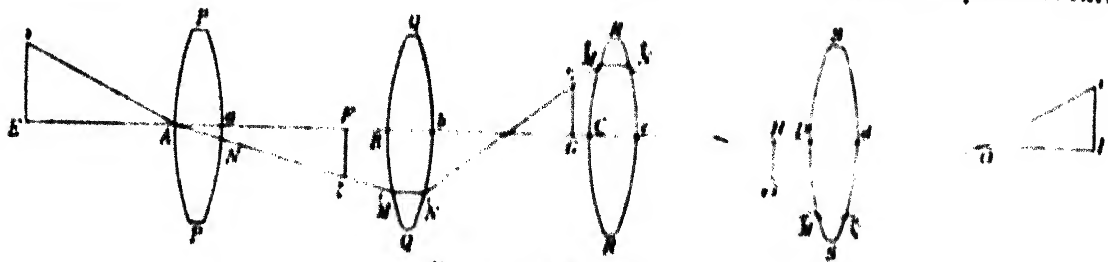

Fig. 15 (iterata)

Perspicuum autem est imagines veras necessario oriri debere, si omnes distantiae, quas supra posuimus, determinatrices $aF = \alpha$, $FB = b$, $bG = \beta$, $GC = c$, $cH = \gamma$, $HD = d$ etc. fuerint positivae; imagines autem tum erunt fictae, quando harum distantiarum quaedam fiunt negativae, id quod in sequentibus theorematibus fusius explicabimus.

THEOREMA 1

85. *Si intervalli inter binas lentes successivas cuiuscunque v. gr. cD binae partes $cH = \gamma$ et $HD = d$, ita ut sit $cD = \gamma + d$, fuerint positivae, imago vera in puncto H exhibebitur et contra.*

DEMONSTRATIO

Radii enim per lentem RR refracti ad imaginem $H\theta$ conformandam tendunt et, quia lens sequens SS ultra locum imaginis H est posita, ab his radiis imago vera in H repraesentabitur, ita ut, si per $H\theta$ charta alba esset expansa, ea istos radios revera exciperet super eaque effigies depingeretur: quod ergo necessario semper evenire debet, quoties binae partes huius intervalli γ et d fuerint positivae. Ac si vicissim in H repraesentetur imago vera, manifestum est hoc fieri non posse, nisi punctum H post lentem C cadat, quia alioquin radii eo non porrigerentur; tum vero etiam liquet hanc imaginem efformari non posse, nisi sequens lens D post H cadat. Cum igitur esse debeat distantia $cH = \gamma$ positiva simulque distantia $cD = \gamma + d > \gamma$, evidens est et distantiam d esse debere positivam.

COROLLARIUM

86. Quoniam hactenus singula intervalla inter binas lentes successivas tanquam ex duabus partibus composita sumus contemplati, inter lentem primam A et secundam B imago vera $F\zeta$ cadet, si ambae eius partes α et b fuerint positivae; similique modo inter lentem secundam B et tertiam C imago vera reperietur, si huius intervalli BC ambae partes β et c fuerint positivae, et ita porro.

THEOREMA 2

87. *Si binarum partium aliquod huiusmodi intervallum veluti cD constituentium alterutra fuerit negativa, tum imago $H\theta$ lenti C respondens erit ficta (fieri enim nequit, ut ambae simul sint negativae).*

DEMONSTRATIO

Cum intervallum cD binis partibus $cH = \gamma$ et $HD = d$ constet, sumamus primo distantiam γ esse negativam; tum igitur imago $H\theta$ ante lentem RR cadet et radii per hanc lentem transmissi ita refringentur, quasi ex ista imagine essent egressi, cum tamen inde non emanaverint; quamobrem ista imago non erit vera, sed ficta. Sin autem altera pars d fuerit negativa, imago $H\theta$ demum post lentem SS caderet; quia autem radii per lentem RR transmissi, antequam eo pertingunt, per lentem SS de novo refringuntur, istam effigiem non revera formabunt, ideoque haec imago erit ficta.

Ambae autem partes γ et d simul non possunt esse negativae, quia earum summa $\gamma + d$ ipsum intervallum cD exprimit, quod semper necessario est positivum.

COROLLARIUM 1

88. Si ergo pro primo intervallo aB partium α et b altera fuerit negativa, inter a et B nulla cadit imago vera; si praeterea etiam pro secundo intervallo bC partium β et c altera fuerit quoque negativa, inter a et C nulla cadet imago vera; ac si insuper partium intervalli cD, quae sunt γ et d, altera fuerit negativa, tum ne quidem in spatio aD reperietur imago vera sicque fieri potest, ut inter plurium lentium spatium nulla plane cadat imago vera.

COROLLARIUM 2

89. Neutiquam ergo numerus imaginum verarum a numero lentium pendet, cum aeque fieri possit, ut post quamlibet lentem imago vera repraesentetur atque ut pluribus lentibus nulla plane imago vera respondeat.

COROLLARIUM 3

90. Ex quotcunque igitur lentibus telescopium quodpiam fuerit compositum, fieri potest, ut per totum eius spatium vel nulla plane imago vera reperiatur vel unica tantum vel duae vel tres etc., numquam tamen plures, quam sunt lentes, ultima demta.

THEOREMA 3

91. *Post quotcunque demum lentes in telescopio prima imago vera exhibetur, ea semper est inversa.*

DEMONSTRATIO

Quando scilicet imago primae lentis statim est vera, perspicuum est eam quoque esse inversam; quod autem ea etiam futura sit inversa, si demum post plures lentes occurrat, sequenti modo ostendi potest (Fig. 5, Lib. I).

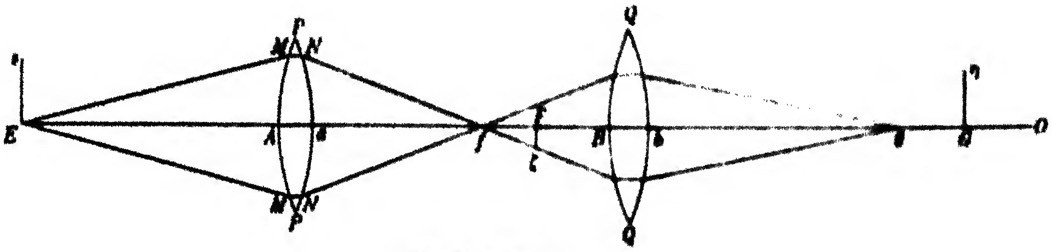

Fig. 5 (iterata).

Consideretur radius ex centro obiecti E per superius lentis obiectivae punctum M transiens, atque iste radius per sequentes lentes transiens tamdiu supra axem versabitur, donec ad primam imaginem veram pertigerit; quia enim ex axis puncto E est egressus, ubicunque iterum in axem incideret, ibi existeret imago obiecti vera (hic enim ad aberrationem vel diffusionem radiorum non respicimus), ex quo manifestum est hunc radium ante non ad axem esse perventurum, quam ad primam imaginem veram

pertigerit, et quia ex regione superiori hic in axem incidit ad regionem inferiorem progressurus, imago in hoc loco expressa erit inversa; cum enim ex obiecto sursum sit progressus, nunc autem ex imagine deorsum dirigatur, partes obiecti sursum vergentes nunc deorsum sitae conspicientur.

COROLLARIUM 1

92. Simili modo intelligere licet radios illos ex imagine progredientes tamdiu infra axem esse versaturos, donec iterum ad axem pertingant, quod fit in imagine vera secunda, unde iterum in partes axis superiores transeunt; unde patet secundam imaginem situm erectum tenere debere, sicque porro tertia imago vera denuo erit inversa, quarta autem erecta, et ita porro.

COROLLARIUM 2

93. Quotcunque ergo fuerint lentes, non tam ad imagines singulis lentibus respondentes erit respiciendum quam ad imagines veras, cum alternatio situs erecti et inversi pendeat tantum ab imaginibus veris, dum imagines fictae nihil in hoc ordine turbant.

SCHOLION

94. Haec proprietas imaginum verarum tam essentialiter naturam telescopiorum afficit, ut eorum discrimen potissimum a numero imaginum verarum petendum esse videatur, nulla plane ratione habita imaginum fictarum, quippe quae in hoc negotio parvi sunt momenti. Qui enim voluerit telescopia secundum lentium numerum in genera distribuere, maximis incommodis se implicabit; primo enim exigua illa telescopia vel potius perspicilla lente oculari concava constantia et tubos astronomicos ad idem genus referre esset coactus, dum tamen sua natura maxime inter se discrepant, quandoquidem illis obiecta situ erecto, his vero situ inverso repraesentantur, praeterquam quod in loco oculi maxima utrinque deprehenditur diversitas; deinde si cuipiam telescopio sive ad campum apparentem augendum sive ad maiorem distinctionis gradum ipsi conciliandum unica lens insuper adiungeretur, statim ad longe aliud genus foret referendum, quod certe aeque incongruum videri debet. Quibus probe perpensis non dubito diversa telescopiorum genera secundum numerum imaginum verarum, quae in iis occurrunt, constituere, ita ut primum genus complexurum sit ea telescopia, in quibus nulla plane imago vera occurrit,

secundum vero ea, in quibus unica imago vera reperitur, tertium vero ea, quae duas imagines veras continent; ad quae tria genera omnia telescopia, quae adhuc excogitata sunt et elaborata, erunt referenda; ac si ulterius progredi velimus, ad quartum genus revocari conveniet ea telescopia, in quibus tres imagines verae deprehenduntur; verum praecedentia iam tam late patent, ut iis omnes plane perfectiones, quae unquam desiderari queant, conciliari possint, ita ut nulla plane ratio adsit, cur plures imagines veras statuere velimus. Hanc igitur divisionem in sequentibus problematibus distinctius evolvamus.

PROBLEMA 1

95. *Telescopiorum ad primum genus relatorum, in quibus nulla inest imago vera, praecipuas proprietates recensere.*

SOLUTIO

Cum in his telescopiis, quotcunque etiam constent lentibus, nulla insit imago vera, singula intervalla $aB = \alpha + b$, $bC = \beta + c$, $cD = \gamma + d$ etc. ita ex binis partibus definientur, ut alterutra earum sit negativa, idque usque ad ultimam lentem ocularem. Et quoniam haec eadem intervalla necessario sunt positiva, facile patet omnes istas fractiones $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{\beta}{c}$, $\frac{\gamma}{d}$ etc. debere esse negativas, in quo character essentialis huius generis telescopiorum est constituendus. Vicissim enim si omnes hae fractiones fuerint negativae, in toto telescopio nulla imago vera locum habebit ideoque ad nostrum primum genus erit referendum. Alius autem character minus essentialis huius generis in hoc consistit, quod haec telescopia situ erecto obiecta repraesentent, quia ob nullam imaginem veram ipsa obiecta quasi immediate adspicimus.

COROLLARIUM 1

96. Simplicissima ergo species huius generis duabus constabit lentibus, et cum sit $\frac{\alpha}{b}$ quantitas negativa, fiet ratio multiplicationis $m = -\frac{\alpha}{b}$, uti situs erectus postulat; hinc necesse est, ut sit $\alpha > b$ ideoque α quantitas positiva et b negativa. Cum autem porro esse debeat $\beta = \infty$, pro huius lentis ocularis distantia focali q habebimus ob $\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}$ valorem $q = b$ sicque lens ocularis erit concava.

COROLLARIUM 2

97. Cum porro in genere sit $m = +\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{c}\cdot\frac{\gamma}{d}$ etc., cuius factores sunt nostrae fractiones, quae omnes esse debent negativae, hinc manifestum est, cur supra signa $+$ et $-$ sint alternantia inventa, ut scilicet pro quovis lentium numero multiplicatio m valorem positivum consequatur.

COROLLARIUM 3

98. Ostendi etiam potest nullam harum litterarum α, b, β, c, γ etc. sumi posse evanescentem. Si enim v. c. distantia b esset minima, quia altera litterarum α et b debet esse negativa, earum summa vero $\alpha + b$ positiva et finita, necesse est, ut sit $\alpha > 0$, $b < 0$; sit igitur $b = -\omega$, quantitati scilicet evanescenti, et quia est $\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}$, fiet $\beta = \frac{q\omega}{q+\omega} = \omega$ ideoque positivum; foret ergo $c < 0$, hincque $\beta + c$ intervallum cB exprimere non posset; unde patet huiusmodi casus locum habere non posse. Fieri autem potest, ut quaepiam harum quantitatum fiat ∞; si enim fuerit v. gr. $\beta = \infty$, ob intervallum $\beta + c =$ finito, puta $= k$, erit $c = -\infty + k = -\infty$ et $\frac{\beta}{c} = -1$; hoc autem non impedit, quominus sequens fractio $\frac{\gamma}{d}$ valorem obtineat quemcumque.

SCHOLION

99. Notissimum est hoc telescopiorum genus, quippe quod primum ab artifice quodam inventum perhibetur, dum casu lentem convexam cum concava combinaverat; neque tamen eius essentia in hoc est statuenda, quod tantum duabus constet lentibus. Si enim loco lentis obiectivae simplicis substituamus duplicatam vel adeo triplicatam, nemo certe putabit ipsum eius genus mutatum esse, quoniam huiusmodi lentes multiplicatae ut simplices spectari solent; simili modo lens ocularis posset duplicari vel triplicari ipso genere non mutato; cum autem nihilominus plures lentes simplices adhibeantur, manifestum est ipsam generis indolem non a numero lentium pendere censeri posse. In sequentibus autem inprimis operam dabimus, ut novis lentibus addendis hoc genus ad maiorem perfectionem evehamus.

PROBLEMA 2

100. *Telescopiorum ad secundum genus relatorum, in quibus unica imago vera occurrit, praecipuas proprietates recensere.*

SOLUTIO

Ex quotcunque lentibus tale telescopium fuerit compositum, evidens est non omnes fractiones ex singulis lentium intervallis natas $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{\beta}{c}$, $\frac{\gamma}{d}$ etc. negativas esse debere, quia alioquin nulla imago vera esset proditura; cum autem unica adsit vera, necesse est, ut etiam unica illarum fractionum fiat positiva, quae si fuerit v. c. $\frac{\gamma}{d}$, ambae litterae γ et d positivae esse debebunt, dum reliquae fractiones omnes manent ut ante negativae, atque perinde est, quaenam illarum fractionum valorem positivum nanciscatur, dummodo plus una non sit positiva; atque in hoc consistit character essentialis huius generis telescopiorum, inter cuius proprietates haec insuper inprimis est notanda, quod obiecta situ inverso repraesentet, quandoquidem per huiusmodi telescopia non tam ipsa obiecta quam eorum imaginem veram, quae est inversa, conspicere sumus consendi.

COROLLARIUM 1

101. Si ergo huiusmodi telescopium duabus tantum constet lentibus, quae sine dubio simplicissima huius generis est species, ob unicum intervallum aB unica quoque habetur fractio $\frac{\alpha}{b}$, quae propterea positiva esse debet ideoque etiam utraque distantia α et b; quae cum ob $a = \infty$ et $\beta = \infty$ praebeant distantiam focalem utriusque lentis, manifestum est utramque lentem fore convexam.

COROLLARIUM 2

102. Quia igitur huic generi repraesentatio inversa est propria, exponens multiplicationis m, quae producto harum fractionum $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{\beta}{c}$ etc. aequalis est inventa, valorem negativum obtinebit, contrarium scilicet ei, qui casu praecedenti prodierat.

COROLLARIUM 3

103. In hoc autem genere evenire potest, ut quaepiam quantitatum α, b etc. evanescat, quod fit, si in loco ipsius imaginis verae lens constituatur. Cadat enim imago vera in ipsam lentem tertiam C, erit $c = 0$, vel potius posito $c = \omega$ ob $\frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}$ erit $\gamma = \frac{-r\omega}{r - \omega} = -\omega$, ita ut ambae quantitates c et γ evanescant, unde distantiae β et d debent esse positivae, sicque patet fractionum $\frac{\beta}{c}$ et $\frac{\gamma}{d}$ alteram fore positivam, alteram negativam, prout voluerimus; quoniam enim imaginem in ipsam lentem RR cadere assumimus, perinde est, sive eam ad intervallum bC sive ad intervallum cD velimus referre; utroque autem casu, etsi fractio $\frac{\beta}{c}$ fiat ∞, fractio vero $\frac{\gamma}{d} = 0$, productum ambarum semper est $= -\frac{\beta}{d}$.

SCHOLION

104. Telescopia ad hoc genus pertinentia vocari solent astronomica; quoniam enim obiecta situ inverso repraesentant, potissimum ad observationes astronomicas adhibentur, ubi parum refert, sive obiecta in coelo situ erecto sive inverso conspiciamus; id quod in obiectis terrestribus secus se habet, ad quorum contemplationem, quando telescopia primi generis non sufficiunt, ad tertium genus recurrere solemus.

PROBLEMA 3

105. ***Telescopiorum ad tertium genus relatorum, in quibus duae imagines verae occurrunt, praecipuas proprietates recensere.***

SOLUTIO

Cum hic duae imagines verae occurrant, quotcunque lentes adhibeantur, inter fractiones inde natas $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{\beta}{c}$ etc. duae necessario debent esse positivae, reliquae vero omnes negativae; unde, cum duae ad minimum eiusmodi fractiones adesse debeant adeoque etiam duo lentium intervalla, evidens est ad huiusmodi telescopia tres ad minimum lentes requiri, quo casu nullae tales fractiones negativae habebuntur; unde fractiones negativae eatenus tantum occurrent, quatenus plures tribus lentes in usum vocantur, atque in hoc

essentialis character huius generis telescopiorum continetur. Inter praecipuas autem proprietates haec inprimis est notanda, quod per telescopia obiecta in situ erecto conspiciantur.

COROLLARIUM 1

106. Si haec telescopia ex tribus lentibus formentur, omnes hae quatuor distantiae α, b, β, c esse debent positivae, et cum distantiae a et γ sint ∞, omnes tres lentes debent esse convexae; si enim earum distantiae focales sint p, q et r, habebitur I. $p = \alpha$, II. $q = \frac{b\beta}{b+\beta}$ et III. $r = c$, quae omnes sunt positivae.

COROLLARIUM 2

107. Quemadmodum praecedenti casu licuit in ipsum locum imaginis verae lentem constituere, ita etiam hic nulla ratio obstat, quominus in utraque imagine vera lentes collocentur; tum autem ea, quae supra sunt de fractionibus modo in infinitum excrescentibus modo evanescentibus tradita, probe sunt observanda.

SCHOLION

108. Hoc genus eum in finem est excogitatum, ut tubi astronomici ad obiecta terrestria situ erecto contemplanda accommodarentur; quod quidem tribus lentibus fieri posse iam annotavimus. Sed quoniam tribus tantum lentibus adhibendis campus apparens fere totus evanescit aliaque incommoda se insuper admiscent, statim quatuor lentes usurpari sunt solitae, quae ita sunt iunctae, ut duos tubos astronomicos connexos referant, et tres lentes posteriores nomine ocularium appellatae sunt, quibus etiam fere eadem distantia focalis tribui potest. Ad idem quoque genus referenda sunt nova illa telescopia anglica a Clariss. DOLLONDO nuper inventa, in quibus praeter lentes obiectivas duplicatas longe diversa lentium ocularium dispositio cernitur. Interim vero haec dispositio infinitis modis variari potest atque adeo debet, ut haec telescopia ad summum perfectionis gradum evehantur.

PROBLEMA 4

109. ***Telescopiorum ad quartum genus relatorum, in quibus tres imagines verae occurrunt, praecipuas proprietates enumerare.***

SOLUTIO

In hoc ergo genere, quotcunque lentes adhibeantur, inter fractiones iis respondentes $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{\beta}{c}$ etc. tres debent esse positivae, dum reliquae manent negativae, ex quo perspicuum est ad hoc genus ad minimum opus esse quatuor lentibus, et quia ultima imago vera, quae quasi ab oculo spectatur, est inversa, obiecta quoque per omnia telescopia huius generis inversa conspicientur.

SCHOLION

110. Quoniam nulla plane ratio suadet, ut repraesentationem praecedentis generis denuo invertere velimus, atque, uti videbimus, omnes perfectiones praecedentibus generibus conferri queunt, nihil aliud lucraremur, nisi ut telescopia multo fierent longiora, et numerum lentium sine ullo usu multiplicaremus, ut taceam iacturam insignem radiorum lucidorum, quae ob tot lentes merito esset metuenda; atque hanc ob rationem non dubito genus hoc quartum penitus reiicere, de quo etiam nullum supererit dubium, quando tria praecedentia genera ita pertractaverimus, ut omnibus momentis, quibus perfectio telescopiorum innititur, satisfecerimus. Multo magis autem sequentia, quae constitui possent genera, nullam plane attentionem merebuntur.

CAPUT IV

DE TELESCOPIIS PRIMI GENERIS QUAE SCILICET IMAGINE VERA DESTITUUNTUR ET OBIECTA SITU ERECTO REPRAESENTANT

PROBLEMA 1

111. *Si telescopium primi generis ex duabus tantum lentibus constet, obiectiva scilicet et oculari, eius constructionem evolvere et proprietates exponere.*

SOLUTIO

Cum hic sit $\frac{a}{b}$ quantitas negativa et $a+b$ positiva, si ratio multiplicationis ponatur $=m$, ob $m>1$ distantia a, ut ante vidimus, debet esse positiva, altera vero b negativa, ut sit $b=-\frac{a}{m}$ seu distantiis focalibus introductis $\alpha=p$ et $b=q=\frac{-p}{m}$ et intervallum binarum lentium $a+b=\left(\frac{m-1}{m}\right)p$, unde patet ex data multiplicatione m et distantia focali p omnia determinari. Verum haec distantia p tanta esse debet, ut lens obiectiva datam admittat aperturam, cuius, si claritatis gradus ponatur $=y$, semidiameter esse debet $x=my$, unde iam patet distantiam p maiorem esse debere quam $4my$ vel $5my$; unde, cum y in partibus digiti dari soleat veluti $y=\frac{1}{50}$ dig., fit $x=\frac{m}{50}$ et $p>\frac{m}{10}$ dig.

Verum hic inprimis spectari debet aequatio pro semidiametro confusionis, quae dat

$$\frac{mx^3}{4p^3}\left(\mu\lambda-\frac{\mu'\lambda'}{m}\right)=\frac{1}{4k^3},$$

unde colligitur

$$p=kx\sqrt[3]{m\left(\mu\lambda-\frac{\mu'\lambda'}{m}\right)}=kmy\sqrt[3]{m\left(\mu\lambda-\frac{\mu'\lambda'}{m}\right)}.$$

qui ergo valor, nisi forte minor sit quam $5mg$, ipsi p tribui debet, ubi, ut supra notavimus, numerus k poni potest vel 30 vel 40 vel 50, prout maior vel minor distinctionis gradus desideratur; atque iam ex datis valoribus λ et λ' cum vitri specie, unde numeri μ et μ' pendent, ambae lentes construi hincque totum telescopium confici poterunt. Ad cuius proprietates cognoscendas quaeramus primo locum oculi eiusve distantiam a lente oculari invenimusque

$$O = \frac{m-1}{m} \cdot q$$

(§ 30), quae cum ob $q < 0$ sit negativa, oculum lenti oculari immediate applicari oportet; unde colligitur semidiameter campi ex § 37

$$\Phi = \frac{\pi}{m-1} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{\frac{1}{4}\omega}{q},$$

denotante ω semidiametrum pupillae; quare ob $q = \frac{p}{m}$ fiet

$$\Phi = \frac{\frac{1}{4}m}{m-1} \cdot \frac{\omega}{p},$$

ubi inprimis notandum est lentem ocularem tantam sumi debere, ut aperturam admittat, cuius semidiameter sit $= \pi q - \omega$; ex quo necesse est, ut fiat $q > 4\omega$ vel 5ω hincque etiam $p > 4m\omega$ vel $> 5m\omega$, quae conditio iam in se complectitur primam ob $g > \omega$. Quod denique ad alteram confusionem attinet, cum destructio marginis colorati postulet, ut sit (§ 52)

$$0 = \frac{dn}{n-1} B\pi \cdot p,$$

quod cum fieri nequeat, nisi lens obiectiva fuerit perfecta, evidens est marginem coloratum destrui non posse. Denique pro hac confusione penitus tollenda esse debet

$$0 = \frac{dn}{n-1} \cdot p + \frac{dn'}{n'-1} \cdot q \quad \text{sive} \quad \frac{dn}{n-1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{dn'}{n'-1},$$

cui casu adeo, quo lens obiectiva est perfecta, satisfieri nequit ob primum terminum evanescentem; quia autem m est numerus satis magnus, alterum membrum per se fit satis parvum, ut haec confusio non sit metuenda.

COROLLARIUM 1

112. Cum distantia focalis p maior esse debeat quam $5m\omega$, pro data multiplicatione m longitudo huius telescopii semper maior erit quam $5(m-1)\omega$,

et, cum sit circiter $\omega = \frac{1}{20}$ dig., haec telescopii longitudo minor fieri non poterit quam $\frac{m+1}{4}$ dig., scilicet, si velimus, ut sit $m = 48$, longitudo telescopii minor esse nequit quam $12\frac{1}{4}$ dig., etiamsi formula

$$p = mky\sqrt[3]{\mu(m\lambda - \lambda')}$$

multo minor reddi posset.

COROLLARIUM 2

113. Pro campo apparente invenimus eius semidiametrum $\Phi = \frac{m}{m+1}\cdot\frac{\omega}{p}$, unde, cum sit $p > 5m\omega$, valor ipsius Φ semper certe minor erit quam $\frac{1}{5(m+1)}$, atque in minutis primis erit $\Phi = \frac{687}{m+1}$ minut., quo campo facile contenti esse possemus, nisi p deberet esse multo maius quam $5m\omega$.

COROLLARIUM 3

114. Quoniam margo coloratus tolli non potest, nisi lens obiectiva sit perfecta, hinc statim intelligimus, quanti sit momenti usus lentium perfectarum, quas supra descripsimus, ita ut earum beneficio his telescopiis insignis gradus perfectionis conciliari possit.

SCHOLION

115. Solutio huius problematis ita est generalis, ut ad omnes vitri species, ex quibus lentes parari possunt, pateat; quin etiam loco lentis obiectivae non solum lentes simplices, sed etiam duplicatae vel triplicatae atque adeo perfectae substitui possunt; unde plurimae species huius telescopii, quod tantum ex duabus lentibus compositum spectamus, exhiberi possunt, quarum praecipuas in subiunctis exemplis contemplemur.

EXEMPLUM 1

116. **Si ambae lentes fuerint simplices atque ex eadem vitri specie confectae, constructionem huius telescopii definire.**

Pro hoc casu potissimum aequatio venit consideranda

$$p = mky\sqrt[3]{\mu(m\lambda - \lambda')},$$

quae distantiam focalem primae lentis determinat, siquidem valor hinc prodiens maior fuerit quam $5mm$. Videbimus autem, statim atque multiplicatio m fuerit notabilis, eius valorem multum esse superaturum istum limitem $5mm$ seu $\frac{1}{4}m$ dig., ita ut maximi sit momenti hanc formulam tam parvam reddere, quam fieri potest; quare statim faciamus $\lambda = 1$, ut lens obiectiva secundum § 59 elaborari debeat; quod vero ad lentem ocularem attinet, non convenit $\lambda' = 1$ ponere, sed potius e re erit ipsi huic litterae maiorem valorem tribuere; inprimis autem, ut haec lens maximae aperturae fiat capax, ea optime utrinque aeque concava redditur, ex quo numerus $\lambda' = 1{,}62991$ (§ 61) pro ea vitri specie, qua $n = 1{,}55$ et qua artifices plerumque uti solent. Pro aliis autem speciebus tantum non differet, ut operae pretium sit differentiae rationem habere, praecipue cum litteras k et y tam adcurate definire non liceat. Sumamus ergo $y = \frac{1}{40}$ dig., ut satis magnam claritatem obtineamus, quae in hoc genere necessaria videtur, et $k = 40$, ut confusio satis reddatur exigua, eritque ob $\lambda = 1$, $\lambda' = 1\frac{5}{8}$:

$$p = m\sqrt[3]{\mu\left(m - 1\tfrac{5}{8}\right)},$$

unde patet hic eas vitri species praeferri debere, quibus maior refractio n respondet, quia tum littera μ minores nanciscitur valores. Cum autem perpetuo μ non multum differat ab unitate eiusque propterea radix cubica multo minus discrepet, quacunque vitri specie uti velimus, tuto sumere licebit

$$p = m\sqrt[3]{\left(m - 1\tfrac{5}{8}\right)};$$

hoc autem casu circa marginem coloratum nihil efficere licet. Quare, si hinc distantiam focalem lentis obiectivae debite definiverimus atque n denotet refractionem vitri, ex quo ambae lentes sint parandae, constructio telescopii sequenti modo se habebit:

I. Lens obiectiva paranda est ex formulis § 59.

II. Lens ocularis utrinque aeque concava conficiatur sumendo radium utriusque faciei $= \frac{-2(n-1)p}{m}$ ob $q = \frac{-p}{m}$.

III. Hae duae lentes ad distantiam $AB = \frac{m-1}{m}\cdot p$ iungantur et tubo inserantur, ut oculus lenti concavae immediate adplicari possit.

IV. Hic tubus campum offeret, cuius semidiameter erit

$$\Phi = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\omega}{p} = \frac{3437\, m}{m-1} \cdot \frac{\omega}{p} \text{ min.}$$

V. Hoc telescopium a vitio marginis colorati liberari nequit.

COROLLARIUM 1

117. Quodsi multiplicatio tanta sit, ut fiat $m = 1\frac{5}{8}$, formula p definiens evanescit; nihilo vero minus sumi debet $p = 5m\omega$ seu quasi $\frac{1}{4}m$ dig., hocque valore uti licet, etsi m aliquanto sit maius, dummodo illa formula non excedat $\frac{1}{4}m$ dig., quod evenit, quamdiu m non superat limitem $1\frac{41}{64}$, qui vix superat valorem $1\frac{5}{8}$; ex quo patet, statim atque multiplicatio m maior sit quam $1\frac{5}{8}$, distantiam focalem p maiorem capi debere quam $\frac{1}{4}m$ dig.

COROLLARIUM 2

118. Quare, si verbi gratia debeat esse $m = 5$, capi oportet $p = 7\frac{1}{2}$ dig. et $q = -\frac{3}{2}$, unde semidiameter campi apparentis prodit

$$\Phi = \frac{5}{4} \cdot \frac{2\omega}{15} = \frac{\omega}{6} = \frac{1}{120} \text{ ob } \omega = \frac{1}{20} \text{ sive } \Phi = \frac{3437}{120} \text{ min.} = 29 \text{ min.}$$

Longitudo autem telescopii erit 6 dig.

COROLLARIUM 3

119. Si multiplicatio desideretur $m = 10$, reperitur $p = 5\sqrt[3]{67} = 20\frac{5}{16}$ dig. hincque $q = -2\frac{1}{32}$ dig., ita ut longitudo telescopii sit $18\frac{9}{32}$ dig.; tum vero semidiameter campi apparentis, quae est $\frac{\omega}{p+q}$, fit $\Phi = \frac{32\omega}{585} = \frac{8}{2925}$ et in minutis $\Phi = 9'24''$[1]), qui campus iam tam est exiguus, ut nullo modo tolerari possit, quare haec species telescopiorum ne quidem ad multiplicationem $m = 10$ adplicari potest.

---

1) Editio princeps: $\frac{4}{2925}$ *et in minutis* $\Phi = 4'42''$. Correxit E. Ch.

EXEMPLUM 2

120. Si ambae lentes ex eadem vitri specie parentur, obiectiva vero statuatur duplicata secundum § 65 construenda, ut sit $\lambda = \frac{1-\nu}{4}$, ac si vitro communi, pro quo est $n = 1{,}55$, utamur, erit $\lambda = 0{,}1918$; sumtaque iterum unitate pro $\sqrt[3]{\mu}$ et posito ut ante $\lambda' = 1\frac{5}{8}$, ut lens ocularis fiat aequaliter concava, erit

$$p = m\sqrt[3]{\left(0{,}1918\,m - 1\tfrac{5}{8}\right)}$$

et ut ante $q = \frac{-p}{m}$ hincque distantia lentium $= \frac{m-1}{m}p$; quare, si inde pro data multiplicatione definiatur valor litterae p, constructio ita se habebit:

I. Lens obiectiva paranda est ex formulis § 65 pro $n = 1{,}55$.

II. Lens ocularis utrinque fiat aequaliter concava, radio existente

$$= -2(n-1)\cdot\frac{p}{m} = -\frac{11}{10}\cdot\frac{p}{m}.$$

III. Semidiameter campi apparentis erit ut ante

$$\Phi = \frac{m}{m-1}\cdot\frac{\omega}{p} = \frac{172\,m}{m-1}\cdot\frac{1}{p}\ \text{min.}$$

IV. Aeque parum autem ac ante hoc casu margini colorato remedium afferri potest.

COROLLARIUM 1

121. Quando autem formula illa praebet $p < \frac{1}{4}m$ dig., nihilo minus statui debet $p = \frac{1}{4}m$ dig., quod inprimis evenit, si sit $m = 8\frac{1}{2}$ circiter; unde oritur $p = 0$; quare, nisi multiplicatio maior desideretur, sumi poterit $p = \frac{1}{4}m$ dig., unde fit $q = -\frac{1}{4}$ dig. et longitudo telescopii $\frac{1}{4}(m-1)$ dig. campique apparentis semidiameter $\Phi = \frac{688}{m-1}$ minut.

COROLLARIUM 2

122. Quodsi ergo multiplicatio proposita sit $m = 8\frac{1}{2}$, telescopium ita erit construendum:

scilicet pluresve lentes, quae unitae lentem perfectam constituebant, hic tanquam disiunctas consideremus, quo pacto id commodi assequemur, ut non solum utraque confusio lentem etiam ocularem in calculo comprehendendo penitus tolli, sed etiam fortasse campus apparens ulterius extendi queat; quem in finem sequens problema praemitti oportet.

PROBLEMA 2

127. *Inter lentem obiectivam et ocularem aliam insuper lentem inserere, ut telescopium eidem primo generi maneat accensendum.*

SOLUTIO

Ponamus ergo telescopium constare tribus lentibus PP, QQ, RR, ac primo quidem requiritur, ut hae fractiones $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{\beta}{c}$ sint negativae, tum vero, ut haec intervalla $\alpha+b$, $\beta+c$ sint positiva, existente multiplicatione $m=\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{c}$ sive $m=\frac{\alpha}{c}\cdot B$ ob $B=\frac{\beta}{b}$, quae proinde quantitas erit positiva. Introducamus nunc altera elementa, quae supra litteris B, C et indicibus aperturae π, π' cum semidiametro campi Φ continebantur, ac pro priori conditione habebimus

$$\frac{\alpha}{b}=\frac{\mathfrak{B}\pi-\Phi}{\Phi}<0, \quad \frac{\beta}{c}=\frac{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}<0,$$

unde, cum Φ ex rei natura semper sit positivum, debet esse $\mathfrak{B}\pi-\Phi$ negativum, at vero $\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi$ positivum; et quia $\gamma=\infty$, ideoque $C=\infty$ et $\mathfrak{C}=1$, unde posterior conditio dat $\pi'-\pi+\Phi>0$. Pro campo autem apparente invenimus $\Phi=\frac{-\pi+\pi'}{m-1}$, unde, cum Φ et $m-1$ sint quantitates positivae, debet esse $-\pi+\pi'$ quantitas positiva, qua praecedens etiam conditio sponte continetur.

Ut autem praeterea intervalla lentium fiant positiva, has duas conditiones adipiscimur ex § 16:

$$1. \quad \frac{\mathfrak{B}\pi p}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}>0,$$

unde cum denominator sit negativus, etiam numerator debet esse negativus seu $\mathfrak{B}\pi p<0$; prouti ergo quantitas p fuerit vel positiva vel negativa, debet esse $\mathfrak{B}\pi$ vel negativum vel positivum.

$$2. \quad \frac{B\Phi p(\pi'-(1-\mathfrak{B})\pi)}{(\mathfrak{B}\pi-\Phi)(\pi'-\pi+\Phi)}>0,$$

ubi, cum Φ sit positivum, totus vero denominator negativus, etiam pro numeratore $Bp(\pi' - (1 - \mathfrak{B})\pi)$ debet esse < 0.

Ex his igitur conditionibus, si loco Φ valorem inventum substituamus, sequentes conclusiones consequemur:

$$1.\quad \pi' - \pi > 0$$

$$2.\quad \text{ob } \mathfrak{B}\pi - \Phi < 0 \text{ debet esse } (m-1)\mathfrak{B}\pi - \pi' + \pi < 0 \text{ seu}$$
$$\pi' - \pi > (m-1)\mathfrak{B}\pi \text{ sive } \pi' > ((m-1)\mathfrak{B} + 1)\pi$$

$$3.\quad \mathfrak{B}\pi p < 0$$

$$4.\quad Bp(\pi' - (1 - \mathfrak{B})\pi) < 0;$$

quia hic igitur formulae 3 et 4 ambae sunt negativae, haec per illam divisa:

$$\frac{B(\pi' - (1 - \mathfrak{B})\pi)}{\mathfrak{B}\pi} > 0;$$

unde, si denominator fuerit positivus, etiam numerator debet esse positivus et contra.

Consideremus nunc ambos casus extremos, alterum, quo media lens lenti obiectivae unitur, alterum, quo ea lenti oculari unitur. Priori casu, quo scilicet $a + b = 0$, fit $\pi = 0$, quemadmodum supra iam notavimus pro lentibus quotcunque cum obiectiva lente coalescentibus. Posteriore casu, quo $\beta + c = 0$, debet esse $\pi' - (1 - \mathfrak{B})\pi = 0$ seu $\pi' = (1 - \mathfrak{B})\pi$, qui valor in conditione superiore secunda positus dabit $m\mathfrak{B}\pi < 0$ seu $\mathfrak{B}\pi < 0$. Cum autem campus apparens potissimum a lente oculari pendeat, cui respondet littera π', haec littera π' necessario est positiva; quare, ut campus ob lentem mediam non minuatur, sed potius augeatur, numerum π negativum esse oportet, ex quo superiores conditiones propius hoc modo definientur:

1ma scilicet $\pi' - \pi$ iam sponte fit > 0 ideoque omitti potest,

2da est $\pi' > ((m-1)\mathfrak{B} + 1)\pi$,

ex 3tia autem sequitur $\mathfrak{B}p > 0$,

et 4ta $\dfrac{B(\pi' - (1 - \mathfrak{B})\pi)}{\mathfrak{B}\pi} > 0$.

Consideretur adhuc locus oculi, cuius distantia a lente oculari fit $O = \frac{\pi'}{m\Phi} r$, quae ob $\frac{\pi'}{m\Phi}$ positivum fieret positiva, si modo r esset positivum; at cum sit $r = c$ ob $C = \infty$ et $\mathfrak{C} = 1$, erit $r = \frac{Bp\Phi}{\pi' - \pi + \Phi}$; cuius denominator cum sit posi-

tivus, examinandum est, utrum Bp sit positivum an negativum; at si Bp esset positivum, distantia O quoque foret positiva, sin autem Bp esset negativum, foret quoque distantia O negativa, oculusque lenti tertiae immediate applicari deberet, de quo casu praecepta supra data sunt observanda.

COROLLARIUM 1

128. Quia, statim ac multiplicatio m fit modicae quantitatis, Φ multo minus est quam π, cum $\mathfrak{B}\pi - \Phi$ sit negativum, quantitas $\mathfrak{B}\pi$ fiet quoque negativa, et ob $\pi < 0$ erit $\mathfrak{B}$ positivum. Hinc pro tertia conditione $\mathfrak{B}\pi p < 0$ debebit esse p positivum (excepto scilicet casu, quo π quam minimum habet valorem ideoque p etiam negativum esse posset), et per tertiam et quartam conditionem coniunctim erit ob denominatorem negativum etiam numerator $B(\pi' - \pi + \mathfrak{B}\pi)$ negativus; si ergo fuerit $\pi' - \pi + \mathfrak{B}\pi > 0$, erit $B < 0$, contra vero $B > 0$.

COROLLARIUM 2

129. Hae igitur conditiones impleri possunt pluribus modis, dum plura elementa manent indeterminata; statim enim patet quantitatem α seu p tam affirmativum quam negativum valorem accipere posse; at quia $\mathfrak{B}p > 0$ ob $\pi < 0$, si p statuamus positivum, etiam $\mathfrak{B}$ debet esse positivum; sin autem p sumatur negative, etiam $\mathfrak{B}$ debet esse negativum; interim tamen, cum sit $B = \frac{\mathfrak{B}}{1 - \mathfrak{B}}$, etiamsi sit $\mathfrak{B}$ positivum, littera B etiam nunc esse potest tam positiva quam negativa; altero vero casu, quo $\mathfrak{B}$ est negativum, semper etiam B fit negativum.

SCHOLION 1

130. Eodem modo, quo hoc problema resolvimus, conditiones etiam inveniri possunt, quando duae pluresve lentes inter obiectivam et ocularem inseruntur seu quando huiusmodi telescopium ex quatuor pluribusve lentibus est compositum; ponamus enim quatuor id lentibus constare atque sequentes sex conditiones erunt adimplendae:

$$1.\ \frac{\alpha}{b} < 0, \qquad 2.\ \frac{\beta}{c} < 0, \qquad 3.\ \frac{\gamma}{d} < 0,$$

$$4.\ \alpha + b > 0, \qquad 5.\ \beta + c > 0, \qquad 6.\ \gamma + d > 0,$$

existente $\delta = \infty$ ideoque $D = \infty$ et $\mathfrak{D} = 1$; unde, si loco harum litterarum

valores supra dati introducantur, hae sex conditiones praebebunt sequentes formulas, in quibus Φ semper ut positivum ponitur:

$$1.\ \mathfrak{B}\pi - \Phi < 0, \qquad 2.\ \frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} < 0, \qquad 3.\ \frac{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} < 0,$$

quae tres conditiones commodius ita referuntur:

$$1.\ \mathfrak{B}\pi - \Phi < 0, \qquad 2.\ \mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi > 0, \qquad 3.\ \pi'' - \pi' + \pi - \Phi < 0.$$

Pro tribus reliquis conditionibus, quia in singulis denominatores sunt negativi, etiam numeratores oportet esse negativos, unde sequentes conditiones erunt adimplendae:

$$4.\ \mathfrak{B}\pi p < 0,$$
$$5.\ Bp(\mathfrak{C}\pi' - (1 - \mathfrak{B})\pi) < 0,$$
$$6.\ BCp(\pi'' - (1 - \mathfrak{C})\pi') < 0,$$

quae, prout p fuerit vel positivum vel negativum, duplici modo considerari poterunt; in hoc negotio autem inprimis consideranda est expressio pro campo apparente, quae est $\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi''}{m-1}$; quae quia tam magna desiderari solet, quam fieri potest, curandum est, ut fractiones π et π'' obtineant valores negativos eosque maximos, qui tamen $\frac{1}{4}$ vel $\frac{1}{5}$ superare nequeunt, ac si forte hoc fieri nequeat et alteruter debeat esse positivus, tum, ut is fiat quam minimus, erit efficiendum.

SCHOLION 2

131. His iam praemissis videamus, quo modo superiori incommodo, quo lentes perfectae pro hoc telescopiorum genere ineptae sunt deprehensae, remedium afferri possit. Considerabimus igitur telescopium ut tribus lentibus compositum ac duas priores prorsus uniamus, ut intervallum $\alpha + b$ evanescat sicque lens obiectiva fiat duplicata; verum nunc singula elementa ita definiamus, ut non pro sola obiectiva utraque confusio destruatur, sed pro toto telescopio. Quoniam vero ad hoc duplici vitri specie opus est, adhibere cogimur binas illas species anglicas, scilicet vitrum coronarium et crystallinum. Unde duo potissimum problemata nascuntur, prout vel prima lens ex coronario, secunda vero ex crystallino, vel contra prior ex crystallino, secunda vero ex coronario fuerit paranda; de tertia autem lente oculari perinde fere erit, sive eam ex vitro coronario sive ex crystallino conficere velimus, dummodo ea utrinque aeque concava reddatur, quandoquidem ea hoc modo maximam aperturam admittit, a qua campus apparens dependet.

PROBLEMA 3

132. *Si telescopii lens obiectiva sit duplicata ac prior quidem ex vitro coronario, posterior vero ex crystallino parata, lens autem ocularis etiam ex vitro coronario, constructionem huius telescopii pro quavis multiplicatione m describere.*

SOLUTIO

Cum igitur hic sit $\alpha + b = 0$ sive $\alpha = -b$ et $\frac{\alpha}{b} = -1$, erit multiplicatio $m = -\frac{\beta}{c}$ seu $c = -\frac{\beta}{m}$, ubi littera β exprimit distantiam focalem ipsius lentis obiectivae duplicatae ideoque, ut ex problemate 1 patet, debet esse positiva; unde lens ocularis erit concava. Cum igitur sit $b = \frac{\beta}{B}$, $q = \mathfrak{B}b = \frac{\mathfrak{B}\beta}{B} = \frac{\beta}{B+1}$, erit $\alpha = \frac{-\beta}{B}$, et litterae μ et ν una cum μ'' ex refractione $n = 1{,}53$, litterae vero μ' et ν' ex refractione $n = 1{,}58$ sunt sumendae; unde pro confusione ex apertura lentium destruenda habebimus hanc aequationem:

$$\mu\lambda - \frac{\mu'\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\mu\lambda''}{mB^3} - \frac{\mu'\nu'}{\mathfrak{B}B} = 0.$$

Cum autem sit $\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} = 7:10$ atque $n'' = n$, ob valorem distantiae O negativum pro margine colorato tollendo nanciscimur hanc aequationem:

$$\pi'(3B + 10) = 10\pi;$$

deinde vero pro hac confusione penitus tollenda satisfieri oportet huic aequationi:

$$0 = -7 + \frac{10(B+1)}{B} - \frac{7}{mB} \quad \text{seu} \quad 0 = -7B + 10(B+1) - \frac{7}{m};$$

unde reperitur $B = \frac{7 - 10m}{3m}$, $\mathfrak{B} = \frac{10m - 7}{7m - 7}$, ex qua littera B perfecte determinatur, ita ut ex prima aequatione tantum litterae λ et λ' definiendae restent, quia ob lentem ocularem utrinque aequalem λ'' iam definitur. Inde igitur commodissime definitur numerus λ':

$$\lambda' = \frac{\mu\mathfrak{B}^3\lambda}{\mu'} + \frac{\mu\mathfrak{B}^3\lambda''}{m\mu' B^3} - \frac{\nu'\mathfrak{B}^2}{B},$$

in qua quidem aequatione λ pro lubitu accipi posset; sed ne λ' unitatem nimis superet, conveniet sumi $\lambda = 1$, sicque omnia iam erunt determinata, ita

ut nihil amplius supersit, quod ex aequatione media posset determinari, quia ratio litterarum π et π' ex praemissis iam datur. Cum enim sit

$$b = \frac{\beta}{B} = \frac{p\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} = \frac{-\beta\Phi}{B(\mathfrak{B}\pi - \Phi)}$$

hincque $\pi = 0$ et cum pro campo apparente sit $\Phi = \frac{-\pi + \pi'}{m-1}$, erit $\pi' = (m-1)\Phi$, unde pro secunda aequatione prodit

$$0 = (m-1)\Phi(3B + 10);$$

quod cum fieri nequeat praeter casum $3B + 10 = 0$ seu $\frac{7 - 10m}{m} + 10 = 0$ hincque $m = \infty$, margo coloratus tolli nequit, nisi multiplicatio sit maxima ideoque pro maioribus multiplicationibus erit insensibilis; ad quem casum cum haec telescopia accommodari conveniat, margo coloratus non erit metuendus sufficietque, si primae et tertiae aequationi satisfecerimus. Inventis igitur quantitatibus B, λ et λ' pro data multiplicatione m gradus claritatis y assumatur, quo contenti esse voluerimus, indeque habebitur semidiameter aperturae primae lentis x. Si deinde distantiam focalem totius lentis obiectivae, quae est aequalis β, ut indefinitam spectemus, habebimus inde distantiam focalem prioris lentis $\alpha = \frac{-\beta}{B}$ et pro posteriore distantias determinatrices $b = \frac{\beta}{B}$ et β, ex quibus cum numeris λ et λ' utramque lentem poterimus construere; in qua constructione notetur minimus radius sive convexitatis sive concavitatis eiusque parti quintae vel etiam quartae aequetur $x = my$; unde ipsa quantitas β in digitis determinabitur. Hinc porro colligimus distantiam focalem lentis ocularis $= c = \frac{-\beta}{m}$; ex qua si huic lenti utrinque figura aequalis tribuatur, ut scilicet maximae aperturae fiat capax, radius istius curvaturae erit $= -\frac{2(n-1)\beta}{m}$, uti supra iam ostendimus § 61, ubi etiam invenimus pro hac lente fore $\sqrt{(\lambda'' - 1)} = \frac{\sigma - \varrho}{2\tau}$, unde valor ipsius λ'' definitur.

COROLLARIUM 1

133. Cum hic distantia oculi post ultimam lentem O fiat negativa ideoque oculus huic lenti immediate adplicari debeat, in formula campum apparentem declarante $\Phi = \frac{-\pi + \pi'}{m-1}$ fractio π' sumi debet $= \frac{\omega}{c}$, ut scilicet campum inveniamus, quem uno obtutu conspicimus; expediet autem aperturam istius lentis tantam fieri, quantam curvatura facierum admittit, sicque nihil obstat, quominus ipsi π' valor $= \frac{1}{4}$ vel $= \frac{1}{5}$ tribuatur.

COROLLARIUM 2

134. Quod hic de valore ultimae litterarum π, π', π'' etc. notavimus, latissime patet, ut scilicet ei semper valor $\frac{1}{5}$ vel $\frac{1}{4}$ tribui possit, dummodo in computo campi apparentis eius valor ad $\frac{\omega}{c}$ imminuatur, si quidem hic fuerit minor; quippe quo modo campus uno obtutu conspectus definitur. Quando autem apertura lentis ocularis maior fuerit pupilla, tum pupilla eam quasi peragrando successive totum campum conspiciet, quem verus valor ipsius π' definit, sicque in posterum hanc limitationem a pupilla petitam penitus omittere poterimus, dummodo notetur casu, quo π' maius quam $\frac{\omega}{c}$, hunc campum non uno obtutu apparere.

COROLLARIUM 3

135. Hoc igitur pacto telescopium adipiscimur primi generis, quod obiecta sine ulla confusione sive ab apertura lentium sive a diversa radiorum natura oriunda repraesentabit, ita ut in illo nihil amplius possit desiderari, nisi quod campus apparens nimis sit exiguus; quo tamen defectu omnia telescopia tam NEUTONIANA quam GREGORIANA aeque laborant.

SCHOLION 1

136. Si haec ad praxin accommodare velimus, inchoandum erit a valore litterae B, quem tertia aequatio suppeditat, scilicet $B = \frac{7-10m}{3m}$, qui, statim atque m sit numerus modice magnus, abit in $B = -\frac{10}{3}$; quia autem hic valor $-\frac{7}{3}$ derivatus est ex DOLLONDI experimentis, unde rationem $\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} = 7:10$ deduximus, nemo certe arbitrabitur hanc rationem tam exacte veritati respondere, ut non satis notabiliter ab ea discrepare possit; quam ob causam ridiculum plane foret, si circa valorem huius litterae B nimis scrupulosi esse vellemus; neque etiam res ipsa tantam praecisionem exigere videtur, cum iam plurimum praestitisse is sit censendus, qui hanc confusionis speciem, quae hactenus nullo plane modo imminui posse est credita, plurimum imminuere potuerit, etiamsi ad nihilum non reduxerit; audacter igitur statuere poterimus $B = -\frac{10}{3}$ pro quacunque multiplicatione indeque tantum superest, ut formula pro λ' inventa evolvatur; in quo nihil omnino negligere licebit, quoniam, ut supra iam invenimus, solus terminus $\frac{\mu\mathfrak{B}\lambda''}{m\mu' B^3}$ tanti erat momenti, ut a lente obiectiva perfecta optatus effectus exspectari non potuerit.

SCHOLION 2

137. Quoniam in sequentibus plurimum intererit, ut lentibus ocularibus eiusmodi figura tribuatur, quae maximae aperturae sit capax, hocque manifesto eveniat, si ambae huius lentis facies reddantur aequales; pro huiusmodi lente valor litterae λ ita definietur, ut fiat $\sqrt{\lambda - 1} = \frac{\sigma - \varrho}{2\tau}$, quem igitur pro praecipuis vitri speciebus hic exhibeamus:

n	$\sqrt{\lambda-1}$	λ
1,53	0,77464	1,60006
1,55	0,79367	1,62991
1,58	0,82125	1,67445.

Cum igitur nunc habeamus valorem $\lambda'' = 1{,}60006$, per ea, quae in problemate sunt constituta, habebimus $\mu = 0{,}9875$, $\mu' = 0{,}8724$, $\nu' = 0{,}2529$; sumto $B = -\frac{10}{3}$ et $\mathfrak{B} = +\frac{10}{7}$ aequatio prima resolvenda induet hanc formam:

$$\lambda' = 3{,}3001\,\lambda - \frac{0{,}1426}{m} + 0{,}1548,$$

ex qua, ne valor ipsius λ' praeter necessitatem nimis magnus prodeat, statuamus $\lambda = 1$ fietque

$$\lambda' = 3{,}4549 - \frac{0{,}1426}{m},$$

cuius aequationis usum in aliquot exemplis ostendamus.

EXEMPLUM 1

138. Huiusmodi telescopium construere, quod obiecta vicies quinquies aucta repraesentet; seu sit $m = 25$.

Cum sit $\lambda = 1$, erit $\lambda' = 3{,}4492$ et $\lambda' - 1 = 2{,}4492$ et $\sqrt{(\lambda' - 1)} = 1{,}5649$; atque hinc sequens singularum lentium constructio colligetur:

I. Pro lente prima ex vitro coronario facta ob eius distantiam focalem $p = \alpha = +\frac{3\beta}{10}$ et $\sqrt{(\lambda - 1)} = 0$ fiet

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = 0{,}1807\,\beta \\ \text{posterioris} = 1{,}3233\,\beta. \end{cases}$$

II. Pro secunda lente ex vitro crystallino, cum sint distantiae determinatrices $b = \frac{\beta}{B} = -\frac{3}{10}\beta$ et litterae

$$\varrho = 0{,}1414, \quad \sigma = 1{,}5827, \quad \tau = 0{,}8775 \quad \text{et} \quad \sqrt{(\lambda' - 1)} = 1{,}5649,$$

si pro radiis anterioris et posterioris faciei ponamus litteras F et G, habebimus

$$F = \frac{b\beta}{\varrho\beta + \sigma b \pm \tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}}, \qquad G = \frac{b\beta}{\varrho b + \sigma\beta \mp \tau(b+\beta)\sqrt{(\lambda'-1)}}$$

atque hinc

$$\frac{1}{F} = \frac{3\sigma - 10\varrho \mp 7\tau\sqrt{(\lambda'-1)}}{3\beta}, \qquad \frac{1}{G} = \frac{3\varrho - 10\sigma \pm 7\tau\sqrt{(\lambda'-1)}}{3\beta},$$

quibus evolutis prodit

$$\frac{1}{F} = \frac{3{,}3341 \mp 9{,}6124}{3\beta}, \qquad \frac{1}{G} = \frac{-15{,}4028 \pm 9{,}6124}{3\beta};$$

ut igitur radii non nimis fiant parvi, uti oportet signis superioribus, unde obtinebimus

$$\frac{1}{F} = \frac{-6{,}2783}{3\beta}, \quad F = -0{,}4779\beta, \quad \frac{1}{G} = \frac{-5{,}7904}{3\beta}, \quad G = -0{,}5181\beta.$$

III. Pro tertia lente oculari ex vitro coronario paranda constructio est facillima, dum utriusque faciei radius esse debet

$$= 2(n-1)r = +1{,}06\,r = -0{,}0424\beta.$$

Binae priores lentes sibi invicem immediate iunguntur, ut unam quasi lentem constituant, cuius aperturae semidiameter maior esse nequit quam quarta circiter pars radii minimi, quae est $= 0{,}0452\beta$, et habebimus $x = 0{,}0452\beta$. Debet autem esse $x = my$ denotante y gradum claritatis, atque iam notavimus statui posse $y = \frac{1}{50}$ dig., ita ut hoc casu habeamus $x = \frac{1}{2}$ dig., quocirca valor ipsius β ita determinabitur, ut sit $\beta = 11{,}1$ dig.; saltim β hoc limite non debet capi minus, unde superiores mensurae absolute innotescunt. Campi autem apparentis semidiameter ob $\pi = 0$ erit $\Phi = \frac{\pi'}{m-1} = \frac{\pi'}{24}$; sumtoque $\pi' = \frac{1}{4}$ erit in minutis primis $35\frac{3}{4}$ min., quem campum oculus uno obtutu cerneret, si semidiameter pupillae esset $\pi' r = 0{,}1110$. Quanto autem est minor, tanto minorem quoque campum uno obtutu videbit. Longitudo autem huius telescopii erit $= 10\frac{3}{4}$ digit.

SCHOLION

139. Hoc ergo telescopium ad praxin satis accommodatum videtur, cum eius longitudo minor sit undecim digitis et tamen vicies quinquies obiecta augeat, campo apparente non adeo exiguo existente; hincque etiam patet, quantum lens perfecta hic immutari debuerit, ut etiam confusionem a lente oculari oriundam tolleret. Verum hic notandum est constructionem huius instrumenti summam artificis sollertiam requirere minimumque errorem commissum totum opus irritum reddere, quare non nisi post plura tentamina successus sperari poterit. Multo maiore autem sollertia erit opus, si maiorem quoque multiplicationem desideremus, uti ex sequenti exemplo erit manifestum.

EXEMPLUM 2

140. Huiusmodi telescopium conficere, quod obiecta quinquagies multiplicet; seu sit $m = 50$.

Erit pro hoc casu $\lambda' = 3{,}4521$ et $\sqrt{(\lambda' - 1)} = 1{,}5659$, qui valor praecedentem superat $\frac{1}{1000}$, hoc est sui parte $\frac{1}{1565}$, ita ut superior formula $\sqrt{(\lambda' - 1)}$ per $1 + \frac{1}{1565}$ multiplicata praebeat praesentem valorem, et cum reliqua elementa maneant ut ante, erit:

$$\text{I. Pro prima lente radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 0{,}1807\,\beta \\ \text{posterioris} & = 1{,}3233\,\beta. \end{cases}$$

II. Pro secunda lente habebimus

$$\frac{1}{F} = \frac{3{,}3341 \mp 9{,}6185}{3\beta}, \quad \frac{1}{G} = \frac{-15{,}4028 \pm 9{,}6185}{3\beta}$$

sumtisque signis superioribus habebimus:

$$\frac{1}{F} = \frac{-6{,}2844}{3\beta}, \quad F = -0{,}4774\,\beta, \quad \frac{1}{G} = \frac{-5{,}7843}{3\beta}, \quad G = -0{,}5186\,\beta.$$

Quae duae lentes iunctae aperturam admittent, cuius semidiameter $= 0{,}0452\,\beta$; quo scilicet maior non debet esse valor $x = my = 1$ dig., quare capi debebit β maius quam 22,1 dig.

III. Pro lente oculari, cuius distantia focalis est $= \frac{-\beta}{m} = \frac{-\beta}{50}$, radius utriusque faciei erit $= -\frac{2(n-1)\beta}{50} = -0{,}0212\beta$. Sumto autem $\pi' = \frac{1}{4}$ erit aperturae eius semidiameter $x = +\frac{\beta}{200} = 0{,}110$ dig., unde semidiameter campi apparentis fit $\Phi = \frac{\pi'}{m-1} = \frac{1}{196}$ sive angulus $\Phi = 17\frac{1}{2}$ min. prim. Longitudo denique huius telescopii erit $= \beta + r = 21{,}658$ sive $21\frac{2}{3}$ dig.

SCHOLION

141. In hoc exemplo constructio lentis secundae vix discrepat a praecedente; unde patet, quam adcurate mensurae inventae observari debeant, ut effectus voto respondeat, facillimeque evenire posse, ut, quae lens obiectiva datae cuidam multiplicationi destinatur, ea longe alii multiplicationi inserviat; quare quantamcunque etiam sollertiam artifex adhibuerit, multiplicatio, cui convenit, explorari debet, dum scilicet ei successive aliae atque aliae lentes oculares adiunguntur; tum enim pro certa quadam multiplicatione fieri poterit, ut telescopium egregium effectum producat; hanc ob causam supersedeamus altero casu supra memorato, quo pro lente obiectiva lens prior ex vitro crystallino, posterior ex coronario parari debebat, quoniam haec, quae evolvimus, sufficere videntur, et multo magis expediet pro lente obiectiva lentem triplicatam exhibere eamque talem, cuius prima et tertia lens ex vitro crystallino, media ex coronario sit confecta, quia iam supra hinc aptissima lens perfecta est nata.

PROBLEMA 4

142. *Si lens obiectiva telescopii sit triplicata, cuius prima et tertia lens ex vitro crystallino, media vero ex coronario sit conficienda, lens autem ocularis etiam ex vitro coronario, huius telescopii constructionem describere, ut omni confusione careat.*

SOLUTIO

Hoc igitur telescopium ex quatuor omnino lentibus constabit, pro quibus erit $n = 1{,}58$, $n' = 1{,}53$, $n'' = n$ et $n''' = n'$, et quia tres priores lentes in unam quasi coalescere debent, erit $\alpha + b = 0$ et $\beta + c = 0$, sive

$$\frac{\alpha}{b} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{c} = -1;$$

quare cum sit multiplicatio $m = -\frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\gamma}{d}$, erit

$$m = \frac{-\gamma}{d} \quad \text{seu} \quad d = \frac{-\gamma}{m};$$

reliquae vero litterae simili modo per γ exprimi poterunt, scilicet

$$c = \frac{\gamma}{C}, \quad \beta = \frac{-\gamma}{C}, \quad b = \frac{-\gamma}{BC} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\gamma}{BC},$$

ex quibus distantiae focales oriuntur

$$p = \frac{\gamma}{BC}, \quad q = \frac{-\mathfrak{B}\gamma}{BC}, \quad r = \frac{\mathfrak{C}\gamma}{C}, \quad s = \frac{-\gamma}{m}.$$

Quibus praemissis pro confusione ex apertura lentium orta destruenda habebimus hanc aequationem:

$$\mu\lambda - \frac{\mu'}{\mathfrak{B}}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu'}{B}\right) + \frac{\mu''}{\mathfrak{C}B^3}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2} + \frac{\nu''}{C}\right) - \frac{\mu'''\lambda'''}{B^3C^3m} = 0,$$

quae ob $\mu'' = \mu$, $\nu'' = \nu$ et $\mu''' = \mu'$ evoluta dabit:

$$0 = \mu\lambda - \frac{\mu'\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\mu\lambda''}{B^3\mathfrak{C}^3} - \frac{\mu'\lambda'''}{B^3C^3m} - \frac{\mu'\nu'}{B\mathfrak{B}} + \frac{\mu\nu}{B^3C\mathfrak{C}}.$$

Ne nimis rationi $7:10$, qua ante usi sumus, inhaereamus, ponamus in genere

$$\frac{dn}{n-1} = \zeta \quad \text{et} \quad \frac{dn'}{n'-1} = \eta,$$

ut sit circiter $\zeta : \eta = 10:7$; deinde, quia nostro casu fit $\pi = 0$ et $\pi' = 0$, pro margine colorato abolendo habebimus

$$0 = \zeta - \frac{\eta(B+1)}{B} + \frac{\zeta(C+1)}{BC}$$

sive

$$\zeta(1 + C + BC) = \eta(B+1)C,$$

ex qua quid conludere liceat, deinceps videbimus. Tertiam aequationem nobis praebet destructio tota huius confusionis, scilicet istam:

$$0 = BC + C + \frac{\zeta m - \eta}{(\zeta - \eta)m}.$$

Ponatur brevitatis gratia

$$\frac{\zeta m-\eta}{(\zeta-\eta)m}=\theta,$$

eritque

$$0=BC+C+\theta,$$

unde prodit

$$C=\frac{-\theta}{B+1} \quad \text{vel} \quad B=-1-\frac{\theta}{C}.$$

Cum autem secunda aequatio abeat in hanc formam:

$$BC+C+\frac{\zeta}{\zeta-\eta}=0,$$

ambabus simul satisfieri nequit, nisi sit $\theta=\frac{\zeta}{\zeta-\eta}$, hoc est, nisi sit $\frac{\zeta m-\eta}{m}=\zeta$ sive $\zeta m-\zeta m=\eta=0m$ sive $m=\infty$, prorsus ut in casu praecedente. Regrediemur igitur ad nostram aequationem primam, in qua sive loco B sive loco C valorem debitum substituamus. Cum autem rationem $\zeta:\eta$ non tam exacte nosse licet, sufficiet valores proximos sumsisse; hunc in finem in tertia aequatione terminum per m divisum negligamus et habebimus:

$$0=BC+C+\frac{\zeta}{\zeta-\eta} \quad \text{sive} \quad 0=BC+C+\frac{10}{3}$$

hincque

$$C=\frac{-10}{3(B+1)} \quad \text{et} \quad C+1=\frac{3B-7}{3(B+1)};$$

quibus substitutis et divisione facta per $(B+1)^3$ prodit

$$0=-1000\mu\lambda\mathfrak{B}^3+1000\mu'\lambda'+\mu\lambda''(10\mathfrak{B}-7)^3-\frac{27\mu\lambda'''}{m}$$
$$+1000\mu'\nu'\mathfrak{B}(1-\mathfrak{B})-30\mu\nu(10\mathfrak{B}-7)(1-\mathfrak{B}),$$

quae sumto $\lambda''=\lambda$ fit aequatio quadratica, ex qua $\mathfrak{B}$ definitur.

Ex hac autem aequatione cognoscimus huiusmodi substitutionem etiam in genere succedere; cum enim sit $B=\frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}}$, ob $B+1=\frac{1}{1-\mathfrak{B}}$ fiet

$$C=-\theta(1-\mathfrak{B}) \quad \text{et} \quad C+1=1-\theta+\theta\mathfrak{B}$$

hincque

$$\mathfrak{C}=\frac{-\theta(1-\mathfrak{B})}{1-\theta+\theta\mathfrak{B}},$$

et ipsa aequatio prima reducetur ad hanc formam, si scilicet per $\mathfrak{B}^3$ multiplicetur:

$$0 = \mu\lambda\mathfrak{B}^3 - \mu'\lambda' - \mu\lambda''\left(\mathfrak{B} - 1 + \frac{1}{\theta}\right)^3 + \frac{\mu'\lambda'''}{m\theta^3}$$
$$- \mu'\nu'\mathfrak{B}(1 - \mathfrak{B}) + \frac{\mu\nu(1-\mathfrak{B})\left(\mathfrak{B} - 1 + \frac{1}{\theta}\right)}{\theta},$$

existente $\theta = \frac{\zeta m - \eta}{(\zeta - \eta)m}$; ac si ponatur $\theta = \frac{10}{3}$, praecedens aequatio sponte prodit.

Statuamus igitur $\lambda'' = \lambda$, et evolutio huius aequationis sequentem praebebit aequationem quadraticam secundum potestates litterae $\mathfrak{B}$ dispositam:

$$\mathfrak{B}^2\left(3\mu\lambda\left(1 - \frac{1}{\theta}\right) + \mu'\nu' - \frac{\mu\nu}{\theta}\right) + \mathfrak{B}\left(-3\mu\lambda\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^2 - \mu'\nu' + \frac{\mu\nu}{\theta}\left(2 - \frac{1}{\theta}\right)\right)$$
$$+ \mu\lambda\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^3 - \mu'\lambda' + \frac{\mu'\lambda'''}{m\theta^3} - \mu\nu\left(1 - \frac{1}{\theta}\right) = 0,$$

ex qua $\mathfrak{B}$ definiri debet.

Nunc igitur statuamus $\theta = \frac{10}{3}$; tum vero $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 1$, et pro lente oculari sit $\lambda''' = 1{,}60006$; tum vero

$$\mu = 0{,}8724 \quad \text{et} \quad \nu = 0{,}2529, \quad \mu' = 0{,}9875, \quad \nu' = 0{,}2196;$$

unde fit

$$l.\ \mu\nu = 9{,}3436645, \quad l.\ \mu'\nu' = 9{,}3361694.$$

Pro termino $\mathfrak{B}^2$:

$$\mathfrak{B}^2\left(\frac{21}{10}\mu + \mu'\nu' - \frac{3}{10}\mu\nu\right)$$

$$\mathfrak{B}^2\begin{pmatrix} +\,1{,}83204 - 0{,}06618 \\ +\,0{,}21685 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 2{,}04889 \\ 0{,}06618 \\ \hline 1{,}98271 \end{array}$$

$$+\,1{,}98271\,\mathfrak{B}^2 - 1{,}38675\,\mathfrak{B} - 0{,}84271 + \frac{0{,}04266}{m} = 0,$$

qua divisa per 1,98271 fiet

$$\mathfrak{B}^2 = 0{,}69942\,\mathfrak{B} + 0{,}42503 - \frac{0{,}02152}{m},$$

cuius resolutio suppeditat

$$\mathfrak{B} = 0{,}34971 \pm \sqrt{\left(0{,}54736 - \frac{0{,}02152}{m}\right)}$$

vel

$$\mathfrak{B} = 0{,}34971 \pm \left(0{,}73983 - \frac{0{,}01454}{m}\right),$$

unde bini ipsius $\mathfrak{B}$ valores erunt

$$\text{I.)}\quad \mathfrak{B} = 1{,}08954 - \frac{0{,}01454}{m} \qquad \text{II.)}\quad \mathfrak{B} = -0{,}39012 + \frac{0{,}01454}{m}.$$

COROLLARIUM 1

143. Tribus igitur prioribus lentibus immediate coniunctis existit lens obiectiva triplicata, cuius distantia focalis erit aequalis γ, ex qua radios singularum facierum definire oportet, inter quos notetur minimus, qui sit $= i\gamma$; cuius pars quarta $= \frac{1}{4} i\gamma$ dabit semidiametrum aperturae, quam ista lens obiectiva admittit.

COROLLARIUM 2

144. Porro vero ex multiplicatione m data et gradu claritatis y definitur semidiameter aperturae lentis obiectivae $x = my$ idque in digitis sumendo v. gr. $y = \frac{1}{50}$ dig., unde habebitur ista aequatio $my = \frac{1}{4} i\gamma$, ex qua per mensuram absolutam colligitur $\gamma = \frac{4my}{i}$.

COROLLARIUM 3

145. Cum autem lens ocularis debeat esse utrinque aeque concava, ut sit $\lambda''' = 1{,}60006$, erit eius distantia focalis $= d = \frac{-\gamma}{m}$, unde radius utriusque faciei statui debet $= -\frac{2(n'-1)}{m}\gamma = \frac{-1{,}06}{m}\gamma$; cuius aperturae semidiameter sumi potest quater minor, ut sit $x = \frac{\gamma}{4m}$.

EXEMPLUM 1

146. Posita multiplicatione $m = 25$ construere huiusmodi telescopium ex valore priore pro littera $\mathfrak{B}$ invento.

Cum igitur sit $m = 25$, erit $\mathfrak{B} = +1{,}08896$, ex quo sequitur

$$B = \frac{\mathfrak{B}}{1 - \mathfrak{B}} = -12{,}24100 \quad \text{et} \quad \log(-B) = 1{,}0878169.$$

Porro $C = -\theta(1 - \mathfrak{B}) = 0{,}2965$, hincque ob $BC + C + \theta = 0$ colligimus

$$BC = -C - \theta = +\theta - \theta\mathfrak{B} - \theta = -\theta\mathfrak{B} = -3{,}6298 \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = \frac{C}{C+1} = 0{,}22869.$$

Sint nunc radii facierum primae lentis F et G, secundae F' et G' ac tertiae F'' et G''; ob distantias determinatrices

$$a = \infty, \quad b = \frac{-\gamma}{BC}, \quad c = \frac{\gamma}{C}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{BC}, \quad \beta = \frac{-\gamma}{C}, \quad \gamma = \gamma$$

et numeros $\lambda = 1$, $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$ erit

$$F = \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\gamma}{BC\sigma}, \qquad G = \frac{\alpha}{\varrho} = \frac{\gamma}{BC\varrho},$$

$$F' = \frac{b\beta}{\varrho'\beta + \sigma' b} = \frac{-\gamma}{BC\varrho' + C\sigma'}, \qquad G' = \frac{b\beta}{\varrho' b + \sigma'\beta} = \frac{-\gamma}{BC\sigma' + C\varrho'},$$

$$F'' = \frac{c\gamma}{\varrho\gamma + \sigma c} = \frac{\gamma}{C\varrho + \sigma}, \qquad G'' = \frac{c\gamma}{\sigma\gamma + \varrho c} = \frac{\gamma}{C\sigma + \varrho}.$$

Cum igitur sit $\varrho = 0{,}1414$, $\sigma = 1{,}5827$ et $\varrho' = 0{,}2267$, $\sigma' = 1{,}6607$ calculo instituto obtinebimus:

$$\begin{aligned} F &= -0{,}1741\gamma, & G &= -1{,}9484\gamma, \\ F' &= +3{,}0243\gamma, & G' &= +0{,}1678\gamma, \\ F'' &= +0{,}6155\gamma, & G'' &= +1{,}6376\gamma. \end{aligned}$$

At pro lente oculari radius utriusque faciei erit $= -0{,}0424\gamma$. Inter illos autem radios minimus est $0{,}1678\gamma$; cuius parti quartae $0{,}0419\gamma$ si aequetur $x = my = 25y = \frac{1}{2}$ dig., prodibit $\gamma = 12$ dig.

Longitudo telescopii erit $= \gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) = 11{,}52$ dig. et semidiameter campi apparentis ob $\pi = 0$ et $\pi' = 0$ fiet $\Phi = -\frac{\pi''}{m-1}$, et sumto $\pi'' = -\frac{1}{4}$ erit $\Phi = \frac{1}{96}$ in partibus radii vel $\Phi = 35\frac{3}{4}$ min. prim., quem oculus uno obtutu conspiceret, si semidiameter pupillae aequalis esset semidiametro aperturae lentis ocularis, hoc est

$$= \frac{1}{4}\frac{\gamma}{m} = \frac{\gamma}{100} = \frac{3}{25} \text{ dig.};$$

alioquin si pupilla minor esset, in eadem ratione campus

EXEMPLUM 2

147. Posita multiplicatione $m = 50$ construere hu
valore priore ipsius $\mathfrak{B}$.

Cum sit $m = 50$, erit $\mathfrak{B} = +1,08925$, ex quo sequitur

$$B = \frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}} = -12,2045 \quad \text{et} \quad \log(-B) = 1,0865194.$$

Porro

$$C = 0,2975 \quad \text{et} \quad BC = -3,6308.$$

Cum igitur praecedentes formulae etiam nunc locum habeant, radii singularum facierum ita reperiuntur expressi:

$$\begin{aligned} F &= -0,1740\gamma, & G &= -1,9478\gamma, \\ F' &= +3,0375\gamma, & G' &= +0,1678\gamma, \\ F'' &= +0,6155\gamma, & G'' &= +1,6333\gamma. \end{aligned}$$

Horum radiorum minimus est $0,1678\gamma$, cuius parti quartae $0,0419\gamma$ aequalis statui debet semidiameter aperturae $x = my = 1$ dig., ex quo definitur $\gamma = \frac{1}{0,0419} = 23,87$ dig., ita ut statui possit $\gamma = 24$ dig. Tum autem erit distantia focalis lentis ocularis $= \frac{-\gamma}{m} = \frac{-12}{25}$ dig. radiusque utriusque faciei $1,06 \cdot \frac{12}{25} = 0,509$ dig.

Longitudo ergo huius telescopii erit $= \gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) = 23,52$ dig. et semidiameter campi apparentis $\Phi = -\frac{\pi''}{49} = \frac{1}{196}$ et in minutis primis $\Phi = 17\frac{1}{2}$ minut.

SCHOLION

148. Ad maiorem multiplicationem hunc calculum non prosequor, quia differentia prodiret tam exigua, ut ab artificibus vix videatur exsequenda; quare eadem exempla etiam ab altero valore pro $\mathfrak{B}$ invento evolvamus.

EXEMPLUM 3

149. Posita multiplicatione $m = 25$ construere huiusmodi telescopium ex valore posteriore ipsius $\mathfrak{B}$.

Cum sit $m = 25$, erit $\mathfrak{B} = -0,38954$ et $1 - \mathfrak{B} = 1,38954$, unde fit

$$B = \frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}} = -0,280337 \quad \text{et} \quad \log(-B) = 9,4476805;$$

deinde fiet

$$C = -\theta(1 - \mathfrak{B}) = -4,6318 \quad \text{et} \quad BC = +1,29850.$$

Quia igitur formulae pro radiis facierum manent ut supra, inveniemus eos, ut sequitur:

$$F = +0{,}486641\gamma, \quad G = +5{,}44632\gamma,$$
$$F' = +0{,}13523\ \gamma, \quad G' = -0{,}90450\gamma,$$
$$F'' = +1{,}07785\ \gamma, \quad G'' = -0{,}13719\gamma.$$

Inter hoc radios minimus est $0{,}13523\gamma$, cuius parti quartae $0{,}03381\gamma$ aequari debet semidiameter aperturae $x = my = \frac{1}{2}$ dig., unde $\gamma = \frac{1}{0{,}06762} = 15$ dig., ita ut telescopii longitudo $= \gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) = 14\frac{2}{5}$ dig.; distantia autem focalis lentis ocularis erit $= -\frac{3}{5}$ dig., ita ut radius faciei utriusque $= 0{,}6360$ dig., et semidiameter campi apparentis erit ut supra $\Phi = 35\frac{3}{4}$ min., qui ab oculo uno obtutu vel saltim successive conspici poterit.

EXEMPLUM 4

150. Posita multiplicatione $m = 50$ construere huiusmodi telescopium ex valore posteriore ipsius $\mathfrak{B}$.

Cum sit $m = 50$, erit $\mathfrak{B} = -0{,}38983$ et $1 - \mathfrak{B} = 1{,}38983$; unde colligitur $C = -4{,}6328$ et $BC = +1{,}2995$.

Cum igitur formulae pro radiis facierum maneant eaedem, ex iis facto calculo nanciscemur:

$$F = +0{,}48624\gamma, \quad G = +5{,}44218\gamma,$$
$$F' = +0{,}13520\gamma, \quad G' = -0{,}90338\gamma,$$
$$F'' = +1{,}07802\gamma, \quad G'' = -0{,}13906\gamma.$$

Inter quos radios minimus est $0{,}13520\gamma$, cuius parti quartae $0{,}03380\gamma$ aequari debet semidiameter aperturae $x = my = 1$ dig., unde $\gamma = 29$ dig. et distantia focalis lentis ocularis $= -0{,}58$ dig. et radius utriusque faciei $= 0{,}6148$ dig. Longitudo ergo telescopii erit $= 28{,}42$ dig. et semidiameter campi $\Phi = 17\frac{1}{2}$ min.

SCHOLION

151. Etsi haec telescopia quatuor lentibus revera constant, ea tamen quasi tantum ex duabus lentibus composita spectare licet, propterea quod tres priores lentes in unam coaluerunt, ut lens obiectiva fieret triplicata et

meliore successu loco lentium triplicatarum perfectarum supra traditarum usurpanda, quandoquidem iam vidimus lentibus illis perfectis solam ipsarum confusionem utriusque generis annihilari, ita ut confusio lentis ocularis etiam nunc tota subsisteret; quamobrem lentes triplicatas hic in usum vocatas data opera ita instruximus, ut non essent perfectae, sed ut iis etiam confusio lentis ocularis ad nihilum redigeretur, quae si modo artifex exactissime perficere posset, nihil amplius desiderari posse videretur. Verum duabus adhuc difficultatibus haec telescopia premuntur; altera est, quod tribus huiusmodi lentibus coniungendis crassities ita fiat modica, ut non amplius tanquam evanescens spectari possit, quemadmodum calculus noster postulat; unde etiamsi artifex nostras mensuras exactissime exsequi valeret, neutiquam tamen perfectus consensus inter theoriam et praxin sperari posset; altera difficultas in angustia campi apparentis est posita, maximeque est optandum, ut campo maior amplitudo concilietur; quo igitur huic duplici incommodo consulamus, in sequenti capite hanc investigationem ulterius prosequamur, dum huius generis telescopiis revera plures duabus lentes tribuemus, quae omnes a se invicem certis intervallis sint disiunctae, ubi imprimis in hoc erit inquirendum, num hoc modo etiam utriusque generis confusio aeque feliciter tolli possit, deinde vero num hoc modo campus apparens magis amplificari possit, ac si praeterea longitudo horum telescopiorum minor prodiret, tum certe iis summus perfectionis gradus conciliatus esset censendus.

CAPUT V

DE ULTERIORE TELESCOPIORUM PRIMI GENERIS PERFECTIONE UNA PLURIBUSVE LENTIBUS ADIICIENDIS

PROBLEMA 1

152. *Si huiusmodi telescopium primi generis ex tribus lentibus a se invicem separatis sit conficiendum, investigare momenta, quibus ei maximus perfectionis gradus conciliari queat.*

SOLUTIO

Manentibus perpetuo omnibus elementis, ut in principio sunt constituta, consideremus primo aequationem $m = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{c}$, in qua ambae fractiones $\frac{\alpha}{b}$ et $\frac{\beta}{c}$ debent esse negativae ac praeterea intervalla $\alpha + b$ ac $\beta + c$ positiva, et quoniam nunc non debet esse $\frac{\alpha}{b} = -1$, ne binae priores lentes coalescant, statuamus $\frac{\alpha}{b} = -k$, ut fiat $m = -k \cdot \frac{\beta}{c}$ hincque $\beta = \frac{-mc}{k}$ sive $c = \frac{-\beta k}{m}$ et $\alpha = -bk$, unde ob $\beta = Bb$ omnes hae distantiae per α sequenti modo determinantur:

$$b = -\frac{\alpha}{k}, \quad \beta = -\frac{B\alpha}{k} \quad \text{et} \quad c = +\frac{B\alpha}{m},$$

existente $\gamma = \infty$. Hinc igitur esse oportebit $\alpha\left(1 - \frac{1}{k}\right) > 0$, $\alpha B\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{k}\right) > 0$ seu, quia m et k sunt positiva,

$$\alpha(k-1) > 0 \quad \text{et} \quad \alpha B(k-m) > 0$$

ideoque etiam $\frac{B(k-m)}{k-1}$ debet esse > 0. Quocirca duo casus erunt perpe

Prior casus, quo α est quantitas positiva; tum debet esse $k > 1$; tum vero vel $k > m$, si B sit positivum, vel $k < m$, si $B < 0$. *Altero casu*, quo α est negativum, debet esse $k < 1$; tum vero vel $k > m$, si B sit negativum, vel $k < m$, si B sit positivum, ubi ob $m > 1$ illa conditio $k > m$ sponte cadit.

His igitur praemissis primo ad nihilum redigamus formulam pro semidiametro confusionis supra datam (§ 42):

$$0 = \mu\lambda + \frac{\mu' q}{\mathfrak{B}^2 p}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu'}{B}\right) + \frac{\mu''\lambda''}{B^3 m}$$

sive ob $q = -\frac{\alpha\mathfrak{B}}{k}$ et $p = \alpha$

$$0 = \mu\lambda - \frac{\mu'}{\mathfrak{B}k}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu'}{B}\right) + \frac{\mu''\lambda''}{B^3 m},$$

quae redit ad hanc formam

$$\text{I.)}\quad 0 = \mu\lambda - \frac{\mu'\lambda'}{\mathfrak{B}^3 k} + \frac{\mu''\lambda''}{B^3 m} - \frac{\mu'\nu'}{\mathfrak{B}Bk}.$$

Deinde ut margo coloratus tollatur, ob $O = 0$ haec habetur aequatio (§ 52)

$$0 = \frac{dn}{n-1}\cdot B\pi' - \frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{1}{k}\left((B+1)\pi' - \pi\right)$$

atque ut haec confusio penitus evertatur habetur ex § 54

$$0 = \frac{dn}{n-1}\cdot\frac{1}{p} + \frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{q} + \frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{r}.$$

Ad has aequationes resolvendas primo ratio inter π et π' debet definiri, id quod facillime praestabitur per formulas fundamentales in ipso initio propositas:

$$\frac{\pi}{\Phi} = \frac{\alpha + b}{q} = \frac{1-k}{\mathfrak{B}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = \frac{B\alpha}{c} = m,$$

ex quibus colligitur

$$\pi = \frac{(1-k)\Phi}{\mathfrak{B}}$$

et

$$\pi' = (m-1)\Phi + \pi = \frac{1-k+(m-1)\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\Phi,$$

ita ut sit

$$\pi : \pi' = 1-k : 1-k+(m-1)\mathfrak{B} = 1 : 1 + \frac{m-1}{1-k}\mathfrak{B};$$

dente, si fuerit $\pi < 0$; quod cum hic fieri nequeat, in hoc casu campus maior non est exspectandus.

4. Si $k = \frac{N'}{N''} m$, erit $\pi : \pi' = 1 : 1$, unde $\pi = \pi'$ et $\pi' - \pi = 0$, quo ergo casu campus apparens plane evanesceret.

COROLLARIUM 4

156. Hinc ergo concludimus, ut maiorem campum obtineamus quam ante, necessario requiri, ut sit $N' > N$, atque k capi debere intra limites 1 et $\frac{N'}{N}$, qui posterior limes cum sit unitate maior, etiam k erit maius unitate; ex quo sequitur distantiam α capi debere positivam, quia $\alpha(k-1) > 0$.

COROLLARIUM 5

157. Cum igitur ob eam causam potissimum plures lentes adhibeamus, ut maiorem campum obtineamus, ex pluribus illis casibus, prout litterae N' N', N'' inter se variare possunt, hic unicus nobis relinquitur, quo $N' > N$ atque k inter limites 1 et $\frac{N'}{N}$ sumitur.

SCHOLION 1

158. In his corollariis usi sumus eo valore ipsius $\mathfrak{B}$, quem ex tertia aequatione deduximus. Supra autem iam observavimus hanc aequationem ita esse comparatam, ut de ea nunquam omnino certi esse queamus; cum enim valores litterarum N, N', N'' etc. ex nulla theoria adhuc definiri possint, sed tantum per experimenta, qualia a DOLLONDO sunt instituta, concludantur, quantacunque cura et sollertia in iis adhibeatur, nunquam tamen tantum praecisionis gradum sperare licet, ut non error satis notabilis sit pertimescendus; quam ob causam etiam valor ipsius $\mathfrak{B}$ inde deductus pro vero haberi non poterit, sed contentos nos esse oportet, si modo hunc valorem propemodum cognoverimus, id quod ipsa etiam rei natura confirmatur; quia enim aequatio nostra tertia spatium diffusionis, per quod imagines diversicolores sunt diffusae, prorsus ad nihilum redigit, facile intelligitur ad praxin sufficere, dummodo hoc spatium reddatur satis exiguum, praecipue postquam id praestiterimus, ut margo coloratus dispareat; inprimis igitur valor litterae $\mathfrak{B}$ ex secunda aequatione determinari debet; qui si ita fuerit comparatus, ut tantum praeterpropter tertiae aequationi satisfaciat, confusio inde oriunda eo magis

deinde brevitatis gratia statuamus

$$\frac{dn}{n-1} = N, \quad \frac{dn'}{n'-1} = N', \quad \frac{dn''}{n''-1} = N'',$$

atque hinc secunda et tertia aequatio transformabuntur in sequentes:

$$\text{II.)}\ 0 = NB(1-k+(m-1)\mathfrak{B}) - N'\frac{1}{k}(B(1-k)+(B+1)(m-1)\mathfrak{B})$$

sive

$$0 = (m-1)N\mathfrak{B} + (1-k)N - \frac{m-k}{k}N',$$

$$\text{III.)}\ 0 = N - \frac{N'}{k\mathfrak{B}} + \frac{N''}{mB}.$$

Ex utraque harum aequationum definiri potest valor ipsius $\mathfrak{B}$. Ex secunda

$$\mathfrak{B} = \frac{m-k}{(m-1)k}\frac{N'}{N} - \frac{1-k}{m-1}.$$

Ex tertia vero sequitur

$$\mathfrak{B} = \frac{mN'-kN''}{k(mN-N'')}.$$

Videamus, an posterior valor ipsius $\mathfrak{B} = \frac{mN'-kN''}{k(mN-N'')}$ cum conditione ante inventa $\frac{B(k-m)}{k-1} > 0$ subsistere possit. Hunc in finem ob $B = \frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}}$ quaeramus $1-\mathfrak{B}$, fietque

$$1-\mathfrak{B} = \frac{m(kN-N')}{k(mN-N'')}$$

eritque

$$B = \frac{mN'-kN''}{m(kN-N')},$$

unde conditio nostra postulat, ut sit

$$\frac{(mN'-kN'')(k-m)}{m(kN-N')(k-1)} > 0;$$

quae, si esset $N = N' = N''$, abiret in hanc $\frac{-(k-m)^2}{m(k-1)^2} > 0$, quod est impossibile; eatenus igitur tantum haec conditio locum habere poterit, quatenus litterae N, N', N'' sunt inaequales, id quod eveniet, si numerator prodeat positivus, quod fit, si uterque eius factor vel fiat positivus vel uterque negativus; priori casu $mN' - kN'' > 0$ ideoque $k < m\frac{N'}{N''}$ et $k > m$, quod fieri potest, si modo sit $\frac{N'}{N''} > 1$ sive $N' > N''$. Pro altero vero casu, quo uterque factor est negativus, erit $k < m$ et $k > \frac{N'}{N''}m$, quod fieri potest, si modo sit $\frac{N'}{N''} < 1$ seu

Prior casus, quo α est quantitas positiva; tum debet esse $k > 1$; tum vero vel $k > m$, si B sit positivum, vel $k < m$, si $B < 0$. *Altero casu,* quo α est negativum, debet esse $k < 1$; tum vero vel $k > m$, si B sit negativum, vel $k < m$, si B sit positivum, ubi ob $m > 1$ illa conditio $k > m$ sponte cadit.

His igitur praemissis primo ad nihilum redigamus formulam pro semidiametro confusionis supra datam (§ 42):

$$0 = \mu\lambda + \frac{\mu' q}{\mathfrak{B}^2 p}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu'}{B}\right) + \frac{\mu''\lambda''}{B^3 m}$$

sive ob $q = -\frac{\alpha\mathfrak{B}}{k}$ et $p = \alpha$

$$0 = \mu\lambda - \frac{\mu'}{\mathfrak{B}k}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu'}{B}\right) + \frac{\mu''\lambda''}{B^3 m},$$

quae redit ad hanc formam

$$\text{I.)} \quad 0 = \mu\lambda - \frac{\mu'\lambda'}{\mathfrak{B}^3 k} + \frac{\mu''\lambda''}{B^3 m} - \frac{\mu'\nu'}{\mathfrak{B}Bk}.$$

Deinde ut margo coloratus tollatur, ob $O = 0$ haec habetur aequatio (§ 52)

$$0 = \frac{dn}{n-1}\cdot B\pi' - \frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{1}{k}\left((B+1)\pi' - \pi\right)$$

atque ut haec confusio penitus evertatur habetur ex § 54

$$0 = \frac{dn}{n-1}\cdot\frac{1}{p} + \frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{q} + \frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{r}.$$

Ad has aequationes resolvendas primo ratio inter π et π' debet definiri, id quod facillime praestabitur per formulas fundamentales in ipso initio propositas:

$$\frac{\pi}{\Phi} = \frac{\alpha + b}{q} = \frac{1-k}{\mathfrak{B}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = \frac{B\alpha}{c} = m,$$

ex quibus colligitur

$$\pi = \frac{(1-k)\Phi}{\mathfrak{B}}$$

et

$$\pi' = (m-1)\Phi + \pi = \frac{1 - k + (m-1)\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\Phi,$$

ita ut sit

$$\pi : \pi' = 1 - k : 1 - k + (m-1)\mathfrak{B} = 1 : 1 + \frac{m-1}{1-k}\mathfrak{B};$$

deinde brevitatis gratia statuamus

$$\frac{dn}{n-1}=N,\quad \frac{dn'}{n'-1}=N',\quad \frac{dn''}{n''-1}=N'',$$

atque hinc secunda et tertia aequatio transformabuntur in sequentes:

$$\text{II.)}\ 0=NB(1-k+(m-1)\mathfrak{B})-N'\frac{1}{k}(B(1-k)+(B+1)(m-1)\mathfrak{B})$$

sive

$$0=(m-1)N\mathfrak{B}+(1-k)N-\frac{m-k}{k}N',$$

$$\text{III.)}\ 0=N-\frac{N'}{k\mathfrak{B}}+\frac{N''}{mB}.$$

Ex utraque harum aequationum definiri potest valor ipsius $\mathfrak{B}$. Ex secunda

$$\mathfrak{B}=\frac{m-k}{(m-1)k}\frac{N'}{N}-\frac{1-k}{m-1}.$$

Ex tertia vero sequitur

$$\mathfrak{B}=\frac{mN'-kN''}{k(mN-N'')}.$$

Videamus, an posterior valor ipsius $\mathfrak{B}=\frac{mN'-kN''}{k(mN-N'')}$ cum conditione ante inventa $\frac{B(k-m)}{k-1}>0$ subsistere possit. Hunc in finem ob $B=\frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}}$ quaeramus $1-\mathfrak{B}$, fietque

$$1-\mathfrak{B}=\frac{m(kN-N')}{k(mN-N'')}$$

eritque

$$B=\frac{mN'-kN''}{m(kN-N')},$$

unde conditio nostra postulat, ut sit

$$\frac{(mN'-kN'')(k-m)}{m(kN-N')(k-1)}>0;$$

quae, si esset $N=N'=N''$, abiret in hanc $\frac{-(k-m)^2}{m(k-1)^2}>0$, quod est impossibile; eatenus igitur tantum haec conditio locum habere poterit, quatenus litterae N, N', N'' sunt inaequales, id quod eveniet, si numerator prodeat positivus, quod fit, si uterque eius factor vel fiat positivus vel uterque negativus; priori casu $mN'-kN''>0$ ideoque $k<m\frac{N'}{N''}$ et $k>m$, quod fieri potest, si modo sit $\frac{N'}{N''}>1$ sive $N'>N''$. Pro altero vero casu, quo uterque factor est negativus, erit $k<m$ et $k>\frac{N'}{N''}m$, quod fieri potest, si modo sit $\frac{N'}{N''}<1$ seu

$N' < N''$; unde patet pro utroque casu litteras N' et N'' inaequales esse debere seu lentem secundam et tertiam ex diversis vitri speciebus confici debere. In genere autem patet k non multum ab m differre posse.

Sequuntur haec, si numerator statuatur positivus; si vero numerator sit negativus, etiam denominatorem oportet esse negativum, pro quo etiam duos casus habemus. Pro priori casu, si sit $k > 1$, debet esse $kN < N'$ ideoque $k < \frac{N'}{N}$; pro posteriori, si $k < 1$, debet simul esse $k > \frac{N'}{N}$; pro quorum utroque prima et secunda lens debent esse ex diverso vitro formatae. Verum ex his quatuor casibus eum eligi convenit, qui ambos valores pro $\mathfrak{B}$ inventos proxime aequales reddat; denique autem, postquam $\mathfrak{B}$ et k convenienter definiverimus, ex prima aequatione sive λ sive λ' quaeri debet, quia λ'' iam inde datur, quod lens ocularis debeat esse utrinque aequaliter concava.

COROLLARIUM 1

153. Quatuor illi casus pro determinatione litterae k facile ad duas sequentes conditiones reducuntur; nam

$$\text{vel 1.}\quad k \text{ sumi debet intra limites } 1 \text{ et } \frac{N'}{N}$$

$$\text{vel 2.}\quad k \text{ sumi debet intra limites } m \text{ et } \frac{N'}{N''}m,$$

ita ut numerus iste k proxime vel unitati vel multiplicationi m aequalis accipi debeat, quoniam fractiones $\frac{N'}{N}$ et $\frac{N'}{N''}$ parumper tantum ab unitate differunt.

COROLLARIUM 2

154. Operae igitur pretium erit investigare casus, quibus k ipsi alterutri limiti aequalis statuitur.

1. Si $k = 1$, foret intervallum inter primam et secundam lentem $= 0$ et

$$\mathfrak{B} = \frac{mN' - N''}{mN - N''} \quad \text{et} \quad B = \frac{mN' - N''}{m(N - N')}$$

et inter secundam et tertiam lentem $= B\alpha\left(\frac{1-m}{m}\right)$, unde colligitur, utrum α positivum an negativum sumi debeat.

2. Si $k = \frac{N'}{N}$, fit intervallum inter primam et secundam lentem $= \frac{N' - N}{N}\alpha$, quod cum positivum esse debeat, patet, utrum α positive an negative sumi

oporteat; tum vero erit $\mathfrak{B}=1$ et $B=\infty$, unde $\beta+c$ seu distantia inter secundam et tertiam lentem fieret $=\infty$.

3. Si $k=m$, intervallum secundae et tertiae lentis evanescet fietque

$$\mathfrak{B}=\frac{N'-N''}{mN-N''} \quad \text{et} \quad B=\frac{N'-N''}{mN-N'},$$

intervallum vero inter primam et secundam lentem $\frac{\alpha(k-1)}{k}=\frac{\alpha(m-1)}{m}$, ubi manifesto α debet esse quantitas positiva.

4. Si $k=\frac{N'}{N''}m$, fiet $\mathfrak{B}=0$ et $B=0$; unde fieret distantia inter secundam et tertiam lentem $=0$.

Cum igitur neque lentium distantias nullas neque infinitas admitti conveniat, numerus k nulli limitum prorsus aequalis sumi poterit.

COROLLARIUM 3

155. Quod porro ad campum apparentem attinet, qui pendet a formula $\pi'-\pi$, quia invenimus $\pi:\pi'=1:1+\frac{m-1}{1-k}\mathfrak{B}$, erit pro memoratis quatuor casibus:

1. Si $k=1$, erit $\pi:\pi'=1:\infty$, hinc $\pi=0$; ita ut pro campo apparente haberetur $\Phi=\frac{\pi'}{m-1}$.

2. Si $k=\frac{N'}{N}$, fiet

$$\pi:\pi'=1:1+\frac{mN-N}{N-N'}=1:\frac{mN-N'}{N-N'}$$

hincque

$$\pi=\frac{N-N'}{mN-N'}\pi' \quad \text{et} \quad \pi'-\pi=\frac{N(m-1)}{mN-N'}\pi',$$

sicque pro campo apparente fiet $\Phi=\frac{N}{mN-N'}\pi'$; sicque Φ maius evadet, si $\frac{N}{mN-N'}>\frac{1}{m-1}$, hoc est, si $N<N'$, quod ergo eveniet, si prima lens ex vitro coronario, secunda ex crystallino paretur.

3. Si $k=m$, erit

$$\pi:\pi'=1:\frac{mN-N'}{mN-N''} \quad \text{seu} \quad \pi=\frac{mN-N''}{mN-N'}\pi'.$$

Unde colligitur campum apparentem maiorem fieri quam in capite praece-

dente, si fuerit $\pi < 0$; quod cum hic fieri nequeat, in hoc casu campus maior non est exspectandus.

4. Si $k = \frac{N'}{N''}m$, erit $\pi:\pi' = 1:1$, unde $\pi = \pi'$ et $\pi' - \pi = 0$, quo ergo casu campus apparens plane evanesceret.

COROLLARIUM 4

156. Hinc ergo concludimus, ut maiorem campum obtineamus quam ante, necessario requiri, ut sit $N' > N$, atque k capi debere intra limites 1 et $\frac{N'}{N}$, qui posterior limes cum sit unitate maior, etiam k erit maius unitate; ex quo sequitur distantiam α capi debere positivam, quia $\alpha(k-1) > 0$.

COROLLARIUM 5

157. Cum igitur ob eam causam potissimum plures lentes adhibeamus, ut maiorem campum obtineamus, ex pluribus illis casibus, prout litterae N' N', N'' inter se variare possunt, hic unicus nobis relinquitur, quo $N' > N$ atque k inter limites 1 et $\frac{N'}{N}$ sumitur.

SCHOLION 1

158. In his corollariis usi sumus eo valore ipsius $\mathfrak{B}$, quem ex tertia aequatione deduximus. Supra autem iam observavimus hanc aequationem ita esse comparatam, ut de ea nunquam omnino certi esse queamus; cum enim valores litterarum N, N', N'' etc. ex nulla theoria adhuc definiri possint, sed tantum per experimenta, qualia a DOLLONDO sunt instituta, concludantur, quantacunque cura et sollertia in iis adhibeatur, nunquam tamen tantum praecisionis gradum sperare licet, ut non error satis notabilis sit pertimescendus; quam ob causam etiam valor ipsius $\mathfrak{B}$ inde deductus pro vero haberi non poterit, sed contentos nos esse oportet, si modo hunc valorem propemodum cognoverimus, id quod ipsa etiam rei natura confirmatur; quia enim aequatio nostra tertia spatium diffusionis, per quod imagines diversicolores sunt diffusae, prorsus ad nihilum redigit, facile intelligitur ad praxin sufficere, dummodo hoc spatium reddatur satis exiguum, praecipue postquam id praestiterimus, ut margo coloratus dispareat; inprimis igitur valor litterae $\mathfrak{B}$ ex secunda aequatione determinari debet; qui si ita fuerit comparatus, ut tantum praeterpropter tertiae aequationi satisfaciat, confusio inde oriunda eo magis

negligi poterit, quod etiam in telescopiis ex una vitri specie paratis non adeo nocere deprehenditur. Verum ex secunda aequatione valorem ipsius $\mathfrak{B}$ pro eo etiam casu definire licet, quo omnes lentes ex eadem vitri specie essent confectae, ita ut foret $N = N' = N''$; tum enim concluderetur

$$\mathfrak{B} = \frac{m-k}{(m-1)k} - \frac{1-k}{m-1} = \frac{m-2k+k^2}{(m-1)k};$$

quo valore si velimus uti, ut conditio supra praescripta $B\frac{k-m}{k-1} > 0$ adimpleatur, cum inde sit $1 - \mathfrak{B} = \frac{mk-m+k-k^2}{(m-1)k} = \frac{(k-1)(m-k)}{(m-1)k}$, erit

$$B = \frac{m-2k+k^2}{(k-1)(m-k)} \quad \text{hincque conditio} \quad \frac{-m+2k-k^2}{(k-1)^2} > 0;$$

in qua cum denominator certe sit positivus, etiam numerator talis esse debet adeoque

$$1 - m - (k-1)^2 > 0,$$

quod fieri nequit. Ex quo perspicuum est hoc casu marginem coloratum plane tolli non posse.

Videamus igitur, si diverso vitro utamur, num hoc vitium effugere queamus. Hunc in finem ponamus brevitatis gratia $\frac{N'}{N} = \xi$, ut ξ sit numerus unitatem vel tantillum superans vel ab ea deficiens, et cum sit

$$\mathfrak{B} = \frac{(m-k)\xi + k(k-1)}{(m-1)k}, \quad \text{erit} \quad B = \frac{(m-k)\xi + k(k-1)}{(m-k)(k-\xi)},$$

unde conditio nostra postulat, ut sit $\frac{(k-m)\xi - k(k-1)}{(k-1)(k-\xi)} > 0$. Hic duo casus sunt considerandi.

I. Si denominator sit positivus, quod fit, vel si $k > \xi$ et $k > 1$, vel si $k < \xi$ et $k < 1$. Tum enim esse debet $(k-m)\xi - k(k-1) > 0$ sive

$$\frac{(1+\xi)^2}{4} - m\xi > \left(k - \frac{1}{2}(1+\xi)\right)^2,$$

quod, cum m notabiliter superet unitatem, ξ vero ab unitate parum differat, manifesto fieri nequit.

II. Si denominator sit negativus, quod fit, si k continetur intra limites ξ et 1. Tum vero numerator debet etiam esse negativus seu

$$(k-m)\xi - k(k-1) < 0 \quad \text{sive} \quad \frac{(1+\xi)^2}{4} - m\xi < \Big($$

praecedentibus scholiis sunt tradita, sequentes nobis suppeditant determinationes:

I. Pro distantiis determinatricibus

$$b = -\frac{7}{8}\alpha, \quad \beta = \frac{35(7m-8)+28}{8(7m-8)}\alpha \quad \text{vel} \quad \beta = \frac{7(35m-36)}{8(7m-8)}\alpha,$$

$$c = \frac{-35m+36}{m(7m-8)}\alpha.$$

II. Pro intervallis lentium

$$\alpha + b = \frac{1}{8}\alpha, \qquad \beta + c = \frac{35m-36}{8m}\alpha$$

et longitudo telescopii $= \frac{9(m-1)}{2m}\alpha$.

Hic observandum est, cum α sit distantia focalis primae lentis eiusque semidiameter aperturae esse debeat $x = my = \frac{m}{50}$ dig., istam distantiam α minorem esse non posse quam $5x$ seu $\frac{m}{10}$ dig., ita ut sit $\alpha > \frac{m}{10}$ dig.; quare, si capiatur verbi gratia $m = 50$, longitudo telescopii prodiret maior quam $\frac{9 \cdot 49}{20}$ dig., maior quam 22 dig., et si fieri debeat $m = 100$, ea maior esse deberet quam $\frac{9 \cdot 99}{20}$ dig., maior quam 44 dig.; quae distantia cum facile tolerari queat, manifestum est haec telescopia etiam ad maiores multiplicationes adhiberi posse; pro minoribus autem multiplicationibus eximium certe usum praestant, cum, si statuatur $m = 5$, longitudo prodeat $> \frac{36}{20}$ dig., maior quam $\frac{9}{5}$ dig., sumtoque $m = \frac{5}{2}$ ea prodeat $> \frac{27}{40}$ dig.

Pro campo autem apparente habebimus eius semidiametrum

$$\Phi = \frac{\pi'}{m-1}\left(1 + \frac{4}{5(7m-8)}\right)$$

ideoque aliquantum maior quam casu praecedente, praesertim si multiplicatio fuerit exigua. Notentur etiam distantiae focales harum lentium p, q, r, et cum sit

$$\mathfrak{B} = \frac{35m-36}{28(m-1)} \quad \text{et} \quad B = \frac{35m-36}{-7m+8},$$

erit

$$p = \alpha, \quad q = \frac{-(35m-36)\alpha}{32(m-1)}, \quad r = \frac{-(35m-36)\alpha}{m(7m-8)}$$

et semidiameter aperturae secundae lentis ex § 23 $\left[\text{pro } \alpha = 5x = \frac{m}{10}\right]$

$$= \frac{m(35m - 36)\pi'}{400(m-1)(7m-8)} + \frac{7m}{400}.^{1)}$$

Denique pro constructione harum lentium numeri λ, λ' et λ'' ita accipi debent, ut satisfiat primae nostrae aequationi, quae erat

$$0 = \mu\lambda - \frac{\mu'\lambda'}{\mathfrak{B}^3 k} + \frac{\mu''\lambda''}{B^3 m} - \frac{\mu'\nu'}{\mathfrak{B}Bk},$$

ubi notandum est, ut lens ocularis utrinque fiat aeque concava, statui debere $\lambda'' = 1{,}60006$, si haec lens sit ex vitro coronario ideoque $\mu'' = \mu$; sin autem sit ex vitro crystallino ideoque $\mu'' = \mu'$, fore $\lambda'' = 1{,}67445$ [§ 137]; haec autem aequatio non nisi casibus particularibus pro data multiplicatione evolvi poterit; ubi meminisse iuvabit fore

$$\mu = 0{,}9875, \quad \mu' = 0{,}8724, \quad \nu' = 0{,}2529, \quad \mu'\nu' = 0{,}2206.$$

EXEMPLUM 1

161. Si multiplicatio sit $m = \frac{5}{2}$, telescopium huius generis ex tribus lentibus constans describere.

Cum sit $m = \frac{5}{2}$, erunt distantiae determinatrices

$$b = -\frac{7}{8}\alpha, \quad \beta = \frac{721}{152}\alpha, \quad c = -\frac{206}{95}\alpha, \quad B = -\frac{103}{19}$$

et intervalla lentium

$$\alpha + b = \frac{1}{8}\alpha, \quad \beta + c = \frac{107}{40}\alpha$$

et longitudo telescopii $= \frac{27}{10}\alpha$ atque pro campo apparente fiet $\Phi = \frac{2\pi'}{3}\left(1 + \frac{8}{95}\right)$; sumto $\pi' = \frac{1}{4}$ et multiplicando per 3437 minut. erit angulus $\Phi = 10^0\, 21'\, 4''$.

Cum nunc sit $B = \frac{-103}{19}$, erit $\mathfrak{B} = \frac{103}{84}$ et habebimus

$$\text{Log.}\,(-B) = 0{,}7340836(-) \quad \text{et} \quad \text{Log.}\ \mathfrak{B} = 0{,}0885580;$$

1) Editio princeps: $\frac{m(35m-36)\pi'}{400(m-1)(7m-8)} + \frac{14(m-1)}{25}$. Correxit E. Ch.

aequatio autem pro confusione prima tollenda, si lentem ocularem ex vitro coronario faciamus, ut sit $\mu'' = \mu$ et $\lambda'' = 1{,}60006$, erit

$$\begin{aligned} 0 &= 0{,}9875\,\lambda - 0{,}4140\,\lambda' - 0{,}00396 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 0{,}02903 \\ \hline 0 &= 0{,}9875\,\lambda - 0{,}4140\,\lambda' + 0{,}02507, \end{aligned}$$

unde quaeratur λ', et habebitur $\lambda' = 2{,}3852\,\lambda + 0{,}06055$. Si ergo hic capiatur $\lambda = 1$, fiet $\lambda' = 2{,}4457$, unde fit $\lambda' - 1 = 1{,}4457$ et $\log. \sqrt{(\lambda' - 1)} = 0{,}0800391$; unde constructio singularum lentium sequenti modo se habebit, siquidem radii facierum primae lentis sint F et G, secundae F' et G' et tertiae F'' et G'':

I. Pro prima lente ex vitro coronario

$$F = \frac{\alpha}{\sigma} = 0{,}6024\,\alpha, \qquad G = \frac{\alpha}{\varrho} = 4{,}4111\,\alpha.$$

II. Pro secunda lente ex vitro crystallino

$$\frac{1}{F'} = \frac{\varrho\beta + \sigma b \mp \tau(b+\beta)\sqrt{\lambda' - 1}}{b\beta}, \qquad \frac{1}{G'} = \frac{\sigma\beta + \varrho b \pm \tau(b+\beta)\sqrt{\lambda' - 1}}{b\beta};$$

cum nunc sit

$$\log. \left(-\frac{b}{\alpha}\right) = \log. \frac{7}{8} = 9{,}9420080\,(-) \quad \text{et} \quad \log. \frac{\beta}{\alpha} = 0{,}6760917$$

$$\text{et} \ \log. \frac{(b+\beta)}{\alpha} = \log. \frac{147}{38} = 0{,}5875336,$$

$$\log. \sigma = 0{,}1993986, \quad \log. \varrho = 9{,}1501422\,^{1)}, \quad \log. \tau = 9{,}9432471.$$

Unde invenitur

$$\frac{1}{F'} = \frac{-0{,}7174 \mp 4{,}0815}{b\beta}\,\alpha, \qquad \frac{1}{G'} = \frac{+7{,}3838 \pm 4{,}0815}{b\beta}\,\alpha;$$

ut maiores numeri evitentur, sumantur signa inferiora, fietque

$$F' = \frac{b\beta}{3{,}3668\,\alpha} = -1{,}2327\,\alpha, \qquad G' = \frac{b\beta}{3{,}3021\,\alpha} = -1{,}2568\,\alpha.$$

---

1) Cum ex § 15 sit $\varrho = 0{,}1414$, est revera $\log. \varrho = 9{,}1504494$; quam ob differentiam etsi valores supra dati radiorum F' et G' non sunt plane accurati, tantulum tamen differunt a veris, ut sine damno retineri possint. E. Ch.

Pro lente oculari ex vitro coronario paranda, cum ea utrinque sit aeque concava eiusque distantia focalis sit $c = -\frac{206}{95}\alpha$, radius concavitatis pro utraque facie erit $= 2(n-1)c = -\frac{106 \cdot 206}{95}\alpha = -2{,}2978\,\alpha$.

Prima lens admittit aperturam, cuius semidiameter $x = 0{,}1506\,\alpha$. Nunc vero claritas postulat, ut sit $x = \frac{m}{50}$ dig. $= \frac{1}{20}$ dig., unde α maius quam $\frac{1}{3}$ dig. Sumatur ergo $\alpha = \frac{1}{2}$ dig. et constructio telescopii ita se habebit:

I. Pro lente prima radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = +\,0{,}3012 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = +\,2{,}2065 \text{ dig.} \end{cases}$ Crown Glass.

II. Pro lente secunda radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = -\,0{,}6163 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = -\,0{,}6284 \text{ dig.} \end{cases}$ Flint Glass.

III. Pro lente tertia radius utriusque faciei $= -1{,}1492$ dig., quae paratur ex Crown Glass.

Tum intervallum statuatur inter

$$\text{I et II} = \frac{1}{16} \text{ dig.} = 0{,}0625 \text{ dig.}$$

$$\text{II et III} = \frac{103}{80} \text{ dig.} = 1{,}2875 \text{ dig.},$$

ita ut tota telescopii longitudo sit futura

$$= 1{,}3500 \text{ dig.} = 1\tfrac{1}{3} \text{ dig.},$$

spatii vero visi semidiameter erit $= 10^{0}\,21'\,4''$.

EXEMPLUM 2

162. Si multiplicatio sit $m = 5$, telescopium huius generis ex tribus lentibus constans describere.

Cum sit $m = 5$, erit $7m - 8 = 27$ et $35m - 36 = 139$, unde distantiae determinatrices fient

$$b = -\frac{7}{8}\alpha = -\,0{,}8750\,\alpha, \qquad \beta = \frac{973}{216}\alpha = +\,4{,}5046\,\alpha,$$

$$c = \frac{-139}{5 \cdot 27}\alpha = -\,1{,}0296\,\alpha.$$

Hinc prodeunt lentium intervalla

$$\alpha + b = \frac{1}{8}\alpha, \quad \beta + c = 4{,}1951\,\alpha$$

et tota longitudo $= 4{,}3201\,\alpha$.

Pro campo autem apparente fiet $\Phi = \frac{\pi'}{24}\left(1 + \frac{4}{5\cdot 167}\right)$ hincque angulus $\Phi = 36$ minut. prim. circiter.

Cum iam porro sit $\mathfrak{B} = \frac{839}{28\cdot 24}$ et

$$\text{Log.}\ \mathfrak{B} = 0{,}0963927, \quad \text{Log.}\ (-B) = 0{,}7010454\ (-),$$

pervenietur ad sequentem aequationem

$$0 = 0{,}9875\,\lambda - 0{,}3922\,\lambda' - 0{,}0004984 + 0{,}03077$$

seu

$$0 = 0{,}9875\,\lambda - 0{,}3922\,\lambda' + 0{,}03028.$$

Quoniam vidimus valorem $\lambda = 1{,}60006$ longitudinem telescopii haud mediocriter diminuisse, statim ponamus $\lambda = 1{,}60006$ eritque

$$0 = 1{,}6103 - 0{,}3922\,\lambda',$$

unde prodit

$$\lambda' = 4{,}1057 \quad \text{et} \quad \lambda' - 1 = 3{,}1057 \quad \text{et} \quad \log. \sqrt{(\lambda' - 1)} = 0{,}2460797,$$

unde constructio singularum lentium ita se habebit:

I. Pro prima lente ex vitro coronario radius utriusque faciei $= 1{,}06\,\alpha$, quae ergo aperturam admittit, cuius semidiameter $x = 0{,}265\,\alpha$.

II. Pro secunda lente calculus ita se habebit:

$$\frac{1}{F'} = \frac{-0{,}7633 \pm 5{,}4449}{b\beta}\alpha, \quad \frac{1}{G'} = \frac{6{,}8338 \mp 5{,}4449}{b\beta}\alpha.$$

Valeant signa superiora eritque

$$F' = \frac{b\beta}{4{,}6816\,\alpha} = -0{,}8216\,\alpha, \quad G' = \frac{b\beta}{1{,}3889\,\alpha} = -2{,}7694\,\alpha.$$

III. Pro tertia lente ex vitro coronario radius utriusque faciei

$$= 1{,}06\,c = -0{,}21295\,\alpha.$$

Claritas autem postulat $x = \frac{m}{50}$ dig. $= \frac{1}{2}$ dig., unde concluditur $\alpha > 1{,}89$; sumatur ergo $\alpha = 2$ et constructio haec erit:

I. Pro lente prima radius utriusque faciei $= 2{,}12$ dig., Crown Glass.

II. Pro lente secunda radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = -1{,}6432 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = -5{,}5388 \text{ dig.} \end{cases}$ Flint Glass.

III. Pro lente tertia radius utriusque faciei $= -0{,}42590$ dig., Crown Glass.

Tum statuatur intervallum lentium

$$\text{I et II} = \tfrac{1}{4} \text{ dig.}, \qquad \text{II et III} = 8{,}3902 \text{ dig.}$$

et tota longitudo $= 8{,}64$ dig. campique apparentis semidiameter $x = 36'$ circiter.

EXEMPLUM 4

165. Si m debeat esse $= 50$, erit $7m - 8 = 342$, $35m - 36 = 1714$ adeoque distantiae

$$b = -\tfrac{7}{8}\alpha = -0{,}875\,\alpha, \quad \beta = 4{,}3852\,\alpha, \quad c = -0{,}10023\,\alpha,$$

$$\log. \tfrac{\beta}{\alpha} = 0{,}6419928, \quad \log. \left(\tfrac{-b}{\alpha}\right) = 9{,}9420081\,(-),$$

$$\log. \tfrac{(b+\beta)}{\alpha} = 0{,}5453319, \quad \log. \left(-\tfrac{b\beta}{\alpha^2}\right) = 0{,}5840009\,(-).$$

Tum vero intervalla lentium erunt

$$\alpha + b = \tfrac{1}{8}\alpha = 0{,}125\,\alpha, \quad \beta + c = 4{,}2850\,\alpha$$

hincque tota longitudo $= 4{,}4100\,\alpha$.

Porro reperitur

$$\text{Log. } (-B) = 0{,}6999847\,(-), \quad \text{Log. } \mathfrak{B} = 0{,}0966567.$$

Pro campo apparente reperitur

$$\Phi = \tfrac{\pi'}{49}\left(1 + \tfrac{4}{5 \cdot 342}\right) \text{ seu angulus } \Phi = 17\tfrac{1}{2} \text{ minut.}$$

Pro confusione tollenda statuatur statim in aequatione inventa $\lambda = 1,60006$ eritque

$$0 = 1,5801 - 0,3915\lambda' - 0,00025 + 0,03083$$

sive

$$0,3915\lambda' = 1,6107, \quad \text{unde} \quad \lambda' = 4,1141;$$

hinc

$$\lambda' - 1 = 3,1141 \quad \text{et} \quad \log. \sqrt{(\lambda' - 1)} = 0,2466663,$$

unde constructio singularum lentium ita se habebit:

I. Pro lente prima radius utriusque faciei $= 1,06\alpha$; quae ergo aperturam admittit, cuius semidiameter $= 0,265\alpha$.

II. Pro lente secunda

$$\frac{1}{F'} = \frac{-0,7653 \pm 5,4355}{b\beta}\alpha, \qquad \frac{1}{G'} = \frac{+6,8169 \mp 5,4355}{b\beta}\alpha.$$

Valeant ergo signa superiora eritque

$$F' = \frac{b\beta}{4,6702\alpha} = -0,8216\alpha, \qquad G' = \frac{b\beta}{1,3814\alpha} = -2,7776\alpha.$$

III. Pro lente tertia erit radius utriusque faciei

$$= 2(n-1)c = 1,06c = -0,10624\alpha.$$

Claritas autem postulat $x = \frac{m}{50} = 1$ dig., unde sequitur $\alpha > 3,8$; sumto ergo $\alpha = 4$ habebitur sequens telescopii constructio:

I. Pro lente prima, Crown Glass, radius utriusque faciei $= 4,24$ dig.

II. Pro lente secunda radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = -\ \ 3,2864 \\ \text{posterioris} = -11,1104 \end{cases}$ Flint Glass.

III. Pro lenta tertia, Crown Glass., radius utriusque faciei $= -0,42496$.

Tum vero statui debet intervallum lentium

$$\text{I et II} = 0,5 \text{ dig.}, \qquad \text{II et III} = 17,1400 \text{ dig.}$$

adeoque telescopii longitudo $= 17,6400$ dig.

Campi denique visi semidiameter inventus est $17\frac{1}{2}$ minut.

SCHOLION

166. Cum in his solutionibus littera λ indeterminata sit relicta, in tribus posterioribus exemplis eius loco non unitatem posuimus, ut ante fecimus, sed potius ei tribuimus illum valorem, quo ambae lentis facies inter se aequales redderentur, hocque modo insigne commodum sumus nacti, ut lens prima fere duplo maiorem aperturam admitteret hincque distantia α fere ad dimidium reduci posset. Ut autem in genere quaepiam lens, cuius distantiae determinatrices sunt a et α, ambas suas facies obtineat aequales, supra vidimus [Lib. I § 56] capi debere

$$\sqrt{(\lambda-1)}=\frac{(\sigma-\varrho)(a-\alpha)}{2\tau(a+\alpha)}=\frac{2(nn-1)}{n\sqrt{(4n-1)}}\cdot\frac{1-A}{1+A}$$

ob $\alpha=Aa$, unde fit

$$\lambda=1+\frac{4(nn-1)^2}{n^2(4n-1)}\cdot\frac{(1-A)^2}{(1+A)^2};$$

quare, si vel a vel α fuerit infinitum, uti fit tam in lente obiectiva quam in lente oculari, habebitur $\lambda=1+\frac{4(nn-1)^2}{n^2(4n-1)}$. Sin autem velimus, ut alia quaepiam lens obtineat ambas suas facies inter se aequales, tum ob

$$\frac{(1-A)^2}{(1+A)^2}=1-\frac{4A}{(1+A)^2}$$

capere debemus

$$\lambda=1+\frac{4(nn-1)^2}{n^2(4n-1)}-\frac{16(nn-1)^2A}{n^2(4n-1)(1+A)^2}.$$

Cum autem in nostra expressione pro semidiametro confusionis tum occurrat talis forma $\lambda(A+1)^2+\nu A$, valor istius formulae fiet

$$(A+1)^2+\frac{4(nn-1)^2(A+1)^2}{n^2(4n-1)}-\frac{16(nn-1)^2A}{nn(4n-1)}+\frac{4(n-1)^2A}{4n-1}.$$

Commodius autem erit hoc casu valorem ipsius λ pro facilitate calculi ita exprimere

$$\lambda=1+\frac{(\sigma-\varrho)^2(1-A)^2}{4\tau^2(1+A)^2}.$$

EXEMPLUM 5

167. Si multiplicatio m debeat esse valde magna vel saltim maior quam 25, huius generis telescopia ex tribus lentibus constantia describere.

Hic statim observo sumta prima lente utrinque aequaliter convexa fore radium utriusque curvaturae ut ante $=1{,}06\,\alpha$, quae admittet aperturam, cuius semidiameter $=\frac{1}{4}\alpha=x$; cum autem ob claritatem sumi debeat $x=\frac{m}{50}$ dig., hinc intelligimus semper statui posse $\alpha=\frac{2m}{25}=0{,}08\,m$ dig. et pro campo apparente $\Phi=\frac{\pi'}{m-1}$; sumtoque $\pi'=\frac{1}{4}$ erit $\Phi=\frac{859}{m-1}$ minut.

Nunc autem, ante quam reliquas partes constructionis definiamus, contemplemur casum, quo $m=\infty$, eritque

$$b=-\frac{7}{8}\alpha,\qquad \beta=\frac{35}{8}\alpha,\qquad c=\frac{-5}{m}\alpha=-\frac{2}{5}\text{ dig.}$$

Distantiae porro lentium

$$\alpha+b=\frac{1}{8}\alpha\quad\text{et}\quad\beta+c=\left(\frac{35\,\alpha}{8}-\frac{2}{5}\right)\text{dig.}\quad\text{et}\quad\mathfrak{B}=\frac{5}{4},\qquad B=-5.$$

Pro sequente calculo statim sumamus $\lambda=1{,}60006$ et aequatio prodibit

$$0=1{,}5801-0{,}3908\,\lambda'+0{,}03088,$$

unde invenitur

$$\lambda'=4{,}1220\quad\text{et}\quad\lambda'-1=3{,}1220\quad\text{et}\quad\log.\sqrt{(\lambda'-1)}=0{,}2472164.$$

Hinc ob

$$\text{Log.}\left(-\frac{b}{\alpha}\right)=9{,}9420081\,(-),\qquad \text{Log.}\frac{\beta}{\alpha}=0{,}6409781$$

$$\text{Log.}\frac{b+\beta}{\alpha}=0{,}5440680,\qquad \text{Log.}\left(-\frac{b\beta}{\alpha^2}\right)=0{,}5829862\,(-).$$

Ex quibus pro secunda lente habebimus

$$\frac{1}{F'}=\frac{-0{,}7662\pm5{,}4266}{b\beta}\alpha,\qquad \frac{1}{G'}=\frac{+6{,}8006\mp5{,}4266}{b\beta}\alpha$$

seu sumtis signis superioribus

$$F'=\frac{b\beta}{4{,}6604\,\alpha}=-0{,}8214\,\alpha,\qquad G'=\frac{b\beta}{1{,}3740\,\alpha}=-2{,}7861\,\alpha,$$

qui valores pro multiplicatione infinita locum habent; at nunc pro multiplicatione quacunque m statuatur

$$F'=-\left(0{,}8214+\frac{f}{m}\right)\alpha,\qquad G'=-\left(2{,}7861+\frac{g}{m}\right)\alpha,$$

COROLLARIUM

168. Si ergo telescopium desideretur, quod centies multiplicet, id ita se habebit:

I. Pro lente prima, Crown Glass, radius utriusque faciei $=8,48$ dig.

II. Pro lente secunda, Flint Glass,

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & =-\ \ 6,57 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & =-22,24 \text{ dig.}\end{cases}$$

III. Pro lente tertia, Crown Glass, radius utriusque faciei $=-0,43$ dg.

Intervallum erit lentis

$$\text{I et II}=1 \text{ dig.,}\qquad \text{II et III}=34,64 \text{ dig.}$$

hincque longitudo telescopii $=35,64$ dig. campique visi semidiameter $=8\frac{1}{2}$ min.

PROBLEMA 3

169. *Si huiusmodi telescopium primi generis ex quatuor lentibus a se invicem separatis sit construendum, investigare momenta, quibus ei maximus perfectionis gradus conciliatur.*

SOLUTIO

Hic igitur istarum trium fractionum $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{\beta}{c}$ et $\frac{\gamma}{d}$ singulae debent esse negativae; ponamus ergo $\frac{\alpha}{b}=-k$ et $\frac{\beta}{c}=-k'$ et, cum sit $m=-\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{c}\cdot\frac{\gamma}{d}$, habebimus

$$b=-\frac{\alpha}{k},\quad \beta=-\frac{B\alpha}{k},\quad c=-\frac{\beta}{k'}=+\frac{B\alpha}{kk'}\quad\text{et}\quad \gamma=+\frac{BC\alpha}{kk'}\quad\text{et}\quad m=\frac{-kk'\gamma}{d},$$

hinc

$$d=-\frac{BC\alpha}{m};$$

unde intervalla lentium

$$\alpha+b=\alpha\left(1-\frac{1}{k}\right),\quad \beta+c=B\alpha\left(\frac{1}{kk'}-\frac{1}{k}\right)\quad\text{et}\quad \gamma+d=BC\alpha\left(\frac{1}{kk'}-\frac{1}{m}\right);$$

ubi valores litterarum f et g ex casu praecedente $m=50$ vel etiam, sed minus tuto, ex casu $m=25$ erui debent, hocque modo reperitur

$$f=0{,}01 \quad \text{et} \quad g=-0{,}4250;$$

ita ut sit in genere

$$F'=-\left(0{,}8214+\frac{0{,}01}{m}\right)\alpha, \qquad G'=-\left(2{,}7861-\frac{0{,}4250}{m}\right)\alpha.$$

Deinde cum supra iam inventa sit distantia focalis lentis tertiae $=-\frac{2}{5}$ dig. pro $m=\infty$, statuamus pro quavis multiplicatione m esse

$$c=-\frac{2}{5}-\frac{h}{m} \quad \text{eritque} \quad c=-\left(\frac{2}{5}+\frac{1{,}2480}{m}\right) \text{dig.};$$

cuius ergo radius utriusque faciei erit

$$-\left(0{,}4240+\frac{0{,}948}{m}\right) \text{dig.}$$ [1]

Cum igitur sit $\alpha=0{,}08\,m$ dig., constructio telescopii sequenti modo se habebit:

I. Pro lente prima, Crown Glass, radius faciei utriusque $=0{,}0848\,m$ dig.

II. Pro lente secunda, Flint Glass,

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = -(0{,}0657\,m+0{,}0008) \text{ dig.} \\ \text{posterioris} = -(0{,}2228\,m-0{,}0340) \text{ dig.} \end{cases}$$

III. Pro lente tertia, Crown Glass, radius utriusque faciei

$$=-\left(0{,}4240+\frac{0{,}948}{m}\right) \text{dig.}$$

Tum vero intervalla erunt

$$\alpha+b=0{,}01\,m, \qquad \beta+c=(0{,}35\,m-0{,}36) \text{ dig.}$$

hincque tota longitudo

$$=(0{,}36\,m-0{,}36) \text{ dig.}$$

campique visi semidiameter $=\frac{859}{m-1}$ minut. prim.

---

1) Editio princeps: $-\left(0{,}4240+\frac{1{,}3228}{m}\right)$ dig. Correxit E. Ch.

COROLLARIUM

168. Si ergo telescopium desideretur, quod centies multiplicet, id ita se habebit:

I. Pro lente prima, Crown Glass, radius utriusque faciei $=8,48$ dig.

II. Pro lente secunda, Flint Glass,

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & =-\ \ 6,57 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & =-22,24 \text{ dig.}\end{cases}$$

III. Pro lente tertia, Crown Glass, radius utriusque faciei $=-0,43$ dig.

Intervallum erit lentis

$$\text{I et II} = 1 \text{ dig.,} \qquad \text{II et III} = 34,64 \text{ dig.}$$

hincque longitudo telescopii $=35,64$ dig. campique visi semidiameter $=8\frac{1}{2}$ min.

PROBLEMA 3

169. *Si huiusmodi telescopium primi generis ex quatuor lentibus a se invicem separatis sit construendum, investigare momenta, quibus ei maximus perfectionis gradus conciliatur.*

SOLUTIO

Hic igitur istarum trium fractionum $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{\beta}{c}$ et $\frac{\gamma}{d}$ singulae debent esse negativae; ponamus ergo $\frac{\alpha}{b}=-k$ et $\frac{\beta}{c}=-k'$ et, cum sit $m=-\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{c}\cdot\frac{\gamma}{d}$, habebimus

$$b=-\frac{\alpha}{k},\quad \beta=-\frac{B\alpha}{k},\quad c=-\frac{\beta}{k'}=+\frac{B\alpha}{kk'}\quad \text{et}\quad \gamma=+\frac{BC\alpha}{kk'}\quad \text{et}\quad m=\frac{-kk'\gamma}{d},$$

hinc

$$d=-\frac{BC\alpha}{m};$$

unde intervalla lentium

$$\alpha+b=\alpha\left(1-\frac{1}{k}\right),\quad \beta+c=B\alpha\left(\frac{1}{kk'}-\frac{1}{k}\right)\quad \text{et}\quad \gamma+d=BC\alpha\left(\frac{1}{kk'}-\frac{1}{m}\right);$$

quae cum debeant esse positiva aeque ac numeri k, k' et m, bina posteriora per primum divisa dabunt has duas conditiones

$$1.\ \frac{B(1-k')}{k'(k-1)} > 0, \qquad 2.\ \frac{BC(m-kk')}{mk'(k-1)} > 0.$$

Iam consideremus aequationem, qua margo coloratus tollitur, pro casu, quo distantia O est negativa [§ 52], ponendo ut ante

$$\frac{dn}{n-1} = N, \qquad \frac{dn'}{n'-1} = N', \qquad \frac{dn''}{n''-1} = N'', \qquad \frac{dn'''}{n'''-1} = N'''$$

eritque

$$0 = NBC\pi''\alpha + N'b((B+1)C\pi''-\pi) + N''c\,\frac{(C+1)\pi''-\pi')}{B}$$

seu

$$0 = NBC\pi'' - \frac{N'}{k}((B+1)\,C\pi''-\pi) + \frac{N''}{kk'}\,((C+1)\pi''-\pi');$$

quem in finem investigare oportet relationes inter litteras π, π', π''; est vero ex capite I, § 11:

$$\text{I. } \frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = -k, \quad \text{unde} \quad \pi = \frac{1-k}{\mathfrak{B}}\cdot\Phi.$$

$$\text{II. } \frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = \frac{B\alpha}{c} = kk', \quad \text{unde} \quad \pi' = \left(\frac{1}{B} - \frac{k}{\mathfrak{B}} + kk'\right)\frac{\Phi}{\mathfrak{C}}.$$

$$\text{III. } \frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = \frac{BC\alpha}{d} = -m,$$

unde ob $\mathfrak{D} = 1$ fiet

$$\pi'' = \left(-m + \frac{1}{BC} - \frac{k}{\mathfrak{B}C} + \frac{kk'}{\mathfrak{C}}\right)\Phi;$$

unde aequatio nostra erit

$$0 = N\left(-BCm + 1 - \frac{Bk}{\mathfrak{B}} + \frac{BCkk'}{\mathfrak{C}}\right) - \frac{N'}{k}\left(\frac{-BCm}{\mathfrak{B}} - \frac{Bk}{\mathfrak{B}} + \frac{BCkk'}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}\right)$$
$$+ \frac{CN''}{\mathfrak{C}kk'}(-m + kk');$$

unde fit $C =$

$$N - N(B+1)k + NBkk' + N'(B+1) - N'(B+1)k' - \frac{N''m}{kk'} + N''$$

divisum per

$$NBm - NBkk' - \frac{N'(B+1)m}{k} + N'(B+1)k' + \frac{N''m}{kk'} - N''$$

vel succinctius $C=$

$$Nkk'(1-k-Bk(1-k'))+N'kk'(B+1)(1-k')-N''(m-kk')$$

divisum per

$$(m-kk')(Nkk'B-N'k'(B+1)+N'')$$

adeoque $1+C=$

$$Nkk'(1-k+B(m-k))-N'(B+1)k'(m-k)$$

divisum per

$$(m-kk')(Nkk'B-N'k'(B+1)+N'')$$

atque hinc $\mathfrak{C}=$

$$Nkk'(1-k-Bk(1-k'))+N'kk'(B+1)(1-k')-N''(m-kk')$$

divisum per

$$Nkk'(1-k+B(m-k))-N'(B+1)k'(m-k);$$

sed facile patet hoc modo nobis vix ulterius progredi licere ob harum formularum complicationem, nisi pro k et k' et pro N, N', N'' valores substituantur; interim tamen haec methodus etiam successura videtur, si eam ad plures adhuc lentes applicare vellemus; ceterum haud abs re erit hoc negotium etiam alio modo tentasse.

Ex praecedentibus scilicet aequationibus non litteras π, π', π'' quaeri, sed potius his quasi datis spectatis litteras $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ definiri conveniet; unde statim obtinemus

$$\mathfrak{B}=\frac{1-k}{\pi}\cdot\Phi,\quad \mathfrak{C}=\frac{(kk'-1)\Phi+\pi}{\pi'};$$

ex tertia denique aequatione ob $\mathfrak{D}=1$ colligitur

$$\Phi=\frac{-\pi+\pi'-\pi''}{m-1},$$

ita ut et Φ quasi datum spectari queat. Hinc, cum sit

$$B=\frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}}\quad\text{et}\quad C=\frac{\mathfrak{C}}{1-\mathfrak{C}},$$

habebimus

$$B=\frac{(1-k)\Phi}{\pi-(1-k)\Phi},\quad C=\frac{(kk'-1)\Phi+\pi}{\pi'-\pi-(kk'-1)\Phi}.$$

Nunc cum prior conditio postulet, ut sit $\frac{B(1-k')}{k'(k-1)}>0$, altera vero per hanc divisa $\frac{C(m-kk')}{1-k'}>0$, valoribus illis substitutis hae duae conditiones abibunt in sequentes:

$$1.\ \frac{(k'-1)\Phi}{(\pi-(1-k)\Phi)k'}>0 \quad \text{seu} \quad \frac{(k'-1)\Phi}{\pi-(1-k)\Phi}>0,$$

$$2.\ \frac{((kk'-1)\Phi+\pi)(m-kk')}{(1-k')(\pi'-\pi-(kk'-1)\Phi)}>0,$$

quae per illam multiplicata dat

$$\frac{-\Phi(m-kk')(\pi+(kk'-1)\Phi)}{(\pi-(1-k)\Phi)(\pi'-\pi-(kk'-1)\Phi)}>0;$$

si hic loco Φ eius valor substituatur, qui, cum semper sit positivus, ob $m-1$ etiam positivum dat primo

$$-\pi+\pi'-\pi''>0,$$

tum vero binae istae conditiones dabunt

$$1.\ \frac{k'-1}{(m-k)\pi+(k-1)\pi'-(k-1)\pi''}>0,$$

$$2.\ \frac{(m-kk')((m-kk')\pi+(kk'-1)\pi'-(kk'-1)\pi'')}{(k'-1)((m-kk')\pi-(m-kk')\pi'-(kk'-1)\pi'')}>0;$$

tum vero B et C ita definientur:

$$B=\frac{(k-1)(\pi-\pi'+\pi'')}{(m-k)\pi+(k-1)\pi'-(k-1)\pi''}$$

$$C=\frac{(m-kk')\pi+(kk'-1)\pi'-(kk'-1)\pi''}{-(m-kk')\pi+(m-kk')\pi'+(kk'-1)\pi''}.$$

Verum si hos valores substituere vellemus sive in aequatione pro margine colorato vitando sive inprimis pro semidiametro confusionis ad nihilum redigenda, in multo maiores ambages incideremus, quam priore methodo evenit; quocirca aliam adhuc methodum quaerere debemus; nulla autem alia nobis relinquitur, nisi ut ex superioribus aequationibus litteras k et k' investigemus; quo pacto nostra investigatio satis plana reddetur.

Hanc viam sequentes statim habemus $k=\frac{\Phi-\mathfrak{B}\pi}{\Phi}$ et $kk'=\frac{\Phi-\pi+\mathfrak{C}\pi'}{\Phi}$ existente $\Phi=\frac{-\pi+\pi'-\pi''}{m-1}$, unde, cum k et k' sint numeri positivi pariter atque angulus Φ, habemus statim istas conditiones:

$$\Phi-\mathfrak{B}\pi>0, \quad \Phi-\pi+\mathfrak{C}\pi'>0, \quad -\pi+\pi'-\pi''>0.$$

Porro cum hinc intervalla lentium fiant

$$1.\ \alpha+b=\frac{-\mathfrak{B}\pi}{\Phi-\mathfrak{B}\pi}\alpha>0,$$

$$2.\ \beta+c=\frac{(\mathfrak{B}\pi-B\mathfrak{C}\pi')\alpha\Phi}{(\Phi-\pi+\mathfrak{C}\pi')(\Phi-\mathfrak{B}\pi)}>0,$$

$$3.\ \gamma+d=\frac{(m-1)\Phi+\pi-\mathfrak{C}\pi'}{m(\Phi-\pi+\mathfrak{C}\pi')}BC\alpha>0,$$

inde colligimus has novas conditiones:

$$-\mathfrak{B}\pi\alpha>0,$$
$$(\mathfrak{B}\pi-B\mathfrak{C}\pi')\alpha>0,$$
$$((m-1)\Phi+\pi-\mathfrak{C}\pi')BC\alpha>0;$$

ideoque etiam harum quoti positivi esse debent

$$\frac{\mathfrak{B}\pi-B\mathfrak{C}\pi'}{-\mathfrak{B}\pi}>0,\qquad \frac{((m-1)\Phi+\pi-\mathfrak{C}\pi')BC}{\mathfrak{B}\pi-B\mathfrak{C}\pi'}>0;$$

quae posterior ob $(m-1)\Phi=-\pi+\pi'-\pi''$ abit in hanc

$$\frac{(\mathfrak{C}\pi'-C\pi'')B}{\mathfrak{B}\pi-B\mathfrak{C}\pi'}>0,$$

sicque quinque habentur conditiones ab α liberae, quibus satisfieri oportet. Nunc autem aequatio pro destruendo margine colorato ita se habebit:

$$0=NBC\pi''-\frac{N'\Phi}{\Phi-\mathfrak{B}\pi}((B+1)C\pi''-\pi)+\frac{N''\Phi}{\Phi-\pi+\mathfrak{C}\pi'}((C+1)\pi''-\pi').$$

His quomodocunque observatis perpendatur aequatio ultima pro confusione penitus destruenda [§ 53]

$$0=N-\frac{N'}{k\mathfrak{B}}+\frac{N''}{kk'B\mathfrak{C}}-\frac{N'''}{mBC}$$

ob

$$p=\alpha,\quad q=\mathfrak{B}b=-\frac{\mathfrak{B}\alpha}{k},\quad r=\mathfrak{C}c=\frac{B\mathfrak{C}\alpha}{kk'}\quad \text{et}\quad s=d=-\frac{BC\alpha}{m},$$

num ei vel absolute vel saltim proxime satisfieri queat.

Denique, ut etiam confusio prior tollatur, satisfiat huic aequationi [§ 42]

$$\mu\lambda-\frac{\mu'\lambda'}{k\mathfrak{B}^3}+\frac{\mu''\lambda''}{kk'B^3\mathfrak{C}^3}-\frac{\mu'''\lambda'''}{B^3C^3m}-\frac{\mu'\nu'}{k\mathfrak{B}B}+\frac{\mu''\nu''}{kk'B^3C\mathfrak{C}}=0.$$

SCHOLION

170. Cum hic in genere vix ulterius progredi liceat, ad casus particulares erit descendendum, et quia in capite praecedente lentes perfectae triplicatae ideo optatum usum non praestiterant, quod confusio a lente oculari oriunda ab iis non destruebatur, hic lentem obiectivam iterum triplicatam statuamus, ut bina priora intervalla evanescant, eius vero tres lentes ita definiamus, ut iis etiam confusio a lente oculari oriunda destruatur; quo facto deinceps forte via patebit inter tres lentes priores exigua intervalla statuendi. Semper enim in huiusmodi disquisitionibus arduis expedit a casibus facilioribus exordiri, quoniam inde ratio perspicitur difficultates superandi, quae primo intuitu invincibiles erant visae.

PROBLEMA 4

171. *Si tres lentes priores inter se immediate iungantur, ut lentem obiectivam triplicatam constituant, quarta vero lens sit ocularis, regulas pro constructione huiusmodi telescopii exponere.*

SOLUTIO

Cum hic sint intervalla tam $\alpha+b=0$ quam $\beta+c=0$, fiet statim $k=1$ et $k'=1$, unde sequuntur distantiae

$$b=-\alpha,\quad \beta=-B\alpha,\quad c=B\alpha,\quad \gamma=BC\alpha \quad\text{et}\quad d=-\frac{BC\alpha}{m}$$

hincque intervallum

$$\gamma+d=BC\alpha\Big(1-\frac{1}{m}\Big)=\frac{m-1}{m}BC\alpha,$$

quod debet esse positivum. Pro litteris autem π, π', π'' habebimus

$$1.\ \pi=0,\quad 2.\ \pi'=0,\quad 3.\ \pi''=-(m-1)\Phi.$$

Atque hinc aequatio pro tollendo margine colorato erit

$$0=NBC-N'(B+1)C+N''(C+1),$$

unde elicimus

$$C=-\frac{N''}{NB-N'(B+1)+N''},$$

unde intervallum $\gamma+d$ fit

$$=-\frac{(m-1)}{m}\cdot\frac{N''B\alpha}{NB-N'(B+1)+N''};$$

quod cum esse debeat positivum, duo casus sunt perpendendi.

Alter, quo $\alpha>0$; tum esse debet

$$\frac{N''B}{NB-N'(B+1)+N''}<0 \quad \text{ideoque} \quad N-\frac{N'}{B}(B+1)+\frac{N''}{B}<0$$

sive

$$N-N'+\frac{1}{B}(N''-N')<0.$$

Altero casu, si $\alpha<0$, contrarium evenire debet, scilicet

$$N-N'+\frac{1}{B}(N''-N')>0.$$

Consideretur nunc aequatio, qua ista confusio penitus tollitur, scilicet

$$0=N-\frac{N'}{\mathfrak{B}}+\frac{N''}{B\mathfrak{C}}-\frac{N'''}{mBC};$$

ex qua per BC multiplicata, ut sit

$$0=NBC-N'(B+1)C+N''(C+1)-\frac{N'''}{m},$$

quoniam a praecedente aequatione non differt nisi ultimo termino $\frac{N'''}{m}$, qui prae reliquis est valde parvus, concludimus, si illi fuerit satisfactum, simul quoque huic proxime satisfieri idque eo magis, quo maior fuerit multiplicatio m; quae conclusio nititur fundamento, quod numeri N, N', N'', N''' parum ab unitate differunt.

Pro priore autem confusione tollenda insuper satisfieri debet huic aequationi

$$0=\mu\lambda-\frac{\mu'\lambda'}{\mathfrak{B}^3}+\frac{\mu''\lambda''}{B^3\mathfrak{C}^3}-\frac{\mu'''\lambda'''}{mB^3C^3}-\frac{\mu'\nu'}{\mathfrak{B}B}+\frac{\mu''\nu''}{\mathfrak{B}^3C\mathfrak{C}},$$

in qua loco C eius valor supra inventus

$$C=\frac{-N''}{B(N-N')-N'+N''}$$

substitui debet; id quod in genere ad formulam valde molestam deduceret, quare solutio non nisi casibus particularibus absolvi poterit.

COROLLARIUM 1

172. Etsi conditiones pro littera B sunt datae, haec tamen littera prorsus indeterminata relinquitur, dummodo notetur,

$$1.\ \text{si fuerit}\ N-N'+\frac{1}{B}(N''-N')<0,$$

tum capi debere α positivum;

$$2.\ \text{sin autem fuerit}\ N-N'+\frac{1}{B}(N''-N')>0,$$

tum capi debere α negativum.

Cum invenerimus

$$C=\frac{-N''}{B(N-N')-N'+N''},\quad \text{erit}\quad 1+C=\frac{B(N-N')-N'}{B(N-N')-N'+N''}$$

hincque

$$\mathfrak{C}=\frac{-N''}{B(N-N')-N'}.$$

COROLLARIUM 2

173. Si velimus loco B introducere $\mathfrak{B}$ ponendo $B=\frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}}$, tunc consequemur

$$C=\frac{-N''(1-\mathfrak{B})}{(N-N'')\mathfrak{B}-N'+N''}\quad \text{et}\quad \mathfrak{C}=\frac{-N''(1-\mathfrak{B})}{N\mathfrak{B}-N'},$$

quibus observatis substitutio postrema facilius expedietur; fiet enim postrema aequatio

$$0=\left\{\begin{array}{l} \mu\lambda\mathfrak{B}^3-\mu'\lambda'-\mu'\nu'\mathfrak{B}(1-\mathfrak{B})-\dfrac{\mu''\lambda''(N\mathfrak{B}-N')^3}{(N'')^3} \\ +\dfrac{\mu''\nu''(1-\mathfrak{B})(N\mathfrak{B}-N')((N-N'')\mathfrak{B}-N'+N'')}{(N'')^2} \\ \qquad +\dfrac{\mu'''\lambda'''((N-N'')\mathfrak{B}-N'+N'')^3}{m(N'')^3} \end{array}\right\}.$$

COROLLARIUM 3

174. Respectu campi apparentis, cum sit $\pi''=-(m-1)\Phi$, si statuamus ut hactenus $\pi''=-\frac{1}{4}$, prodibit semidiameter $\Phi=\frac{1}{4(m-1)}$ et in min. primis

$\Phi = \frac{859}{m-1}$ min. prim., siquidem lens ocularis fiat utrinque aequaliter concava, quod, uti ostendimus, fiet, si $\lambda''' = 1{,}60006$, hac scilicet lente ex vitro coronario parata. Sin autem eam ex vitro crystallino parare velimus, poni debet $\lambda''' = 1{,}67445$.

EXEMPLUM

175. Si prima et tertia lens fuerit ex vitro coronario, media ex crystallino, ex hisque lens obiectiva constituatur, lens vero ocularis ex vitro coronario paretur, pro quavis data multiplicatione telescopium construere.

Hoc exemplum ideo affero, quod hic casus in capite praecedente est praetermissus, quem autem hic alio modo tractabo, ut longitudo minor prodeat.

Cum igitur hic sit $n = 1{,}53$, $n' = 1{,}58$, $n'' = 1{,}53$, $n''' = 1{,}53$, erit, uti vidimus, $N = 7$, $N' = 10$, $N'' = 7$, $N''' = 7$, ita ut sit $\mu'' = \mu$, $\nu'' = \nu$, $\mu''' = \mu$. Ex his colligitur

$$C = +\frac{7}{3}(1-\mathfrak{B}), \qquad \mathfrak{C} = \frac{-7(1-\mathfrak{B})}{7\mathfrak{B}-10}.$$

Tantum ergo restat haec aequatio resolvenda

$$0 = \mu\lambda\mathfrak{B}^3 - \mu'\lambda' - \mu'\nu'\mathfrak{B}(1-\mathfrak{B}) - \frac{\mu\lambda''(7\mathfrak{B}-10)^3}{7^3} - \frac{3\mu\nu(1-\mathfrak{B})(7\mathfrak{B}-10)}{7^2} - \frac{27\mu\lambda'''}{7^3 m};$$

quodsi ergo statuamus $\lambda'' = \lambda$ et $\lambda''' = 1{,}60006$, haec aequatio induet hanc formam

$$\mu\lambda\left(\frac{30}{7}\mathfrak{B}^2 - \frac{300}{49}\mathfrak{B} + \frac{1000}{343}\right) - \mu'\lambda' + \mu'\nu'(\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{B})$$
$$+ \mu\nu\left(\frac{3}{7}\mathfrak{B}^2 - \frac{51}{49}\mathfrak{B} + \frac{30}{49}\right) - \frac{27\mu\lambda'''}{343\,m} = 0,$$

quae tantum est aequatio quadratica, ex qua valor ipsius $\mathfrak{B}$ erui debet; terminis igitur secundum potestates ipsius $\mathfrak{B}$ dispositis habebitur:

$$\mathfrak{B}^2\left(\frac{30}{7}\mu\lambda + \mu'\nu' + \frac{3}{7}\mu\nu\right) + \mathfrak{B}\left(-\frac{300}{49}\mu\lambda - \mu'\nu' - \frac{51}{49}\mu\nu\right)$$
$$+ \frac{1000}{343}\mu\lambda - \mu'\lambda' + \frac{30}{49}\mu\nu - \frac{27\mu\lambda'''}{343\,m} = 0.$$

Resolutionem autem huius aequationis ita instituamus, ut lens obiectiva maiorem aperturam admittat; quem in finem non ut ante $\lambda = 1$, sed

$\lambda = 1,60006$ statuamus, ut prima lens utrinque sibi similis evadat; quare sit

$$\begin{array}{ll} \log. \mu = 9,9945371 & \log. \mu' = 9,9407157 \\ \log. \mu\nu = 9,3360593 & \log. \mu'\nu' = 9,3436055, \\ \mu\nu = 0,2168 & \mu'\nu' = 0,2206 \end{array}$$

$$\text{et Log. } \lambda = \text{Log. } \lambda''' = 0,2041363;$$

at pro secunda lente ponatur non ut ante $\lambda' = 1$, sed hanc litteram indeterminatam relinquamus; unde nostra aequatio in numeris ita erit comparata:

$$0 = 7,0852\mathfrak{B}^2 - 10,1201\,\mathfrak{B} + 4,7393 - \mu'\lambda' - \frac{0,12437}{m},$$

quae reducitur ad hanc

$$\mathfrak{B}^2 = \frac{10,1201}{7,0852}\mathfrak{B} - \frac{4,7393}{7,0852} + \frac{\mu'\lambda'}{7,0852} + \frac{0,12437}{m \cdot 7,0852},$$

$$\mathfrak{B}^2 = 1,4283\,\mathfrak{B} - 0,6689 + 0,1231\,\lambda' + \frac{0,01755}{m}.$$

Unde invenitur

$$\mathfrak{B} = 0,7142 \pm \sqrt{\left(-0,1589 + 0,1231\,\lambda' + \frac{0,01755}{m}\right)}.$$

Unde patet λ' capi debere unitate maius. Statuatur ergo $\lambda' = 1\frac{1}{2}$ eritque

$$\mathfrak{B} = 0,7142 \pm \sqrt{\left(0,0257 + \frac{0,01755}{m}\right)};$$

hinc autem ulterius progredi non licet nisi litterae m valores determinatos tribuendo; quem in finem sequentes casus adiungimus.

CASUS 1

$m = 10$

176. Erit hoc casu $\mathfrak{B} = 0,7142 \pm 0,1657$ sumtoque signo inferiore $\mathfrak{B} = 0,5485$ vel sumto superiore signo $\mathfrak{B} = 0,8799$. Sin autem velimus, ut pro $\mathfrak{B}$ unicus valor $= 0,7142$ prodeat, capi deberet

$$\lambda' = \frac{0,1572}{0,1231} = 1\frac{341}{1231},$$

hocque casu hic utamur.

Cum igitur sit $\lambda' = 1\frac{341}{1231}$, erit

$$\lambda' - 1 = \frac{341}{1231}, \quad \text{Log.}\, \sqrt{\lambda' - 1} = 9{,}7208976, \quad \text{Log.}\,(\lambda' - 1) = 9{,}4417952.$$

Cum nunc pro omni multiplicatione sit $\mathfrak{B} = 0{,}7142$, si quidem capiamus

$$\lambda' = 1{,}2908 - \frac{0{,}1425}{m}, \quad \lambda' - 1 = 0{,}2908 - \frac{0{,}1425}{m},$$

hinc erit $1 - \mathfrak{B} = 0{,}2858$, $B = 2{,}4990$, $C = 0{,}6669 = \frac{2}{3}$.

Unde obtinemus distantias

$$b = -\alpha, \quad \beta = -2{,}4990\alpha = -2\frac{1}{2}\alpha,$$

$$c = +2{,}4990\alpha, \quad \gamma = +1{,}6667\alpha, \quad d = -0{,}16667\alpha.$$

Cum nunc sit $\lambda = \lambda'' = \lambda''' = 1{,}60006$ et $\lambda' = 1{,}2766$, erit:

I. Pro prima lente utrinque aequaliter convexa radius utriusque faciei $= 1{,}06\alpha$.

II. Pro secunda lente ex vitro crystallino

$$\frac{1}{F'} = \frac{\varrho\beta + \sigma b \mp \tau'(b+\beta)\sqrt{\lambda' - 1}}{b\beta}, \quad \frac{1}{G'} = \frac{\sigma\beta + \varrho b \pm \tau'(b+\beta)\sqrt{\lambda' - 1}}{b\beta},$$

$$\frac{1}{F'} = \frac{-1{,}9360 \mp 1{,}6152}{b\beta}\alpha, \quad \frac{1}{G'} = \frac{-4{,}0980 \pm 1{,}6152}{b\beta}\alpha,$$

sumtisque signis superioribus erit

$$F' = \frac{-b\beta}{3{,}5512\,\alpha} = -0{,}7039\alpha, \quad G' = \frac{-b\beta}{2{,}4828\,\alpha} = -1{,}0070\alpha.$$

III. Pro tertia lente ex vitro coronario, cum hic sit $\tau\sqrt{\lambda'' - 1} = \frac{\sigma - \varrho}{2}$, tum vero $c = 2\frac{1}{2}\alpha$ et $\gamma = 1\frac{2}{3}\alpha$, erit

$$c + \gamma = 4\frac{1}{6}\alpha,$$

$$\frac{1}{\;} = \frac{4{,}5280 \pm 2{,}9870}{c\gamma}\alpha, \quad \frac{1}{G''} = \frac{3{,}3935 \mp 2{,}9870}{c\gamma}\alpha$$

et ex signis inferioribus

$$F''=\frac{c\gamma}{1,5410\alpha}=2,7039\,\alpha,\qquad G''=\frac{c\gamma}{6,3205\,\alpha}=0,6593\,\alpha.$$

Hae ergo tres lentes sibi iunctae aperturam admittent, cuius semidiameter aestimari potest

$$x=0,1648\,\alpha=\frac{1}{7}\alpha \text{ circiter.}$$

Cum autem ob claritatem esse debeat $x=\frac{m}{50}$ dig. $=\frac{1}{5}$ dig., capi debebit circiter $\alpha=\frac{7}{5}$ dig., unde telescopii longitudo $=1,5001\,\alpha=1\frac{1}{2}\alpha=2,1$ dig.

IV. Pro quarta lente aequaliter utrinque concava erit radius utriusque faciei

$$=1,06\,d=1,06(-0,1667)\alpha=-0,1767\,\alpha=-0,2474 \text{ dig.}$$

COROLLARIUM 1

177. Si ergo hoc modo valor ipsius λ' definiatur, praecedentes determinationes pro omnibus multiplicationibus valebunt excepta sola lente secunda; tum autem pro quarta lente semidiameter utriusque eius faciei capi debet $=-(1,06)\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{\alpha}{m}$ sive $=-1,7666\cdot\frac{\alpha}{m}$.

COROLLARIUM 2

178. Constructio autem secundae lentis a multiplicatione pendebit, quia valor litterae λ' multiplicationem involvit, cum sit $\lambda'=1,2908-\frac{0,1425}{m}$.

SCHOLION

179. Haud difficile autem erit pro quavis multiplicatione secundam lentem definire, postquam ea iam pro casu $m=10$ est inventa; statuatur enim $m=\infty$, erit $\lambda'=1,2908$, hinc $\lambda'-1=0,2908$ et Log. $\sqrt{(\lambda'-1)}=9,7317972$, unde membrum ambiguum erit $=1,6562\alpha$; unde pro lente secunda erit

$$\frac{1}{F'}=\frac{-1,9360\mp1,6562}{b\beta}\alpha,\qquad \frac{1}{G'}=\frac{-4,0980\pm1,6562}{b\beta}\alpha;$$

sumtis ergo signis superioribus

$$F' = \frac{-b\beta}{3{,}5922\,\alpha} = -0{,}6959\,\alpha, \qquad G' = \frac{-b\beta}{2{,}4418\,\alpha} = -1{,}0239\,\alpha.$$

Nunc igitur ponamus pro multiplicatione quacunque m esse

$$F' = -\left(0{,}6959 + \frac{f}{m}\right)\alpha, \quad G' = -\left(1{,}0239 + \frac{g}{m}\right)\alpha,$$

et quia posito $m = 10$

$$0{,}6959 + \frac{f}{10} = 0{,}7039 \quad \text{et} \quad 1{,}0239 + \frac{g}{10} = 1{,}0070,$$

reperitur $f = 0{,}0800$, $g = -0{,}1690$; quibus inventis adipiscimur sequentem telescopii constructionem:

I. Pro prima lente, Crown Glass, radius utriusque faciei $= +1{,}06\,\alpha$.

II. Pro secunda lente, Flint Glass,

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} &= -\left(0{,}6959 + \dfrac{0{,}0800}{m}\right)\alpha \\ \text{posterioris} &= -\left(1{,}0239 - \dfrac{0{,}1690}{m}\right)\alpha. \end{cases}$$

III. Pro tertia lente, Crown Glass, radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} &= +2{,}7039\,\alpha \\ \text{posterioris} &= +0{,}6593\,\alpha. \end{cases}$

IV. Pro quarta lente, Crown Glass, radius utriusque faciei $= -1{,}7666\,\frac{\alpha}{m}$;

quibus lentibus paratis ternae priores sibi invicem iungantur, post quas quarta collocetur intervallo $= \frac{m-1}{m} \cdot \frac{5}{3}\,\alpha$.

Cum porro sit $x = \frac{m}{50}$ dig. et invenerimus $x = 0{,}1648\alpha$, hinc colligitur fore $\alpha = \frac{m}{8{,}2400}$, ita ut statui possit $\alpha = \frac{4}{33}m$ seu $\alpha = \frac{12}{100}m$. Quare habetur constructio telescopii primi generis:

I. Pro prima lente, Crown Glass, radius faciei utriusque $= 0{,}1272\,m$.

II. Pro secunda lente, Flint Glass,

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} &= -0{,}0835\,m - 0{,}0096 \\ \text{posterioris} &= -0{,}1229\,m + 0{,}0202. \end{cases}$$

III. Pro tertia lente, Crown Glass, radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = 0{,}3244\,m \\ \text{posterioris} & = 0{,}0791\,m; \end{cases}$

quibus tribus lentibus immediate iunctis postea intervallo $= \frac{1}{5}(m-1)$ dig. statuatur lens ocularis.

IV. Pro quarta lente, Crown Glass, radius utriusque faciei $= -0{,}2119$.

CASUS 2

180. Cum pro omnibus multiplicationibus constructio telescopii sit tradita, solutionem exempli supra allati alio modo expediamus. Scilicet cum hic pro $\mathfrak{B}$ valorem unitate minorem simus consecuti, qui supra unitate maior prodierat, notatu dignus videtur casus $\mathfrak{B} = 1$, quem hic evolvamus. Tum autem erit $B = \infty$, et quia distantiae determinatrices sunt α, $b = -\alpha$, $\beta = -B\alpha$, $c = B\alpha$, $\gamma = BC\alpha$, $d = \frac{-BC\alpha}{m}$, necesse est, ut sit BC quantitas finita ideoque $C = 0$ et $\mathfrak{C} = C = 0$. Quare statuamus $BC = \theta$, ut fiat $\gamma = \theta\alpha$ et $d = \frac{-\theta\alpha}{m}$ hincque telescopii longitudo $= \frac{m-1}{m}\theta\alpha$. His positis aequatio pro margine colorato tollendo dabit ob $N = 7$, $N' = 10$, $N'' = N''' = 7$ et $\pi = 0$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -(m-1)\Phi$:

$$0 = N\theta - N'\theta + N'', \quad 0 = 7\theta - 10\theta + 7 \quad \text{hincque} \quad \theta = \frac{7}{3}.$$

Nunc autem aequatio pro confusione primae speciei tollenda fiet

$$0 = \mu\lambda - \mu'\lambda' + \frac{27\mu\lambda''}{343} - \frac{27\mu\lambda'''}{343\,m},$$

quae per μ divisa ob $\frac{\mu'}{\mu} = 0{,}8834$ abit in hanc

$$0 = \lambda - 0{,}8834\lambda' + 0{,}0787\lambda'' - \frac{0{,}0787\,\lambda'''}{m};$$

facta autem lente oculari utrinque aequali erit $\lambda''' = 1{,}60006$ et

$$0 = \lambda - 0{,}8834\lambda' + 0{,}0787\lambda'' - \frac{0{,}1259}{m},$$

ex qua litteras λ ita definiri convenit, ut unitatem minimum superent; statuamus ergo $\lambda = 1$ et $\lambda'' = 1$, erit $0{,}8834\lambda' = 1{,}0787 - \frac{0{,}1259}{m}$, unde colligitur

$$\lambda' = 1{,}2210 - \frac{0{,}1425}{m};$$

sola ergo lens secunda a multiplicatione m pendet, quam deinceps seorsim evolvamus.

Calculum ergo pro prima, tertia et quarta instituamus.

Pro prima autem est

$$F = \frac{\alpha}{\sigma} = 0{,}6023\,\alpha, \qquad G = \frac{\alpha}{\varrho} = 4{,}4111\,\alpha.$$

Pro tertia lente ob $\lambda'' = 1$ et $c = -\infty$

$$F'' = \frac{\gamma}{\sigma} = 1{,}4055\,\alpha, \qquad G'' = \frac{\gamma}{\varrho} = 10{,}2925\,\alpha.$$

Pro quarta lente radius utriusque faciei $= 1{,}06\,d = -\dfrac{2{,}4733\,\alpha}{m}$.

Et tota telescopii longitudo $= \dfrac{m-1}{m}\cdot\dfrac{7}{3}\alpha$.

Pro secunda autem lente, cum in genere sit

$$F' = \frac{b\beta}{\varrho'\beta + \sigma' b \pm \tau'(b+\beta)\sqrt{\lambda'-1}}, \qquad G' = \frac{b\beta}{\sigma'\beta + \varrho' b \mp \tau'(b+\beta)\sqrt{\lambda'-1}},$$

ob $\beta = \infty$ et $b = -\alpha$ erit

$$F' = \frac{-\alpha}{\varrho' \pm \tau'\sqrt{(\lambda'-1)}}, \qquad G' = \frac{-\alpha}{\sigma' \mp \tau'\sqrt{(\lambda'-1)}};$$

pro quo duo casus sunt evolvendi, alter, quo $m = 10$, et alter, quo $m = \infty$.

Priore erit ob $m = 10$ $\lambda' = 1{,}2068$, $\lambda' - 1 = 0{,}2068$ et

$$\begin{aligned} \text{Log.}\ \sqrt{(\lambda'-1)} &= 9{,}6577753 \\ \text{Log.}\ \tau' &= \underline{9{,}9432471} \\ &\ 9{,}6010224 \end{aligned}$$

cui logarithmo respondet 0,3990, ideoque

$$F' = \frac{-\alpha}{0{,}1414 \pm 0{,}3990}, \qquad F' = \frac{-\alpha}{0{,}5404} = -1{,}8505\,\alpha,$$

$$G' = \frac{-\alpha}{1{,}5827 \mp 0{,}3990}, \qquad G' = \frac{-\alpha}{1{,}1837} = -0{,}8448\,\alpha.[1])$$

1) Editio princeps: $-0{,}8467\,\alpha$. — Propterea etiam nonnulli valores sequentes corrigendi erant. Correxit E. Ch.

Altero casu ob $m = \infty$ erit $\lambda' = 1,2210$ et $\lambda' - 1 = 0,2210$ et

$$\begin{aligned} \text{Log. } \sqrt{(\lambda' - 1)} &= 9,6721961 \\ \text{Log. } \tau' &= 9,9432471 \\ \hline &9,6154432 \end{aligned}$$

hinc $\tau' \sqrt{\lambda' - 1} = 0,4125$. Unde fit

$$F' = \frac{-\alpha}{0,1414 \pm 0,4125} = \frac{-\alpha}{0,5539}, \qquad G' = \frac{-\alpha}{1,5827 \mp 0,4125} = \frac{-\alpha}{1,1702}$$

hincque

$$F' = -1,8054\,\alpha, \qquad G' = -0,8545\,\alpha;$$

quare statuamus pro multiplicatione quacunque m

$$F' = -\left(1,8054 + \frac{f}{m}\right)\alpha, \qquad G' = -\left(0,8545 + \frac{g}{m}\right)\alpha,$$

et ex casu $m = 10$ elicimus

$$f = 0,4510, \qquad g = -0,0970,$$

ita ut sit

$$F' = -\left(1,8054 + \frac{0,4510}{m}\right)\alpha, \quad G' = -\left(0,8545 - \frac{0,0970}{m}\right)\alpha;$$

pro α autem definiendo consideretur radius minimus in lente hac obiectiva triplicata occurrens $0,6023\,\alpha$, cuius pars quarta $0,1506\,\alpha = \frac{m}{50}$; sicque prodibit $\alpha = \frac{m}{7,5300}$ dig. Sumatur ergo $\alpha = \frac{2m}{15}$ dig. et habetur sequens constructio telescopii primi generis:

I. Pro prima lente, Crown Glass,

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = +\,0,0803\,m \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = +\,0,5882\,m \text{ dig.} \end{cases}$$

II. Pro secunda lente, Flint Glass,

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = (-\,0,2407\,m - 0,0601) \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = (-\,0,1139\,m + 0,0124) \text{ dig.} \end{cases}$$

III. Pro tertia lente, Crown Glass,

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = +\,0,1874\,m \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = +\,1,3723\,m \text{ dig.} \end{cases}$$

IV. Pro quarta lente, Crown Glass,

$$\text{radius utriusque faciei} = 0{,}3298 \text{ dig.}$$

Tribus prioribus lentibus invicem iunctis quartae ab iis intervallum erit

$$= \tfrac{14}{45}(m-1) \text{ dig.},$$

et campi apparentis semidiameter erit, ut hactenus, $\Phi = \frac{859}{m-1}$ min. prim.

SCHOLION 1

181. Quia in hac solutione posuimus $\lambda = 1$ et $\lambda'' = 1$, consuluimus potissimum artifici, quia hoc casu errores in exsecutione commissi non admodum negotium turbant; sed longitudo horum telescopiorum prodiit aliquanto maior, propterea quod radius satis exiguus in determinatione lentis obiectivae occurrebat; huic autem incommodo medelam afferemus, si pro prima et tertia lente statuamus $\lambda = 1{,}60006$, quo facto obtinebitur $\lambda' = 1{,}9538 - \frac{0{,}1425}{m}$, qui numerus tantum in secundam lentem influit, cuius constructionem deinceps investigemus.

Iam vero erit:

Pro prima lente, Crown Glass, radius utriusque faciei $= 1{,}06\,\alpha$.

Pro tertia lente, Crown Glass, radius utriusque faciei $= 1{,}06\,\gamma = 2{,}473\,\alpha$.

Pro quarta lente, Crown Glass, radius utriusque faciei $= -\dfrac{2{,}4733\,\alpha}{m}$.

Restat igitur, ut secundam lentem evolvamus ut ante.

Scilicet duos casus contemplabimur, alterum, quo $m = 10$, alterum, quo $m = \infty$.

Sit igitur primo $m = 10$ eritque

$$\lambda' = 1{,}93956 \quad \text{et} \quad \lambda' - 1 = 0{,}93956 \quad \text{et} \quad \tau' \sqrt{(\lambda' - 1)} = 0{,}85056.$$

Quare:

$$F' = \frac{-\alpha}{0{,}1414 \pm 0{,}85056}, \qquad G' = \frac{-\alpha}{1{,}5827 \mp 0{,}85056}$$

seu

$$F' = \frac{-\alpha}{0{,}9919} = -1{,}0081\,\alpha, \qquad G' = \frac{-\alpha}{0{,}7322} = -1{,}3659\,\alpha.$$

Sit nunc $m = \infty$, erit

$$\lambda' = 1{,}9538, \qquad \tau' \sqrt{(\lambda' - 1)} = 0{,}8569$$

hincque

$$F' = \frac{-\alpha}{0{,}1414 \pm 0{,}8569}, \qquad F' = \frac{-\alpha}{0{,}9983} = -1{,}0017\,\alpha,$$

$$G' = \frac{-\alpha}{1{,}5827 \mp 0{,}8569}, \qquad G' = \frac{-\alpha}{0{,}7258} = -1{,}3778\,\alpha.$$

Nunc pro multiplicatione quacunque m statuatur

$$F' = -\left(1{,}0017 + \frac{f}{m}\right)\alpha, \qquad G' = -\left(1{,}3778 + \frac{g}{m}\right)\alpha,$$

et ex priore casu $m = 10$ colligitur

$$f = 0{,}065, \quad g = -0{,}121,$$

ita ut sit pro lente secunda

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\left(1{,}0017 + \frac{0{,}065}{m}\right)\alpha \\ \text{posterioris} & = -\left(1{,}3778 - \frac{0{,}121}{m}\right)\alpha. \end{cases}$$

Hic iam tuto sumi potest $x = \frac{1}{4}\alpha = \frac{m}{50}$; hinc obtinetur $\alpha = \frac{8}{100}m$.

Hinc ergo orietur sequens telescopii primi generis constructio:

I. Pro lente prima, Crown Glass,

radius utriusque faciei $= 0{,}0848\,m$ dig.

II. Pro lente secunda, Flint Glass,

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = (-0{,}08014\,m - 0{,}0052) \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = (-0{,}110224\,m + 0{,}0097) \text{ dig.} \end{cases}$$

III. Pro lente tertia, Crown Glass,

radius utriusque faciei $= 0{,}19784\,m$ dig.

IV. Pro lente quarta, Crown Glass,

radius utriusque faciei $= -0{,}19786$ dig.

Tribus lentibus prioribus sibi immediate iunctis ad intervallum

$$= 0{,}187\,(m-1) \text{ dig.}$$

collocetur lens quarta, cui oculus immediate adplicatus cernet campum, cuius semidiameter erit $\frac{859}{m-1}$ min. prim.

SCHOLION 2

182. Hic casus inprimis est omni attentione dignus, quoniam pro quavis multiplicatione huius generis telescopia brevissima suppeditat: si enim multiplicationem adeo centuplam desideremus, longitudo vix superabit $18\frac{1}{2}$ digitos. Haec igitur methodus, qua posuimus $\mathfrak{B}=1$, utique mereretur, ut etiam ad alias vitri species seu, ubi pro lentibus alia combinatio vitri coronarii et crystallini statueretur, seorsim adplicaretur. Sed quia ea etiam ad problema nostrum generale solvendum aeque felici successu in usum vocari potest eiusque beneficio insignes difficultates supra commemoratae evanescunt, expediet sequens problema generalius tractasse.

PROBLEMA 5

183. *Si telescopium ex quatuor lentibus sit construendum, duae priores vero lentes ita debeant esse comparatae, ut radii per eas transmissi iterum inter se fiant paralleli, regulas pro constructione describere.*

SOLUTIO

Cum igitur radii per secundam lentem refracti iterum fiant axi paralleli, erit $\beta=\infty$ ideoque $\frac{\beta}{b}=B=\infty$ et $\mathfrak{B}=1$, erunt distantiae determinatrices

$$b=-\frac{\alpha}{k},\quad \beta=-\frac{B\alpha}{k}=\infty,\quad c=\frac{B\alpha}{kk'},\quad \gamma=\frac{BC\alpha}{kk'},\quad d=-\frac{BC\alpha}{m};$$

hicque iam notari oportet, ut distantia inter secundam et tertiam lentem $\beta+c$ fiat finita, debere ob $\beta=\infty$ esse $c=-\infty$, unde fit $k'=1$.

Quo autem rem clarius explicemus, statuatur haec distantia $=\eta\alpha$, ut sit

$$B\alpha\left(\frac{1}{kk'}-\frac{1}{k}\right)=\eta\alpha,$$

unde fit

$$k'=\frac{B}{B+\eta k},$$

quae ob $B=\infty$ fit $k'=1$; interim tamen conveniet illam expressionem $k'=\frac{B}{B+\eta k}$ in usum sequentem notasse.

Deinde, quia $c=-\infty$, γ vero finita quantitas, erit $\frac{\gamma}{c}=C=0$ hincque etiam $\mathfrak{C}=\frac{C}{1+C}=C=0$; interim tamen productum BC debet esse finitum. Sit igitur $BC=\theta$, ut fiat $\gamma=\frac{\theta\alpha}{k}$ et $d=\frac{-\theta\alpha}{m}$; cum illa autem aequatione coniungi debet ista, qua summo rigore est $C=\frac{\gamma}{c}=\frac{\theta}{B}$ hincque $\mathfrak{C}=\frac{\theta}{B+\theta}$. His notatis erunt intervalla lentium

$$\alpha+b=\alpha\frac{k-1}{k},\quad \beta+c=\eta\alpha,\quad \gamma+d=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{m}\right)\theta\alpha=\frac{m-k}{km}\theta\alpha.$$

Unde hae fractiones $\frac{\eta k}{k-1}$ et $\frac{m-k}{m(k-1)}\theta$ debent esse positivae seu $\frac{\eta}{k-1}>0$, $\frac{m-k}{k-1}\theta>0$ seu $\frac{m-k}{\eta}\theta>0$.

Iam inquiramus in valores litterarum π, π' et π'' ex tribus sequentibus aequationibus definiendos

$$\text{I. } \mathfrak{B}\pi-\Phi=-k\Phi,$$

$$\text{II. } \mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi=kk'\Phi,$$

$$\text{III. } (m-1)\Phi=-\pi+\pi'-\pi'';$$

quarum prima statim dat ob $\mathfrak{B}=1$

$$\pi=(1-k)\Phi=-(k-1)\Phi,$$

unde, ut hic valor campo augendo inserviat, π numerus negativus esse debet ideoque $k>1$.

Secunda autem aequatio ob $\mathfrak{C}=0$ et $k'=1$ daret $-\pi+\Phi=k\Phi$, unde pro π' nihil concludere liceret, quare pro $\mathfrak{C}$ et k' valores illos exactiores scribi oportebit fietque

$$\frac{\theta}{B+\theta}\pi'-\pi+\Phi=\frac{Bk}{B+\eta k}\Phi,$$

quae ob $\pi=-(k-1)\Phi$ abit in hanc

$$\frac{\theta}{B+\theta}\pi'+k\Phi=\frac{Bk}{B+\eta k}\Phi \quad\text{seu}\quad \frac{\theta}{B+\theta}\pi'=\frac{-\eta k^2}{B+\eta k}\Phi,$$

quae ergo ob $B=\infty$ dat

$$\pi'=\frac{-\eta k^2}{\theta}\Phi;$$

quia autem convenit sumere $k > 1$, debet esse $\alpha > 0$ ideoque et $\eta > 0$; hic valor π' erit negativus, si fuerit $\theta > 0$; sin autem $\theta < 0$, is erit positivus, ubi autem meminisse oportet esse debere $(m - k)\theta > 0$.

Tertia denique aequatio abit in hanc formam:

$$(m - 1)\Phi = +(k - 1)\Phi - \frac{\eta k^2}{\theta}\Phi - \pi''$$

hincque

$$\pi'' = \left(k - m - \frac{\eta k^2}{\theta}\right)\Phi \quad \text{sive} \quad \pi'' = -\left(m - k + \frac{\eta k^2}{\theta}\right)\Phi;$$

quae formula cum etiam inserviat campo definiendo, si capiatur $\pi'' = -\frac{1}{4}$, reperitur

$$\Phi = \frac{859}{m - k + \frac{\eta k^2}{\theta}} \text{ minut.}$$

$$\Phi = \frac{859\,\theta}{(m - k)\theta + \eta k^2} \text{ minut.};$$

quare curandum est, ut $\frac{\eta k^2}{\theta}$ quam minimum reddatur, quod facile praestatur faciendo intervallum secundae et tertiae lentis quam minimum adeoque evanescens, quo casu erit $\Phi = \frac{859}{m-k}$; qui eo maior fit, quo maior sumitur k.

Nunc igitur aequationem pro margine colorato tollendo consideremus, quae erit

$$0 = N\theta\pi'' - \frac{N'}{k}(\theta\pi'' - \pi) + \frac{N''}{k}(\pi'' - \pi'),$$

quae substitutis valoribus dat

$$0 = -N((m - k)\theta + \eta k^2) + \frac{N'}{k}((m - k)\theta + \eta k^2 - k + 1) - \frac{N''}{k}(m - k),$$

ex qua aequatione θ commode definiri potest reperieturque

$$\theta = \frac{-N\eta k^3 + N'\eta k^2 - N'(k - 1) - N''(m - k)}{(m - k)(Nk - N')};$$

quia autem convenit η quam minimum assumere ac praeterea non necesse est, ut isti aequationi summo rigore satisfiat, his terminis omissis habebimus

$$\theta = \frac{-N'(k - 1) - N''(m - k)}{(m - k)(Nk - N')},$$

unde fit

$$(m - k)\theta = \frac{-N'(k - 1) - N''(m - k)}{Nk - N'};$$

quae quantitas cum debeat esse positiva, numerator autem manifesto sit negativus, etiam denominatorem negativum esse oportet ideoque $N' > Nk$. Quodsi ergo N' maximum habeat valorem ex vitro scilicet crystallino, N vero minimum ex vitro coronario, ut sit $N = 7$ et $N' = 10$, numerus k non amplius nostro arbitrio relinquitur, sed ita capi debet, ut fiat $7k < 10$ et $k < \frac{10}{7}$, seu contineri debet intra limites 1 et $\frac{10}{7}$. Notetur hic, si caperetur $k = 1$, casum praecedentem esse oriturum neque campum hinc auctum iri; sin autem capiatur $k = \frac{10}{7}$, foret $\theta = \infty$ et longitudo telescopii fieret infinita; unde conveniet k propius unitati quam alteri limiti assumere. His probe perpensis statuamus

$$k = \frac{8}{7}, \quad N = 7, \quad N' = 10, \quad N'' = 7,$$

quo θ obtineat valorem minorem. Unde fiet

$$\theta = \frac{49m - 46}{2(7m - 8)}$$

hincque $\frac{\eta k^2}{\theta}$ habebit hunc valorem $\frac{2 \cdot 8^2(7m-8)}{7^2(49m-46)}\eta$, qui sumto $m = \infty$ fit $= \frac{128}{343}\eta$; ex quo colligitur, si modo η non excedat $\frac{1}{10}$, campi diminutionem non fore sensibilem.

Denique pro semidiametro confusionis ad nihilum redigenda satisfiat huic aequationi

$$0 = \mu\lambda - \frac{\mu'\lambda'}{k} + \frac{\mu''\lambda''}{k\theta^3} - \frac{\mu'''\lambda'''}{m\theta^3},$$

ex qua commodissime definiemus λ', qui erit ob $\mu = \mu'' = \mu'''$

$$\lambda' = \frac{\mu}{\mu'}\left(k\lambda + \frac{\lambda''}{\theta^3} - \frac{k\lambda'''}{m\theta^3}\right);$$

sicque hoc problema feliciter est solutum.

COROLLARIUM 1

184. Distantiae ergo determinatrices singularum lentium erunt:

Pro prima: ∞ et α cum λ,

pro secunda: $b = \frac{-\alpha}{k}$ et $\beta = \infty$ cum λ',

pro tertia: $c = -\infty$ et $\gamma = \frac{\theta\alpha}{k}$ cum λ'',

pro quarta: $d = \frac{-\theta\alpha}{m}$ et $\delta = \infty$ cum λ''';

ubi notandum primam, tertiam et quartam ex vitro coronario, secundam ex crystallino esse parandam; tum vero fore intervalla lentium

$$\alpha + b = \alpha \frac{k-1}{k} = \frac{1}{8}\alpha, \quad \beta + c = \eta\alpha,$$

de qua distantia notetur eam statui debere quam minimam; ac denique

$$\gamma + d = \frac{m-k}{km}\theta\alpha,$$

unde tota longitudo prodit

$$= \alpha\left(\frac{k-1}{k} + \eta + \frac{m-k}{km}\theta\right).$$

COROLLARIUM 2

185. Pro litteris autem k et θ hos valores statuimus

$$k = \frac{8}{7}, \quad \theta = \frac{49m-46}{2(7m-8)};$$

quae expressio cum adhuc m involvat, calculum non ut ante pro quavis multiplicatione in genere absolvere licebit; interim tamen simili modo, quo ante usi sumus, postquam pro duabus tribusve multiplicationibus calculum absolverimus, interpolando formulas generaliores pro omni multiplicatione concludere poterimus.

SCHOLION 1

186. Haec telescopia iis, quae modo ante descripsimus, ideo erunt praeferenda, quod in his nullae lentes sibi immediate iunctae assumuntur, quippe quod in praxi locum habere nequit, tum vero etiam, quod aliquod campi augmentum largiuntur. Ceterum haec telescopia aliquanto fiunt longiora, tam ob distantiam inter lentes primam et secundam, quam potissimum ob maiorem valorem ipsius θ, a quo intervallum tertiae et quartae lentis potissimum pendet. Intervallum autem medium $\eta\alpha$ hic merito negligimus. Quo tamen brevitati instrumenti, quantum fieri licet, consulamus, expediet sine dubio, ut modo ante fecimus, tam primam et tertiam lentem, quam quartam utrinque aequales formare, ita ut sit $\lambda = \lambda'' = \lambda''' = 1,60006$; tum vero erit $\mu = 0,9875$, $\mu' = 0,8724$, unde harum lentium constructio statim sequitur.

Erit scilicet radius utriusque faciei:

I. Pro lente prima $= 1{,}06\,\alpha$.

II. Pro lente tertia $= 1{,}06\,\frac{\theta\alpha}{k}$.

III. Pro lente quarta $= -1{,}06\,\frac{\theta\alpha}{m}$.

Nihil igitur aliud restat, nisi ut pro quibusdam multiplicationibus calculum expediamus; ac primo quidem conveniet multiplicationem quandam exiguam $m = 5$ evolvere, ut pateat, quantum haec investigatio in minimis telescopiis huius generis praestare possit; tum vero multiplicationem quandam maiorem veluti $m = 10$ indeque subito $m = \infty$ evolvamus, ut ex horum casuum comparatione conclusionem pro quavis maiore multiplicatione formare queamus.

EXEMPLUM 1

$m = 5$

187. Telescopium pro multiplicatione $m = 5$ describere.

Erit hoc casu

$$\theta = \tfrac{199}{54} = 3{,}6852, \quad \text{Log. } \theta = 0{,}5664611 \quad \text{et} \quad \text{Log. } k = 0{,}0579920$$

hincque

$$b = -\tfrac{7}{8}\alpha, \quad \beta = \infty, \quad c = -\infty, \quad \gamma = 3{,}2246\,\alpha, \quad d = -0{,}7370\,\alpha$$

hincque

$$\alpha + b = \tfrac{1}{8}\alpha, \quad \beta + c = \eta\alpha = \text{minimo}, \quad \gamma + d = 2{,}4876\,\alpha$$

sicque longitudo tota telescopii erit $= 2{,}6126\,\alpha + \eta\alpha$.

Unde tres lentes ex vitro coronario parandae ita se habebunt:

I. Pro prima lente

radius utriusque faciei $= 1{,}06\,\alpha$.

II. Pro tertia lente

radius utriusque faciei $= 3{,}4181\,\alpha$.

III. Pro quarta lente

radius utriusque faciei $= -0{,}7812\,\alpha$.

IV. Pro secunda lente, Flint Glass, ante omnia quaeri debet numerus λ' ex formula

$$\lambda' = \frac{1{,}60006\,\mu}{\mu'}\left(k + \frac{1}{\theta^3} - \frac{k}{m\theta^3}\right),$$

unde

$$\lambda' = 2{,}0977, \quad \text{ergo} \quad \lambda' - 1 = 1{,}0977 \quad \text{hincque} \quad \tau' \sqrt{(\lambda' - 1)} = 0{,}91936.$$

Quare pro hac lente erit

$$F' = \frac{b}{0{,}1414 \pm 0{,}91936} = \frac{b}{1{,}0608}, \qquad G' = \frac{b}{1{,}5827 \mp 0{,}91936} = \frac{b}{0{,}6633},$$

$$F' = -0{,}8248\,\alpha, \qquad G' = -1{,}3192\,\alpha.$$

Unde fluit sequens constructio telescopii:

I. Pro lente prima, Crown Glass,

radius utriusque faciei $= +1{,}06\,\alpha$. Intervallum $= 0{,}125\,\alpha$.

II. Pro lente secunda, Flint Glass,

radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = -0{,}8248\,\alpha \\ \text{posterioris} & = -1{,}3192\,\alpha \end{cases}$. Intervallum minimum.

III. Pro lente tertia, Crown Glass,

radius faciei utriusque $= 3{,}4181\,\alpha$. Intervallum $= 2{,}4876\,\alpha$.

IV. Pro lente quarta, Crown Glass,

radius utriusque faciei $= -0{,}7812\,\alpha$.

Lenti obiectivae tribui potest apertura, cuius semidiameter $x = \frac{1}{4}\alpha$. Cum autem ob claritatem statui debeat $x = \frac{m}{50}$ dig. $= \frac{1}{10}$ dig., unde $\alpha = \frac{2}{5}$ dig., erit telescopii longitudo $= 2{,}6126\,\alpha + \eta\alpha = 1{,}0450$ dig. $+ 0{,}4\,\eta$ dig. et semidiameter campi $\Phi = 223$ min. $= 3^0 43'$.

EXEMPLUM 2

188. Si multiplicatio $m = 10$ desideretur, telescopium huius generis describere.

Ob $m = 10$ erit

$$\theta = \frac{444}{124} = 3{,}5806, \quad \text{Log. } \theta = 0{,}5539613, \quad \text{Log. } \frac{1}{\theta} = 9{,}4460386,$$

unde

$$b = -\frac{7}{8}\alpha = -0{,}875\,\alpha, \quad \beta = \infty = -c, \quad \gamma = 3{,}1331\,\alpha, \quad d = -0{,}35806\,\alpha.$$

Nunc evolvatur numerus λ', qui reperitur

$$\lambda' = 2{,}1049, \quad \lambda' - 1 = 1{,}1049, \quad \text{hinc} \quad \tau' \sqrt{(\lambda' - 1)} = 0{,}92238\text{[1]}.$$

Unde radii facierum

$$F' = \frac{b}{0{,}1414 \pm 0{,}9213} = \frac{b}{1{,}0627}, \qquad G' = \frac{b}{1{,}5827 \mp 0{,}9213} = \frac{b}{0{,}6614}$$

seu

$$F' = -0{,}8234\,\alpha, \qquad G' = -1{,}3230\,\alpha.$$

Unde colligitur sequens constructio telescopii:

I. Pro prima lente, Crown Glass,

radius utriusque faciei $= 1{,}06\,\alpha$. Intervallum $= 0{,}125\,\alpha$.

II. Pro secunda lente, Flint Glass,

radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = -0{,}8234\,\alpha \\ \text{posterioris} & = -1{,}3230\,\alpha \end{cases}$. Intervallum minimum.

III. Pro lente tertia, Crown Glass,

radius utriusque faciei $= 3{,}3211\,\alpha$. Intervallum $= 2{,}7751\,\alpha$.

IV. Pro lente quarta, Crown Glass,

radius utriusque faciei $= -0{,}3796\,\alpha$.

Unde fit tota longitudo $= 2{,}9001\,\alpha$. Lenti primae autem apertura tribui debet, cuius semidiameter $x = \frac{m}{50} = \frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{5}$ dig. Unde sequitur $\alpha = \frac{4}{5}$ dig. sive maius. Campi autem visi semidiameter erit $\Phi = 97$ minut. $= 1^\circ 37'$.

---

1) Editio princeps: $\tau' \sqrt{(\lambda' - 1)} = 0{,}92132$. Ex qua differentia pro F' minor, pro G' maior valor prodit; id quod negligi potest. Correxit E. Ch.

EXEMPLUM 3

189. Si multiplicatio m fuerit ∞, telescopium huius generis describere.

Ob $m = \infty$ erit

$$\theta = 3{,}5 \quad \text{et} \quad \text{Log. } \theta = 0{,}5440680, \qquad \text{Log. } \frac{1}{\theta} = 9{,}4559319$$

hincque

$$b = -0{,}875\alpha, \quad \beta = \infty = -c, \quad \gamma = 3{,}0625\alpha, \quad d = -3{,}5\frac{\alpha}{m}.$$

Pro lente autem secunda invenimus

$$\lambda' = 2{,}1120, \quad \lambda' - 1 = 1{,}1120 \quad \text{et} \quad \tau' \sqrt{(\lambda' - 1)} = 0{,}9253.$$

Ex quibus colligitur

$$F' = \frac{b}{0{,}1414 \pm 0{,}9253} = \frac{b}{1{,}0667}, \qquad G' = \frac{b}{1{,}5827 \mp 0{,}9253} = \frac{b}{0{,}6574},$$

$$F' = -0{,}8203\,\alpha, \qquad G' = -1{,}3309\,\alpha.$$

Unde colligitur sequens constructio telescopii:

I. Pro prima lente, Crown Glass,

radius utriusque faciei $= 1{,}06\,\alpha$. Intervallum $= 0{,}125\,\alpha$.

II. Pro secunda lente, Flint Glass,

$$\text{radius faciei} \begin{Bmatrix} \text{anterioris} & = -0{,}8205\,\alpha \\ \text{posterioris} & = -1{,}3309\,\alpha \end{Bmatrix}. \quad \text{Intervallum minimum.}$$

III. Pro tertia lente, Crown Glass

radius utriusque faciei $= 3{,}2462\,\alpha$. Intervallum $= \left(3{,}0625 - \frac{3{,}5}{m}\right)\alpha$.

IV. Pro quarta lente, Crown Glass,

radius utriusque faciei $= -3{,}710\frac{\alpha}{m}$.

Hincque longitudo telescopii erit $= \left(3{,}1875 - \frac{3{,}5}{m}\right)\alpha$. Lenti vero obiectivae apertura tribuatur, cuius semidiameter $= \frac{1}{4}\alpha = \frac{m}{50}$, ita ut capi possit $\alpha = \frac{2}{25}m$ dig. $= \infty$.

EXEMPLUM 4 GENERALE

190. Si multiplicatio fuerit quaecunque m, saltem denario maior, telescopium huius generis describere.

Cum pro casu $m=\infty$ invenerimus $\theta=3,5$, nunc in genere ponamus $\theta=3,5+\frac{e}{m}$, et quia pro $m=10$ fuerat $\theta=3,5806$, erit $e=0,806$, ita ut sit $\theta=3,5+\frac{0,806}{m}$; unde distantiae ita se habebunt:

$$b=-0,875\,\alpha,\quad \beta=\infty=-c;$$

$$\gamma=\left(3,0625+\frac{0,7060}{m}\right)\alpha,\quad d=-\left(3,5+\frac{0,8060}{m}\right)\frac{\alpha}{m}.$$

Pro lente autem secunda ponatur

$$F'=-\left(0,8205+\frac{f}{m}\right)\alpha,\quad G'=-\left(1,3309+\frac{g}{m}\right)\alpha.$$

Comparatione igitur instituta cum casu $m=10$ erit

$$f=0,0290,\quad g=-0,0790.$$

Constructio huius telescopii

I. Pro prima lente, Crown Glass,

radius utriusque faciei $=1,06\,\alpha$. Intervallum $=0,125\,\alpha$.

II. Pro secunda lente, Flint Glass,

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & =-\left(0,8205+\dfrac{0,0290}{m}\right)\alpha\\[2ex] \text{posterioris} & =-\left(1,3309-\dfrac{0,0790}{m}\right)\alpha\end{cases}.\quad \text{Intervallum minimum.}$$

III. Pro tertia lente, Crown Glass,

radius utriusque faciei $=+\left(3,2462+\frac{0,7484}{m}\right)\alpha$.

Intervallum $=\left(3,0625-\frac{2,7940}{m}-\frac{0,8060}{m^2}\right)\alpha$.

IV. Pro quarta lente, Crown Glass,

radius faciei utriusque $=-\left(3,710+\frac{0,8544}{m}\right)\frac{\alpha}{m}$.

Sicque tota longitudo erit

$$=\left(3{,}1875-\frac{2{,}7940}{m}-\frac{0{,}8060}{m^2}\right)a;$$

deinde lentis obiectivae semidiameter aperturae debet esse $x=\frac{m}{50}$ dig., unde a capi debebit $a=\frac{2}{25}m$ dig. sive maius campique visi semidiameter

$$\Phi=\frac{859}{m-\frac{1}{2}}\ \text{min. prim.}$$

SCHOLION 2

191. En ergo insignem multitudinem variorum primi generis telescopiorum, quae adhuc in infinitum multiplicari possent, si litteris B et C alios valores tribuere vel etiam pluribus lentibus uti vellemus. Verum huiusmodi investigatio prorsus superflua videtur, cum maior perfectionis gradus exspectari nequeat ac plures lentes claritati semper obsint neque etiam maior campus sperari possit. Inprimis autem observandum est in his telescopiis marginem coloratum aliter destrui non potuisse nisi diversis vitri speciebus adhibendis, ita ut iam affirmare possimus, ex eadem vitri specie huiusmodi telescopia confici non posse, quae non vitio marginis colorati laborent, cum tamen in sequentibus generibus, lentibus ex una vitri specie factis, talis margo feliciter tolli possit, etiamsi tunc ipsum diffusionis spatium ad nihilum redigere non liceat. Haec restrictio etiam in causa erat, quod campum apparentem vix notabiliter augere licuerat; sin autem marginem coloratum negligere vellemus, campus haud mediocriter augeri posset. Tum enim in casu ultimi problematis litterae k et θ manerent arbitrio nostro relictae, et cum semidiameter campi esset $\Phi=-\frac{\pi''}{m-k}$ posito $\eta=0$, videtur ea ad lubitum augeri posse, dum tantum k parum ab m deficiens assumatur, atque adeo sumto $k=m$ in infinitum abiret; quod tamen nullo modo praestari posse experientia abunde testatur. Quare hoc dubium solvisse operae erit pretium; ad quod tantum recordari oportet litteris π, π' et π'' certum praescriptum esse terminum veluti $\frac{1}{4}$, quem transgredi nunquam debent; quare, etsi hoc casu valor $-\pi''=\frac{1}{4}$ enormem magnitudinem pro Φ praebet, tamen hic etiam ad valorem ipsius π spectari convenit; qui cum ante iam inventus esset $\pi=-\Phi(k-1)$ ideoque $\pi=\frac{\pi''(k-1)}{m-k}$, maxime cavendum est, ne hinc prodeat $\pi>\pi''$; quamobrem litteram k iam non pro lubitu augere licebit, sed

eo usque tantum, quoad fiat $k-1=m-k$ sive $k=\frac{m+1}{2}$, quae positio campum duplo maiorem quam ante produceret, scilicet $\Phi=\frac{-\pi''}{m-k}=\frac{-2\pi''}{m-1}$, quem ergo obtinere possemus, si modo marginem coloratum despiciamus. Tum autem pro eodem casu ultimi problematis forent distantiae determinatrices

$$b=\frac{-2\alpha}{m+1},\quad \beta=\infty=-c \quad \text{et} \quad \gamma=\frac{+2\theta\alpha}{m+1} \quad \text{et} \quad d=\frac{-\theta\alpha}{m};$$

unde fit postremum intervallum

$$\gamma+d=+\theta\alpha\left(\frac{2}{m+1}-\frac{1}{m}\right)=\frac{\theta\alpha(m-1)}{m(m+1)},$$

ubi adhuc θ nostro arbitrio permittitur, dummodo positive capiatur; verum quia hoc modo margo coloratus praemagnus esset proditurus, huiusmodi telescopia nullo modo commendari poterunt; atque hoc praeceptum etiam in posterum observabimus nullaque alia telescopia exceptis tantum simplicissimis proferemus, nisi quae saltem a margine colorato sint immunia, siquidem tota haec confusio non vitari queat.

LIBRI SECVNDI,

DE

CONSTRVCTIONE TELESCOPIORVM

SECTIO SECVNDA.

DE

TELESCOPIIS SECVNDI GENERIS,

QVAE

LENTE OCULARI CONVEXA INSTRVCTA, OBIECTA SITU INVERSO REPRAESENTANT.

CAPUT I

DE TELESCOPIIS SIMPLICIORIBUS SECUNDI GENERIS EX UNICA VITRI SPECIE PARATIS

PRAECEPTUM GENERALE

192. Cum in hac sectione obiectorum repraesentatio semper futura sit inversa, hic ante omnia monendum est in omnibus formulis generalibus supra traditis litteram m, qua multiplicatio indicatur, ubique negative capi debere, ita ut in illis formulis, quoties m occurrit, eius loco $-m$ scribi oporteat.

PROBLEMA 1

193. *Simplicissimum huius generis telescopium ex duabus lentibus eademque vitri specie construere, quod obiecta secundum datam multiplicationem m aucta situque inverso repraesentet.*

SOLUTIO

Proposita multiplicatione m formulae nostrae generales statim praebent hanc determinationem $m = \frac{\alpha}{b}$, ubi manifestum est α exprimere distantiam focalem lentis obiectivae, b vero ocularis ob $\beta = \infty$. Cum igitur fractio $\frac{\alpha}{b}$

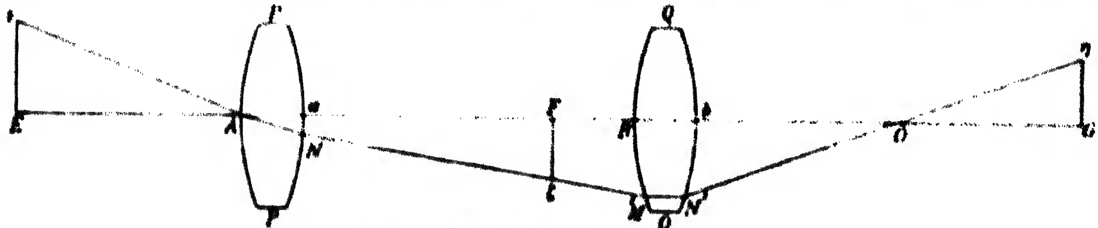

Fig 13 (iterata).

hic sit positiva simulque harum lentium distantia $\alpha + b$, utramque distantiam α et b positivam esse oportet, ita ut ambae lentes futurae sint convexae et imago realis in puncto F (Fig. 13, Lib. 1, pag. 146) repraesentetur, quod

simul est focus communis utriusque lentis. Tum vero campi apparentis semidiameter erit $\Phi = \frac{\pi}{m+1}$, qui autem non conspicietur nisi oculo in certo loco constituto, cuius distantia post lentem ocularem est $O = \frac{\pi q}{m\Phi}$ denotante q distantiam focalem lentis ocularis, quam vidimus esse $= b$. Cum igitur sit $\pi = (m+1)\Phi$, erit haec distantia $O = \frac{m+1}{m} \cdot q$ ideoque tantillo maior quam q. Ut iam obiecta dato claritatis gradu adpareant, quem vocavimus $= y$, ita ut y sit mensura semidiametro pupillae minor, ostensum est aperturam lentis obiectivae tantam esse debere, ut eius semidiameter sit $x = my$, unde iam intelligitur eius distantiam focalem p vel α certe minorem statui non posse quam $4x$. Videamus nunc etiam, quomodo hoc telescopium ratione marginis colorati futurum sit comparatum. Cum is prorsus tolli non possit, quia fieri nequit, ut sit $0 = \frac{dn'}{n'-1} \cdot \frac{\pi}{m\Phi} = \frac{dn'}{n'-1} \cdot \frac{m+1}{m}$, multo minus haec confusio penitus destrui potest, cum esse deberet $0 = \frac{dn}{n-1} \cdot (p+q)$, quia $p+q$ est distantia lentium. Eo magis autem in id est incumbendum, ut confusio primae speciei ab apertura pendens insensibilis reddatur seu ut semidiameter huius confusionis certum quendam limitem, quem littera k indicavimus, non superet. Quare ex superioribus [§ 42, 44] colligetur haec conditio:

$$+\frac{m\mu x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda'}{m}\right) < \frac{1}{4k^3} \quad \text{seu} \quad \frac{x^3}{p^3}\left(\mu\lambda m + \mu\lambda'\right) < \frac{1}{k^3},$$

unde pro distantia focali lentis obiectivae $p = \alpha$ hanc obtinemus conditionem:

$$p > kx\sqrt[3]{(\mu\lambda m + \mu\lambda')},$$

et ob $x = my$ erit

$$p > kmy\sqrt[3]{(\mu\lambda m + \mu\lambda')}$$

seu ad minimum p huic formulae aequalis capi poterit.

COROLLARIUM 1

194. Hinc ergo statim apparet, quo maior requiratur multiplicatio, eo maiorem esse debere lentis obiectivae distantiam focalem ideoque etiam longitudinem telescopii neque id in ratione tantum simplici, sed fere in ratione sesquitriplicata multiplicationis, scilicet ut $m^{\frac{4}{3}}$; hincque ista longitudo mox tanta evadit, ut neutiquam sit verendum, ne quantitas p minor fiat quam $4my$.

COROLLARIUM 2

195. Numerus μ ab indole vitri pendet, unde sequitur, quo minor is fuerit, eo magis longitudinem p imminui. Vidimus autem supra crescente ratione refractionis n istum numerum μ diminui; sed quia tum formula $\frac{dn}{n-1}$ crescit ideoque margo coloratus augetur, praestabit vitro uti communi.

COROLLARIUM 3

196. Hinc etiam intelligimus, quo maior gradus claritatis y desideretur, eo magis quantitatem p augeri debere, quod etiam usu venit, si maior distinctio requiratur, quia tum litterae k maior valor tribui deberet.

COROLLARIUM 4

197. Ad longitudinem autem horum instrumentorum contrahendam plurimum interest lentem obiectivam ita conficere, ut fiat $\lambda = 1$, quippe qui huius litterae minimus est valor. Quare huic lenti eam formam tribui conveniet, quam supra in capite de lentibus obiectivis descripsimus.

COROLLARIUM 5

198. Circa lentem autem ocularem parum lucraremur, si et $\lambda' = 1$ capere vellemus, quoniam in maioribus multiplicationibus hic terminus prae primo evanescit; quin potius huic lenti eiusmodi figuram tribui necesse est, quae maximae aperturae sit capax, quoniam ab ea campus apparens potissimum pendet; quare haec sanciatur regula, ut lens ocularis utrinque aequaliter convexa conficiatur, quoniam tum demum littera π valorem $\frac{1}{4}$ vel etiam maiorem accipere potest. Tum vero erit

I. Pro vitro coronario seu $n = 1,53$:
$$\lambda' = 1,60006.$$

II. Pro vitro communi seu $n = 1,55$:
$$\lambda' = 1,62991.$$

III. Pro vitro denique crystallino seu $n = 1,58$:
$$\lambda' = 1,67445.$$

SCHOLION 1

199. HUGENIUS[1]) partim theoriae satis incompletae partim experimentis innixus distantiam focalem lentis obiectivae quadrato multiplicationis proportionalem statuit, cui tantum abest, ut adversari velim, ut potius in praxi eius praesertim temporis assentiar; nostra enim determinatio innititur huic rationi, quod facies lentium ad figuram sphaericam perfecte sint formatae, quam si artifex exacte efficere posset, nullum est dubium, quin nostra formula veritati sit consentanea, quod quidem nunc summorum artificum industriae concedendum videtur; sed quando figura lentium a sphaerica figura tantillum aberrat, notum est vitium eo magis esse sensibile, quo maior fuerit distantia focalis lentis, cui propterea aliter occurri nequit nisi distantiam focalem maiorem reddendo quam secundum nostram regulam. Num autem praecise ratio duplicata inde exsurgat, neutiquam affirmare licet, sed prout quaeque lens feliciori successu fuerit elaborata, eo minor distantia focalis sufficit eidem multiplicationi producendae, seu potius eadem lens maiori multiplicationi producendae erit apta; quod etsi perpetuo est observandum, tamen hic assumo lentibus non solum sphaericas figuras, sed etiam secundum datos radios tribui posse.

SCHOLION 2

200. His autem HUGENII observationibus praecipue utemur ad gradus tam claritatis quam distinctionis definiendos, quibus astronomi contenti esse solent, etiamsi cuique liberum relinquatur sive maiorem sive minorem gradum eligere. Quod igitur primo ad gradum claritatis attinet, HUGENIUS lenti obiectivae, cuius distantia focalis $=20$ ped. sive 240 digit., assignat aperturam, cuius semidiameter $=1{,}225$ digit., eamque ad multiplicationem $m=89$ aptam iudicat; quam rationem etiam in reliquis lentibus obiectivis observat; quare, cum hic sit $x=1{,}225$ dig. et $m=89$, ob $x=my$ hinc colligimus $y=\frac{x}{m}=\frac{1{,}225}{89}=\frac{1}{73}$; quare, cum supra passim assumserimus $y=\frac{1}{50}$, multo maiorem claritatis gradum illis instrumentis conciliavimus eumque adeo duplo maiorem.

Quod dein ad gradum distinctionis attinet littera k contentum, in allegato HUGENII exemplo perpendamus esse $p=240$ dig., $m=89$ et $y=\frac{1}{73}$, sum-

1) *CHR. HUGENII Opera reliqua*, Vol. II, quod continet opera posthuma, Amstelodami 1728, Dioptrica, Prop. LVI. E. Ch.

toque $\mu = \frac{9}{10}$ et $\lambda = 1$ reiectoque altero termino in formula radicali hi valores in nostra formula substituti dabunt

$$240 = 89 \cdot \frac{1}{73} \cdot k \sqrt[3]{\frac{9}{10}} \cdot 89, \quad \text{ergo} \quad k = \frac{73 \cdot 240}{89 \cdot \frac{9}{10} 89},$$

quae fractio evoluta dat $k = 45$. Quare, cum supra passim sumserimus $k = 50$, maiorem distinctionis gradum, quam hinc oritur, sumus complexi. Dum igitur in nostra formula ky occurrat, secundum HUGENIUM sufficeret statuere $ky = \frac{45}{73} = \frac{5}{8}$ circiter, ex quo patet, si statuamus $ky = 1$, non solum claritatis, sed et distinctionis maiorem gradum obtineri, simul vero longitudinem telescopii multo maiorem esse prodituram, quam si poneremus $ky = \frac{5}{8}$.

SCHOLION 3

201. Quoniam vitrum crystallinum ad huiusmodi telescopia ineptum est iudicandum, siquidem margo coloratus augeretur, pro duabus vitri speciebus, altera qua $n = 1,53$, altera qua $n = 1,55$, constructiones hic apponamus.

Constructio huiusmodi telescopii
utraque lente ex vitro coronario $n = 1,53$ parata

I. Pro lente obiectiva

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 0,6023\,\alpha \\ \text{posterioris} & = 4,4131\,\alpha. \end{cases}$$

$$\text{Intervallum} = \frac{m+1}{m} \cdot \alpha.$$

II. Pro lente oculari

$$\text{Radius utriusque faciei} = 1,06 \cdot \frac{\alpha}{m}.$$

Distantia oculi ab hac lente $= \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\alpha}{m}$.

Semidiameter aperturae lentis obiectivae $= m y$, lentis ocularis $= \frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha}{m}$.

Semidiameter campi $\Phi = \frac{859}{m+1}$ minut. sumendo

$$\alpha = kmy \sqrt[3]{0,9875(m + 1,60006)}.$$

Constructio huiusmodi telescopii
utraque lente ex vitro communi $n = 1{,}55$ parata

I. Pro lente obiectiva

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 0{,}6145\,\alpha\\ \text{posterioris} & = 5{,}2438\,\alpha.\end{cases}$$

Semidiameter aperturae $= my$. Intervallum $= \frac{m+1}{m}\cdot\alpha$.

II. Pro lente oculari

Radius utriusque faciei $= 1{,}10\cdot\frac{\alpha}{m}$.

Semidiameter aperturae $= \frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha}{m}$. Distantia oculi $= \frac{m+1}{m}\cdot\frac{\alpha}{m}$.

Semidiameter campi apparentis $\Phi = \frac{859}{m+1}$ minut. sumendo

$$\alpha = kmy\sqrt[4]{0{,}9381\,(m + 1{,}62991)},$$

ubi quilibet gradum claritatis et distinctionis pro lubitu assumere potest.

PROBLEMA 2

202. *Si lens obiectiva fuerit duplicata eius generis, quod descripsimus § 65, constructionem telescopii describere.*

SOLUTIO

Hic omnia, quae in praecedente problemate de multiplicatione, campo apparente et loco oculi definivimus, manent eadem; tantum in expressione pro semidiametro confusionis inventa numerus λ minorem adipiscitur valorem ultra partem quintam unitatis imminutum; unde distantia focalis lentis obiectivae etiam minorem valorem habere poterit; id quod sine dubio tanquam insigne lucrum est spectandum, cum hoc modo longitudo instrumenti haud mediocriter contrahatur. Hic autem ad vitri speciem, ex quo lentes parantur, inprimis est attendendum, quandoquidem numerus λ per eam definitur, unde excluso vitro crystallino ob rationes ante allegatas constructiones huiusmodi telescopiorum pro binis reliquis speciebus hic exhibeamus.

Constructio huiusmodi telescopii utraque lente ex vitro coronario pro quo $n = 1{,}53$ parata

I. Pro lente obiectiva duplicata

$$\text{Lentis prioris radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = +1{,}2847\,\alpha \\ \text{posterioris} = +8{,}8222\,\alpha \end{cases}$$

$$\text{lentis posterioris radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = +0{,}6464\,\alpha \\ \text{posterioris} = -1{,}6570\,\alpha. \end{cases}$$

Semidiameter aperturae $x = my$. Intervallum usque ad lentem ocularem $= \frac{m+1}{m}\cdot\alpha$.

II. Pro lente oculari

Radius faciei utriusque $= 1{,}06\cdot\frac{\alpha}{m}$.

Semidiameter aperturae $= \frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha}{m}$.

Distantia oculi post hanc lentem $O = \frac{m+1}{m}\cdot\frac{\alpha}{m}$.

Hic scilicet ipsa lens obiectiva duplicata ut simplex spectatur, cuius distantia focalis sit $= \alpha$, quae iam ita capi debet, ut fiat

$$\alpha > kmy\sqrt[3]{0{,}9875\,(0{,}1951\,m + 1{,}6006)}.$$

Semidiameter vero campi apparentis est ut ante $\Phi = \frac{859}{m+1}$ minut.

Constructio huiusmodi telescopii utraque lente ex vitro communi $n = 1{,}55$ parata

I. Pro lente obiectiva duplicata

$$\text{Lentis prioris radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = +1{,}2289\,\alpha \\ \text{posterioris} = +10{,}4876\,\alpha \end{cases}$$

$$\text{lentis posterioris radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = +0{,}6527\,\alpha \\ \text{posterioris} = -1{,}6053\,\alpha. \end{cases}$$

Semidiameter aperturae $x = my$. Intervallum usque ad lentem ocularem $= \frac{m+1}{m}\cdot\alpha$.

II. Pro lente oculari

Radius faciei utriusque $= 1{,}10\cdot\frac{\alpha}{m}$.

Semidiameter aperturae $= \frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha}{m}$.

Distantia oculi post hanc lentem $O = \frac{m+1}{m}\cdot\frac{a}{m}$, ubi cernetur campus, cuius semidiameter $= \frac{859}{m+1}$ minut.

At distantia focalis ipsius lentis obiectivae duplicatae ita capi debet, ut sit

$$\alpha > kmy\sqrt[3]{0{,}9381(0{,}1918\,m + 1{,}6299)}.$$

COROLLARIUM 1

203. Si ergo multiplicatio tanta sit, ut in valore ipsius α postremus terminus prae altero evanescat, hoc casu distantia α minor erit quam praecedente, in ratione circiter $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}:1$ vel $1:\sqrt[3]{5}$, hoc est fere ut $10:17$.

COROLLARIUM 2

204. Cum istae lentes duplicatae ex principio minimi sint deductae, eo magis sunt ad praxin accommodatae, cum metuendum non sit, ut exigui errores ab artifice commissi effectum perturbent, quod maxime esset metuendum, si reliquas lentes compositas, quae quidem perfectae sunt vocatae, loco obiectivae substituere vellemus.

SCHOLION

205. Quo clarius appareat, quantum lucrum hinc sit exspectandum, accommodemus ambos casus ad datam multiplicationem, puta $m = 100$, ubi quidem solum vitrum commune consideremus.

Si igitur I.) lente obiectiva simplici utamur, distantia focalis α ita accipi debet, ut sit

$$\alpha = 100\,ky\sqrt[3]{0{,}9381\cdot 101{,}6299}, \quad \alpha = 100\,ky\cdot 4{,}5684;$$

unde, si cum HUGENIO capiatur $ky = \frac{5}{8}$ dig., prodit

$$\alpha = 285\tfrac{1}{2}\text{ dig.} = 23\text{ ped. } 9\tfrac{1}{2}\text{ dig.}$$

Sin autem II.) utamur lente obiectiva duplicata, habebimus

$$\alpha = 100\,ky\sqrt[3]{0{,}9381\cdot 20{,}8099}, \quad \alpha = 100\,ky\cdot 2{,}6926;$$

sumtoque iterum $ky = \frac{5}{8}$ dig. erit

$$\alpha = 168\tfrac{1}{3}\text{ dig.} = 14\text{ ped. } \tfrac{1}{3}\text{ dig.};$$

haec certe contractio antehac maximi momenti foret visa; nunc autem, cum multo adhuc breviora telescopia desideremus, non admodum notatu digna videbitur, quod etiam eveniet in casu sequentis problematis, ubi lentem obiectivam triplicatam faciemus.

PROBLEMA 3

206. *Si lens obiectiva fuerit triplicata, quam § 66 descripsimus, telescopii constructionem describere.*

SOLUTIO

Omnia manent ut ante, nisi quod pro hac lente triplicata futurum sit $\lambda = \frac{8 - 8\nu}{27}$; unde considerando tantum vitrum commune, pro quo $n = 1,55$, lentis huius obiectivae distantia focalis α ita definiri debet, ut sit

$$\alpha = kmy\sqrt[3]{0,9381\,(0,0422\,m + 1,6299)};$$

hinc igitur sequenti modo talia telescopia erunt construenda.

Constructio huiusmodi telescopii
utraque lente ex vitro communi pro quo $n = 1,55$ parata

I. Pro lente obiectiva triplicata

Lentis primae radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = +\ 1,8434\,\alpha \\ \text{posterioris} & = +\ 15,7315\,\alpha \end{cases}$

lentis secundae radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = +\ 0,9791\,\alpha \\ \text{posterioris} & = -\ 2,4077\,\alpha \end{cases}$

lentis tertiae radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = +\ 0,6665\,\alpha \\ \text{posterioris} & = -\ 1,1183\,\alpha. \end{cases}$

Eius aperturae semidiameter $x = my$.

Intervallum usque ad lentem ocularem $= \frac{m+1}{m} \cdot \alpha$.

II. Pro lente oculari

Radius faciei utriusque $= 1,10 \cdot \frac{\alpha}{m}$.

Eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha}{m}$.

Distantia oculi $= \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\alpha}{m}$ campique apparentis semidiameter $\Phi = \frac{860}{m+1}$ minut.

Ipsa autem lentis obiectivae distantia focalis tanta accipi debet, ut sit

$$\alpha = kmy \sqrt[3]{0{,}9381\,(0{,}0422\,m + 1{,}6299)}.$$

COROLLARIUM 1

207. Si ergo multiplicatio statuatur $m = 100$, capi poterit

$$\alpha = 100 ky \sqrt[3]{0{,}9381 \cdot 5{,}8499}$$

sive $\alpha = 100 ky \cdot 1{,}7639$ sumtoque $ky = \frac{5}{8}$ dig.

$$\alpha = 110\tfrac{1}{4} \text{ dig.} = 9 \text{ ped. } 2\tfrac{1}{4} \text{ dig.};$$

sicque longitudo totius telescopii usque ad oculum prodibit

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 \cdot \alpha = 112\tfrac{1}{2} \text{ dig.} = 9 \text{ ped. } 4\tfrac{1}{2} \text{ dig.}$$

COROLLARIUM 2

208. Quod ad gradum claritatis y attinet, quoniam hic plures sunt lentes, per quas radiis est transeundum, eorumque ideo maior iactura metuenda, etiamsi maiorem claritatem non requiramus quam HUGENIUS, tamen ipsi y maior valor tribui debet quam $\frac{1}{72}$; quare retento valore k longitudo telescopii maior prodibit.

SCHOLION

209. Haec ultima cautela maximi est momenti et semper probe observanda, quoties maiore lentium numero utemur, atque hac occasione haud abs re erit eorum telescopiorum ex Anglia allatorum, quae nocturna sunt appellata, mentionem facere; circa quae primum observo eorum usum in summis tenebris plane fore nullum, sed tantum tempore crepusculi vel lucente luna ea adhiberi solere ad obiecta non nimis longinqua spectanda. Totum autem mysterium, quod in his telescopiis plerique quaesiverunt, huc redit, ut iis summus claritatis gradus concilietur, seu ut litterae y semidiameter ipsius pupillae tribuatur sive circiter statuatur $y = \frac{1}{12}$ dig., siquidem tum claritas visa tricies sexies maior sentietur, quam si sumeretur $y = \frac{1}{72}$. Quare, ne

haec telescopia nimis fiant longa, multo minori multiplicatione nos contentos esse oportet. Ad hunc autem scopum multiplicatio $m = 10$ plus quam sufficiens esse solet. Si enim noctu obiecta longinqua quasi nobis decuplo essent propiora eaque eodem claritatis gradu aspicere licebit atque nudis oculis, plus certe desiderari non poterit.

PROBLEMA 4

210. *Si denique lens obiectiva fuerit quadruplicata, secundum principia § 154 libro superiore tradita constructa, telescopii constructionem describere.*

SOLUTIO

Hic denuo omnia manent ut ante; sed quod hic inprimis notatu dignum occurrit, est, quod in formula pro distantia focali α resultante, scilicet

$$\alpha = kmy\sqrt[3]{\mu\left(\frac{1-5\nu}{16}\cdot m+\lambda''\right)},$$

valor numeri λ prodeat negativus ideoque certo casu tota confusio evanescere queat; qui casus maxime meretur, ut omni diligentia evolvatur. Sumamus igitur omnes istas lentes ex vitro communi, pro quo $n = 1,55$, esse confectas lentemque ocularem utrinque ut hactenus aeque convexam formari, atque habebimus

$$\lambda = \frac{1-5\nu}{16} = -0,010216 \quad \text{et} \quad \lambda'' = 1,6299,$$

unde intelligitur semidiametrum confusionis prorsus in nihilum abire, si capiatur

$$m = \frac{1,6299}{0,010216} = 159\frac{1}{2}.$$

Pro hoc ergo casu quantitas α non amplius ex hac formula sed unice ex apertura, quam gradus claritatis postulat, determinabitur; si enim pro gradu claritatis in genere sumamus y, semidiameter aperturae debet esse $= my$, unde distantia α tanta accipi debet, ut pro radiis singularum facierum tantam aperturam recipere possit. Quare, si α etiam nunc ut quantitatem indefinitam spectemus, constructio telescopii ita se habebit.

Constructio huiusmodi telescopii
lentibus ex vitro communi paratis

I. Pro lente obiectiva quadruplicata

Lentis primae radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = +\ 2{,}4580\,a \\ \text{posterioris} = +\ 20{,}9754\,a \end{cases}$

lentis secundae radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = +\ 1{,}3054\,a \\ \text{posterioris} = \quad 3{,}2103\,a \end{cases}$

lentis tertiae radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = +\ 0{,}8887\,a \\ \text{posterioris} = \quad 1{,}4910\,a \end{cases}$

lentis quartae radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = +\ 0{,}6710\,a \\ \text{posterioris} = \quad 0{,}9710\,a. \end{cases}$

Semidiameter aperturae $x = my$.
Intervallum usque ad lentem ocularem $= \frac{m+1}{m} \cdot a$.

II. Pro lente oculari

Radius utriusque faciei $= 1{,}10 \cdot \frac{a}{m}$.
Semidiameter aperturae $= \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{m}$.
Distantia oculi $= \frac{m+1}{m} \cdot \frac{a}{m}$
campique visi semidiameter $= \frac{859}{m+1}$ minut.
Hic autem in genere capi deberet

$$a \geq kmy \sqrt[3]{0{,}9381\,(-\,0{,}010216\,m + 1{,}6299)},$$

nisi valor hinc prodiens minor fuerit, quam ut praescripta apertura $x = my$ locum habere possit, id quod potissimum pro $m = 159\frac{1}{2}$ eveniet.

Pro quo radii facierum modo exhibiti perpendi debent, inter quos mini- [illegible], huius pars quarta $0{,}1678\,a$ seu fere $\frac{1}{6}\,a$ determinabit semidiametrum aperturae; quae, cum ob $m = 159\frac{1}{2}$ sit $159\frac{1}{2}\,y$, capi debebit $a > 6.159\frac{1}{2}\,y$ seu $a > 957\,y$; si igitur sumamus $y = \frac{1}{50}$ dig., capi debebit $a > 19\frac{7}{50}$ dig., quocirca statuamus $a = 20$ dig. Sumtaque multiplicatione $m = 160$ habebimus hanc specialissimam constructionem.

Constructio telescopii pro multiplicatione $m = 160$ lentibus e vitro communi $n = 1{,}55$ confectis

I. Pro lente obiectiva quadruplicata

Lentis primae	radius faciei	anterioris	$= +\ 49{,}16$ dig.
		posterioris	$= +\ 419{,}50$ dig.
lentis secundae	radius faciei	anterioris	$= +\ 26{,}10$ dig.
		posterioris	$= \ \ 64{,}21$ dig.
lentis tertiae	radius faciei	anterioris	$= +\ 17{,}77$ dig.
		posterioris	$= \ \ 29{,}82$ dig.
lentis quartae	radius faciei	anterioris	$= +\ 13{,}42$ dig.
		posterioris	$= \ \ 19{,}42$ dig.

Eius aperturae semidiameter $x = my = 3{,}2$ dig.
Intervallum usque ad lentem ocularem $= 20\frac{1}{8}$ dig.

II. Pro lente oculari

Radius utriusque faciei	$= 0{,}1375$ dig.
eiusque semidiameter aperturae	$= \frac{1}{32}$ dig.
Distantia oculi	$= 0{,}1258$ dig.,
ita ut sit tota telescopii longitudo	$= 20\frac{1}{4}$ dig.
campique visi semidiameter	$= 5'20''$.

COROLLARIUM 1

211. Si multiplicationem minorem statuissemus, longitudo telescopii maior prodiisset. Si enim statuamus $m = 50$ litteraeque k etiam valorem 50 tribuamus, prodiret $\alpha = 50\sqrt[3]{0{,}9381 \cdot 1{,}1189}$ seu $\alpha > 50{,}81$ ideoque plus quam duplo maior quam casu $m = 160$, quod certe ingens est paradoxon.

COROLLARIUM 2

212. Si artifex in constructione lentis obiectivae tantillum aberret, eius error valorem numeri λ tantum paulisper augebit, quia ille valor $\lambda = -0{,}010216$ omnium est minimus; si enim ob hos errores λ particula $\frac{1}{1000}$ augeatur, prodit

$\lambda = -0{,}010154$[1]), ita ut tum ista lens quadruplicata ad maiorem multiplicationem producendam sit apta; quod paradoxon priori non cedit.

SCHOLION 1

213. Neque hic neque in praecedentibus definivimus, cuiusmodi mensuram digitorum intelligamus, an sint Parisini an Londinenses an Rhenani etc. Verum consultum potius est hanc mensuram prorsus indeterminatam relinquere. Quodsi enim causam dubitandi habeamus lentes secundum regulas praescriptas accurate esse elaboratas, maxime e re erit maiorem mensuram pro digitis adhibere. Sin autem de exsecutione plane simus certi, mensura digitorum minore tuto uti poterimus. Semper autem praxi consulendo utile erit maiorem digitorum mensuram adhibere; atque adeo ipsa ratio, quae nos ad digitorum mensuram perduxit, hoc suadet; haec enim ratio ex apertura pupillae nobis est nata, quam in partibus digiti expressimus. Cum igitur ipsa pupilla tantopere sit mutabilis, ut nihil plane certi de ea statui possit, manifestum est tantum abesse, ut nobis certa quaedam mensura sit praescripta, ut nobis potius liberum sit eam sive augendo sive minuendo notabiliter immutare.

SCHOLION 2

214. Hactenus ostendimus, quemadmodum lentibus compositis loco obiectivae adhibendis haec telescopia non mediocriter contrahi queant. Verum hoc modo nullum plane augmentum campo apparenti inducitur. Iam dudum autem est observatum campum quoque apparentem non mediocriter augeri posse, si etiam lens ocularis sive duplicetur, sive adeo triplicetur. Cum enim campus apparens inprimis ab apertura lentis ocularis pendeat, quam ob causam etiam huic lenti figuram utrinque aequalem tribuimus, ut maioris aperturae capax redderetur, evidens est, si hanc lentem ita instruere liceret, ut adhuc maiorem aperturam recipere posset, campum apparentem in eadem ratione auctum iri. Quo hoc clarius perspiciatur, ponamus lentis ocularis distantiam focalem esse unius digiti, ita ut aperturam admittat, cuius semidiameter $= \frac{1}{4}$ dig. Iam satis manifestum est, si eius loco binae lentes inter se iunctae, utriusque distantia focalis $= 2$ dig., substituantur, tum istius lentis distantiam focalem quoque fore unius digiti, sed hanc lentem compositam duplo maiorem aperturam esse admissuram, siquidem utraque faciebus inter se aequalibus constet ideoque aperturam admittat, cuius semidiameter

1) Prodit e formula $\frac{1{,}001 - 5\nu}{16}$ pro $\nu = 0{,}232692$. Editio princeps: $\lambda = -0{,}000784$. Corr. E. Ch.

dimidii digiti, atque hoc modo campus apparens duplicabitur. Simili modo, si loco eius lentis ocularis simplicis substituantur ternae lentes, quarum singularum distantia focalis sit trium digitorum, idem effectus ratione multiplicationis obtinebitur, sed quia aperturam triplo maiorem admittunt, campus triplicabitur. Haec autem omnino digna sunt, ut adcuratius ex nostris principiis explicentur, atque inprimis influxum huiusmodi lentium compositarum, quo confusionem afficiunt, determinemus.

PROBLEMA 5

215. *Si lens ocularis duplicetur, ut semidiameter campi apparentis duplo maiorem valorem nanciscatur, constructionem huiusmodi telescopii describere.*

SOLUTIO

Cum hic telescopium revera tribus constet lentibus, quarum binae posteriores sibi immediate sunt iunctae, haec investigatio ex casu trium lentium est repetenda. Primo igitur pro multiplicatione habebimus $m = -\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{c}$, ubi, cum esse debeat intervallum $\beta + c = 0$, erit $c = -\beta$ ideoque $\frac{\beta}{c} = -1$, unde fit ut hactenus $m = \frac{\alpha}{b}$ seu $b = \frac{\alpha}{m}$; tum vero posuimus $\beta = Bb = \frac{B\alpha}{m}$ ideoque etiam $c = -\frac{B\alpha}{m}$; quae cum sit distantia focalis postremae lentis ob $\gamma = \infty$, si secunda lens ipsi iuncta parem haberet distantiam focalem, foret $\frac{b\beta}{b+\beta} = c$ sive $\frac{B\alpha}{m(1+B)} = \frac{-B\alpha}{m}$, hincque $B = -2$; sed praestat haec ex nostris principiis deducere; quia enim campi apparentis semidiameter nunc est $\Phi = \frac{\pi - \pi'}{m+1}$, ut hic duplo maior fiat quam casu praecedente, debet esse $-\pi = \pi'$, ut fiat $\Phi = \frac{2\pi}{m+1}$. Ex principiis autem superioribus colligimus $\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\alpha}{b} = m$, unde fit $\mathfrak{B}\pi = (m+1)\Phi$ ideoque $\mathfrak{B} = 2$ hincque $B = -2$, ita ut postremae lentes fiant inter se aequales. Hoc autem valore invento pro semidiametro confusionis habebimus

$$\frac{mx^3}{4p^3}\mu\left(\lambda + \frac{q}{\mathfrak{B}^2 p}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu'}{B}\right) - \frac{\lambda''}{B^3 m}\right),$$

ubi est $p = \alpha$, $q = \mathfrak{B}b = \frac{2\alpha}{m}$, ita ut haec expressio abeat in istam

$$\frac{\mu m x^3}{4\alpha^3}\left(\lambda + \frac{1}{2m}\left(\frac{\lambda'}{4} - \frac{\nu'}{2}\right) + \frac{\lambda''}{8m}\right).$$

Nunc autem probe notandum est has duas lentes posteriores assumtam aperturam, ut fiat $\pi = \frac{1}{4}$, admittere non posse, nisi utraque sibi utrinque reddatur aequalis. Ex qua conditione, si quidem vitro communi utamur, pro quo $n = 1{,}55$, pro lente tertia erit, uti vidimus, $\lambda'' = 1{,}6299$. Quemnam autem valorem numerus λ' sit habiturus, ex supra allatis definire poterimus, cum sit

$$\sqrt{\lambda' - 1} = \frac{\sigma - \varrho}{2\tau} \cdot \frac{b - \beta}{b + \beta} = -\frac{3(\sigma - \varrho)}{2\tau},$$

unde fit

$$\lambda' = 1 + \frac{(\sigma - \varrho)^2 \cdot 9}{4\tau^2};$$

quare, cum fuerit

$$\lambda'' = 1 + \frac{(\sigma - \varrho)^2}{4\tau^2} = 1{,}6299,$$

erit

$$\frac{(\sigma - \varrho)^2}{4\tau^2} = 0{,}6299 \quad \text{ideoque} \quad \lambda' = 6{,}6691,$$

ex quo obtinemus $\frac{\lambda'}{4} - \frac{\nu'}{2} = 1{,}5509$, hincque confusionis pars ex secunda lente orta fit $\frac{0{,}7754}{m}$, dum pars ex tertia lente orta est $\frac{0{,}2037}{m}$; sicque tota nostra lens ocularis duplicata producet in expressione confusionis partem $= \frac{0{,}9791}{m}$. Posita igitur illa semidiametro $= \frac{1}{4k^3}$ colligemus distantiam focalem lentis obiectivae

$$\alpha = kmy\sqrt[3]{0{,}9381(\lambda m + 0{,}9791)}$$

ob $x = my$, ubi λ indefinitum relinquo, ut etiam lens obiectiva pro lubitu sive simplex sive duplicata sive triplicata sive etiam quadruplicata assumi queat. Binae autem lentes posteriores inter se aequales fient et utrinque aeque convexae, radio convexitatis existente $= \frac{2{,}20\,\alpha}{m}$. Oculi vero distantia post hanc lentem reperitur $O = \frac{-\pi' r}{m\Phi} = \frac{\pi r}{m\Phi}$; quia nunc est $r = \frac{2\alpha}{m}$ et $\frac{\pi}{\Phi} = \frac{m+1}{2}$, erit

$$O = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\alpha}{m}$$

prorsus ut ante; tum autem campi apparentis semidiameter erit $= \frac{1718}{m+1}$ minut.

COROLLARIUM 1

216. Hinc ergo patet, si lens ocularis hac ratione duplicetur, eius effectum in confusione augenda minorem esse futurum, quam si haec lens esset simplex.

COROLLARIUM 2

217. Operae pretium erit pro hoc casu in marginem coloratum inquirere, pro quo divisione per $\frac{dn}{n-1}$ facta haec in superioribus occurrit aequatio

$$0 = \frac{\pi b}{\Phi p} - \frac{\pi'}{m\Phi} = \frac{\pi}{\Phi} \cdot \frac{2}{m};$$

cum nunc sit $\frac{\pi}{\Phi} = \frac{m+1}{2}$, haec quantitas, quae evanescere deberet, fit $\frac{m+1}{m}$, prorsus ut ante invenimus pro lente oculari simplici, ita ut hinc pro margine colorato nihil amplius sit metuendum.

COROLLARIUM 3

218. Omnes igitur formulae supra allatae pro constructione telescopiorum, sive lens obiectiva fuerit simplex sive multiplicata, etiam hic locum obtinere possunt, si modo loco lentis ocularis simplicis huiusmodi lens duplicata substituatur, cuius singulae facies secundum radium duplo maiorem sunt elaborandae; tum vero etiam in valore distantiae α post signum radicale loco numeri 1,6299 scribatur hic numerus 0,9791 atque tum campi apparentis semidiameter duplo evadet maior. Vix autem opus est in formula pro α istam correctionem facere, quia tantum de limite sermo est, infra quem α accipi non oportet.

SCHOLION

219. Hic autem inprimis considerari meretur casus, quo lens obiectiva est quadruplicata sive $\lambda = -0{,}010216$ et multiplicatio tanta accipitur, ut confusio penitus evanescat, quod fit, si fuerit $m = \frac{0{,}9791}{0{,}010216} = 95 + \frac{4}{5}$; quare capi potest $m = 96$, et si pro gradu claritatis capiatur $y = \frac{1}{48}$ dig., semidiameter aperturae lentis obiectivae debebit esse $= my = 2$, unde α facile definitur; supra enim vidimus hanc lentem quadruplicatam maiorem aperturam non admittere, quam cuius semidiameter sit $\frac{1}{6}\alpha$, unde posito $\frac{1}{6}\alpha = 2$ dig. fiet $\alpha = 12$ dig., ex quo sequens habebitur constructio.

Constructio telescopii pro multiplicatione $m = 96$
lentibus ex vitro communi pro quo $n = 1{,}55$ confectis

I. Pro lente obiectiva quadruplicata

Lentis primae radius faciei $\begin{cases}\text{anterioris} & = + \ \ 29{,}50 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & = + 251{,}70 \text{ dig.}\end{cases}$

lentis secundae radius faciei $\begin{cases}\text{anterioris} & = + \ 15{,}66 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & = - \ 38{,}53 \text{ dig.}\end{cases}$

lentis tertiae radius faciei $\begin{cases}\text{anterioris} & = + \ 10{,}66 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & = - \ 17{,}90 \text{ dig.}\end{cases}$

lentis quartae radius faciei $\begin{cases}\text{anterioris} & = + \ \ 8{,}05 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & = - \ 11{,}65 \text{ dig.}\end{cases}$

Eius aperturae semidiameter $= 2$ dig.
Intervallum usque ad lentem ocularem $= 12\frac{1}{8}$ dig.

II. Pro oculari duplicata

Lentis utriusque radius faciei utriusque $= 0{,}275$ dig.
Eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{16}$ dig.
Distantia oculi $= 0{,}126$ dig.,
ita ut sit longitudo tota $= 12{,}251$ dig.,
campi autem apparentis semidiameter $= \frac{1718}{97}$ minut. $= 17$ minut. 43 sec.

PROBLEMA 6

220. *Si lens ocularis fuerit triplicata, ut semidiameter campi reddatur triplo maior, telescopii constructionem describere.*

SOLUTIO

Quia hic quatuor lentes sunt considerandae, formula pro multiplicatione erit $m = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\gamma}{d}$, et quia ternae posteriores sibi immediate iunguntur, fiet $\beta + c = 0$ et $\gamma + d = 0$, unde sequentes prodeunt determinationes

$$= \frac{\alpha}{\cdot\cdot}, \quad \beta = Bb = \frac{B\alpha}{m}, \quad c = -\frac{B\alpha}{m}, \quad \gamma = Cc = -\frac{BC\alpha}{m} \quad \text{et} \quad d = \frac{BC\alpha}{m};$$

formula autem pro campo apparente est

$$\Phi = \frac{\pi - \pi' + \pi''}{m+1};$$

qui ut triplo fiat maior quam supra, statui debet $\pi' = -\pi$ et $\pi'' = \pi$; tum enim erit

$$\Phi = \frac{3\pi}{m+1},$$

ita ut sit

$$\pi = -\pi' = \pi'' = \frac{m+1}{3}\cdot\Phi.$$

Pro his autem litteris formulae nostrae sunt

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\alpha}{b} = m, \qquad \frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = \frac{B\alpha}{c} = -m,$$

ubi substitutis valoribus ipsius π et π' habebitur

$$\frac{\mathfrak{B}(m+1)}{3} - 1 = m \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = 3 \quad \text{hincque} \quad B = -\frac{3}{2}.$$

Deinde

$$+\tfrac{1}{3}\mathfrak{C} + \tfrac{1}{3} = 1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = 2 \quad \text{hincque} \quad C = -2$$

sicque trium lentium postremarum distantiae focales erunt

$$\text{secundae } \mathfrak{B}b = \frac{3\alpha}{m}, \quad \text{tertiae } \mathfrak{C}c = \frac{3\alpha}{m}, \quad \text{quartae } d = \frac{3\alpha}{m},$$

ita ut hae tres lentes fiant inter se aequales; distantiae vero determinatrices erunt

$$b = \frac{\alpha}{m}, \quad \beta = -\frac{3}{2}b = -\frac{3\alpha}{2m}, \quad c = \frac{3\alpha}{2m}, \quad \gamma = -2c = -\frac{3\alpha}{m}, \quad d = \frac{3\alpha}{m}.$$

Substituamus hos valores in formula pro semidiametro confusionis, quae fiet

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{q}{\mathfrak{B}^2 p}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right) + \frac{r}{B^2\mathfrak{C}^2 p}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2} + \frac{\nu}{C}\right) + \frac{\lambda'''}{B^2C^2 m}\right),$$

quae ob $p = \alpha$, $q = \frac{3\alpha}{m} = r$ abit in hanc formam:

$$\frac{\mu m x^3}{4\alpha^3}\left(\lambda + \frac{1}{3m}\left(\frac{\lambda'}{9} - \frac{2\nu}{3}\right) + \frac{4}{27m}\left(\frac{\lambda''}{4} - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{\lambda'''}{27m}\right),$$

ubi pro λ', λ'', λ''' numeri idonei sunt quaerendi. Quia autem volumus, ut

quaevis harum lentium maximam admittat aperturam, quod fit, si litteris π, π', π'' valor $=\frac{1}{4}$ tribui possit, necesse est, ut quaelibet earum sit utrinque aequaliter convexa, id quod eveniet, si statuatur

$$\sqrt{(\lambda'''-1)}=\frac{\sigma-\varrho}{2\tau},$$

$$\sqrt{(\lambda''-1)}=\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\cdot\frac{c-\gamma}{c+\gamma} \quad \text{et} \quad \sqrt{(\lambda'-1)}=\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\cdot\frac{b-\beta}{b+\beta}$$

ideoque

$$\sqrt{(\lambda''-1)}=-\frac{3}{1}\cdot\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}, \quad \sqrt{(\lambda'-1)}=-\frac{5}{1}\cdot\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}.$$

Cum igitur sit, ut supra est ostensum,

$$\lambda'''=1+\left(\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\right)^2=1{,}6299,$$

erit $\left(\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\right)^2=0{,}6299$, ex quo valore colligimus

$$\lambda''=1+9\cdot(0{,}6299)=6{,}6691$$

$$\text{et} \quad \lambda'=1+25\cdot(0{,}6299) \quad \text{seu} \quad \lambda'=16{,}7475.$$

Cum iam pro vitri specie proposita, pro qua $n=1{,}55$, sit $\mu=0{,}9381$ et $\nu=0{,}2326$, nunc poterimus partem assignare, quam haec lens ocularis triplicata in formulam pro confusione infert, quippe in quo cardo rei versatur. Reperietur autem

$$\frac{\lambda'}{9}-\frac{2\nu}{3}=1{,}7058 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3m}\left(\frac{\lambda'}{9}-\frac{2\nu}{3}\right)=\frac{0{,}5686}{m}$$

et

$$\frac{\lambda''}{4}-\frac{\nu}{2}=1{,}5509 \quad \text{et totus terminus} \quad =\frac{0{,}2297}{m}$$

et

$$\frac{\lambda'''}{27m}=\frac{0{,}0603}{m},$$

unde pars a tota lente oculari orta erit $=\frac{0{,}8586}{m}$, ita ut sit tota expressio

$$\frac{\mu x^3}{4\alpha^3}(\lambda m+0{,}8586);$$

sumto igitur $x=my$ positaque hac formula $=\frac{1}{4k^3}$ determinabimus lentis obiectivae distantiam focalem $=\alpha$, ut sit

$$\alpha=kmy\sqrt[3]{0{,}9381(\lambda m+0{,}8586)}$$

sive maius.

Intervallum porro inter lentem obiectivam et ocularem est

$$\alpha + b = \frac{m+1}{m} \cdot \alpha.$$

Et cum tres lentes ocularem constituentes sint inter se aequales et utrinque aequaliter convexae ob cuiuslibet distantiam focalem $= \frac{3\alpha}{m}$, radius singularum facierum erit $= 3{,}30 \frac{\alpha}{m}$, ipsius huius lentis triplicatae distantia focali existente $= \frac{\alpha}{m}$ et semidiametro aperturae $= \frac{3}{4} \cdot \frac{\alpha}{m}$. Pro distantia oculi autem post hanc lentem reperitur $O = \frac{\pi'' s}{m\Phi}$, quae ob $\pi'' = \frac{m+1}{3} \cdot \Phi$ et $s = \frac{3\alpha}{m}$ fiet

$$O = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\alpha}{m}$$

prorsus ut ante; at campi apparentis semidiameter erit

$$\Phi = \frac{3 \cdot 859}{m+1} \text{ minut.} = \frac{2577}{m+1} \text{ minut.}$$

COROLLARIUM 1

221. Circa lentem obiectivam hic nihil definivimus et ea pro lubitu sive simplex sive duplicata sive triplicata sive etiam quadruplicata statui potest, atque etiam regulae constructionis manent eaedem ut ante, dummodo quantitas α ex formula hic data definiatur.

COROLLARIUM 2

222. Eodem etiam modo quo ante ostendi potest haec telescopia non magis margini colorato esse obnoxia quam praecedentia; neque enim duabus lentibus, ad quem casum omnia haec telescopia referre licet, margo coloratus tolli potest.

SCHOLION

223. Simili modo etiam lens ocularis quadruplicari posset, ita ut semidiameter campi quadruplo maior redderetur; at hanc investigationem non ulterius prosequor, quoniam, si plures lentes adhibere velimus, iis insuper alia commoda telescopiis induci possunt, quemadmodum in sequentibus docebimus. Hic scilicet tantum simplicissimam horum telescopiorum speciem sumus contemplati, quae non nisi duabus lentibus, altera obiectiva, altera oculari,

constare est censenda, etiamsi pro utraque lentibus compositis uti liceat; quin etiam ambas has lentes ex eadem vitri specie factas assumsimus atque etiam in sequente capite unicam vitri speciem adhibebimus, ut intelligatur, ad quemnam perfectionis gradum haec telescopia evehi queant, ante quam vitri species diversas in subsidium vocemus. Probe enim distinguendae sunt eae perfectiones, quae unica vitri specie obtineri possunt, ab iis, quae diversas species postulant; quo pacto ista tractatio magis perspicua reddetur. Hic autem adhuc meminisse oportet, qua ratione haec instrumenta ab alio insigni incommodo liberare conveniat, quod in eo consistit, quod saepenumero etiam radii peregrini, qui scilicet non ab obiecto spectando sunt profecti, in tubum intrent atque visionem non mediocriter perturbent. Quemadmodum igitur tales radii peregrini arceri debeant, in sequenti problemate ostendemus.

PROBLEMA 7

224. *Constructis his lentibus ac tubo insertis radios peregrinos, qui per lentem obiectivam in tubum ingrediuntur, arcere, ne in oculum incidant et visionem turbent.*

SOLUTIO

Hunc in finem quandoque solet tubus aliquantillum divergens lenti obiectivae praefigi, ut radii a lateribus advenientes intercipiantur; simul vero haec divergentia tanta esse debet, ut radiorum ab obiecto versus lentem obiectivam emissorum nulli excludantur; id quod fit, si divergentia semidiametro campi fiat aequalis. Interim tamen hoc modo non omnes radii alieni ab introitu in obiectivam arcentur; quare, ne iis parietes tubi intus illuminentur, necesse est, ut tubi interna superficies ubique colore nigro obducatur, quod etiam de tubo praefixo est intelligendum. Neque tamen hoc prorsus sufficit, cum etiam color nigerrimus cuiuspiam illuminationis sit capax, atque ob hanc causam diaphragmata seu septa his tubis inseri solent, pertusa foraminibus,

COROLLARIUM 1

225. Ad quantitatem huius foraminis definiendam consideretur semidiameter campi apparentis Φ, et cum semidiameter imaginis $F\zeta$ sit $= \alpha\Phi$, hic simul capiatur pro semidiametro foraminis.

COROLLARIUM 2

226. Quo maior ergo fuerit campus apparens, eo maiore opus erit foramine, quo diaphragma pertundatur. Ita in exemplo ultimo § 219 allato, cum sit $\alpha = 12$ dig. et $\Phi = 17$ min. 43 sec. seu in partibus radii $\Phi = \frac{1}{194}$, semidiameter istius foraminis debet esse $\frac{6}{97}$ dig. sive circiter $\frac{1}{16}$ dig., ita ut eius diameter adaequet $\frac{1}{8}$ dig.

SCHOLION

227. In tubis astronomicis ad hoc genus referendis hoc ipsum diaphragma etiam micrometro sive filis tenuissimis per hoc spatium dispositis instrui solet, quae, cum in ipso loco imaginis sint extensa, cum ea se quasi confundunt et oculo aeque distincte atque ipsa imago repraesentabuntur; unde astronomi veram quantitatem obiecti distantiamque eius partium diiudicare solent.

CAPUT II

DE ULTERIORI HORUM TELESCOPIORUM PERFECTIONE QUAM QUIDEM UNICAM VITRI SPECIEM ADHIBENDO ASSEQUI LICET

PROBLEMA 1

228. *Si inter lentem obiectivam et ocularem in ipso loco imaginis nova lens constituatur, inquirere in commoda, quae eius ope telescopio conciliare licet.*

SOLUTIO

Quia igitur casum trium lentium habemus, multiplicatio m statim praebet $m = -\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{c}$, ubi, cum esse debeat intervallum inter lentem primam et secundam $=\alpha$, fit $b = 0$ ideoque $\beta = Bb = 0$, nisi forte $B = \infty$. Quo autem hinc valorem ipsius B definire queamus, distantiam focalem secundae lentis[1]) in computum introducamus, quae sit $= q$, ita ut iam habeamus $q = \frac{b\beta}{b+\beta}$, ex qua aequatione colligemus $\beta = \frac{bq}{b-q} = 0$, unde valorem litterae B consequimur, scilicet $B = \frac{\beta}{b} = -1$ hincque $\mathfrak{B} = \infty$. Quoniam igitur tam b quam $\beta = 0$, ita tamen, ut sit $\frac{\beta}{b} = -1$, erit $m = \frac{\alpha}{c}$ ideoque $c = \frac{\alpha}{m}$, ubi c denotat distantiam focalem lentis ocularis.

His notatis semidiameter confusionis erit

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + 0 + \frac{\lambda''}{m}\right),$$

1) Editio princeps: *eius distantiam focalem.* Correxit E. Ch.

ita ut lens media nihil plane ad hanc confusionem conferat perindeque sit, quaecunque figura huic lenti tribuatur. Deinde pro campo apparente habebimus eius semidiametrum

$$\Phi = \frac{\pi - \pi'}{m+1},$$

ubi valor ipsius π per hanc formulam definitur

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\alpha}{b};$$

ex qua ut aliquid concludi possit, loco b introducamus distantiam focalem secundae lentis q, et cum sit $q = \mathfrak{B}b$, erit $b = \frac{q}{\mathfrak{B}}$, qui valor nobis praebet hanc aequationem:

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\alpha\mathfrak{B}}{q}$$

sive ob $\mathfrak{B} = \infty$

$$\frac{\pi}{\Phi} = \frac{\alpha}{q} \quad \text{seu} \quad \pi = \frac{\alpha\Phi}{q},$$

ubi tantum est animadvertendum valorem π quadrantem unitatis superare non debere. Hoc autem valore π admisso pro campo apparente erit

$$\Phi = \frac{-\pi' q}{(m+1)q - \alpha}$$

hincque

$$\pi = \frac{-\alpha\pi'}{(m+1)q - \alpha};$$

quare, si ponamus $-\pi' = \frac{1}{4}$, etiam

$$\pi = \frac{+\frac{1}{4}\alpha}{(m+1)q - \alpha}$$

maior quam $\frac{1}{4}$ esse nequit; si igitur quoque sumamus $\pi = \frac{1}{4}$, novam hanc nanciscimur determinationem

$$1 = \frac{\alpha}{(m+1)q - \alpha}$$

sive

$$(m+1)q = 2\alpha \quad \text{et} \quad q = \frac{2\alpha}{m+1}.$$

Sin autem in formula $\pi = \frac{-\alpha\pi'}{(m+1)q - \alpha}$ fractio $\frac{\alpha}{(m+1)q - \alpha}$ maior esset unitate, tum pro $-\pi'$ minorem valorem quam $\frac{1}{4}$ scribi oporteret, ut prodiret $\pi = \frac{1}{4}$;

tum autem campus apparens minor esset proditurus, quam si etiam π' esset $\frac{1}{4}$. Unde concludimus, sive haec fractio $\frac{\alpha}{(m+1)q-\alpha}$ maior sit unitate sive minor, utroque casu fore

$$\Phi < \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{m+1}$$

ac solo casu $\frac{\alpha}{(m+1)q-\alpha} = 1$ fieri posse

$$\Phi = \frac{1}{2(m+1)},$$

qui valor duplo maior est quam casu duarum lentium simplicium. Interim tamen de quantitate q nihil adhuc definiamus, sed potius videamus, num hoc modo margo coloratus destrui possit, quod eveniet, si fuerit

$$0 = \frac{\pi b}{\Phi p} - \frac{\pi'}{m\Phi} \quad \text{sive} \quad 0 = 0 + \frac{(m+1)q-\alpha}{mq},$$

ex qua sequitur $q = \frac{\alpha}{m+1}$, unde patet quantitatem q utique ita assumi posse, ut margo coloratus penitus destruatur, quae determinatio praecedenti longe est anteferenda. Posito igitur $q = \frac{\alpha}{m+1}$ pro campo apparente foret $\pi = \infty\pi'$ seu $\pi' = \frac{\pi}{\infty}$; quare, cum π maius quam $\frac{1}{4}$ capi non possit, fiet $\pi' = 0$, ita ut hoc casu lens ocularis nihil plane ad campum conferat, quippe qui unice a lente media pendebit, eritque

$$\Phi = \frac{1}{4(m+1)} \quad \text{seu} \quad \Phi = \frac{859}{m+1} \text{ minut.};$$

tum vero pro loco oculi prodibit eius distantia a lente oculari

$$O = \frac{-\pi' r}{m\Phi} = 0$$

seu oculum lenti oculari immediate adplicari oportet. Constructio ergo huiusmodi telescopii ita se habebit.

Primo distantia focalis α ita est definienda, ut sit

$$\alpha = kmy\sqrt[3]{\mu(\lambda m + \lambda'')}$$

sumto scilicet $x = my$, et λ ex forma lentis obiectivae, quaecunque fuerit sive sim-

plex sive multiplicata, definitur, ut in capite praecedente est expositum. Circa lentem autem secundam tenendum est, quia ab ea totus campus pendet, eam utrinque aeque convexam formari debere, ut statui possit $\pi = \frac{1}{4}$; quare, cum pro ea sit $q = \frac{\alpha}{m+1}$, radius utriusque faciei erit $= 1{,}10 \cdot \frac{\alpha}{m+1}$; pro tertia autem lente oculari, quoniam eius apertura plane non in calculum ingreditur, perinde est, quaenam ipsi figura tribuatur, dummodo minimam aperturam recipere possit, quae saltim pupillae sit aequalis. Conveniet igitur statui $\lambda'' = 1$, ut distantia α minor capi possit, eiusque figura secundum praecepta supra data elaborari poterit.

COROLLARIUM 1

229. Mirum videbitur, quod media lens in ipso loco imaginis constituta nihil plane ad confusionem conferat, cum tamen naturam telescopii tantopere immutet, ut oculum adeo lenti oculari immediate adplicari oporteat eiusque ope margo coloratus destrui possit. Quod eo magis adhuc est mirandum, quod haec lens nihil plane in imagine neque in eius loco vel quantitate immutet.

COROLLARIUM 2

230. In ipsa igitur hac lente media diaphragma ante memoratum constitui debebit, cuius foramen ipsi huius lentis aperturae aequale est capiendum; quin etiam super hac ipsa lente micrometrum statui poterit tenuissimis scilicet lineis super eius superficie ducendis.

COROLLARIUM 3

231. Videmus porro hanc lentem mediam tantillo minorem esse debere quam lentem ocularem, cum eius distantia focalis sit $q = \frac{\alpha}{m+1}$, huius vero $= \frac{\alpha}{m}$, nihiloque minus campum apparentem manere eundem, ac si simplici lente oculari ut ante uteremur.

SCHOLION 1

232. Introductio huius lentis in ipso loco imaginis collocandae ideo est maximi momenti, quod margini colorato penitus tollendo inserviat. Usus autem huiusmodi lentis astronomis ob aliam rationem iam dudum innotuit, siquidem hoc modo campum apparentem auxerunt; simul autem ingens huius

lentis incommodum observarunt in eo constans, quod, cum lentis huius quasi substantia se cum imagine permisceat, omnes vel minimae inaequalitates vitri veluti bullulae vel striae a politura relictae cum imagine ipsa uniantur oculoque in pari ratione multiplicatae repraesententur; quod certe incommodum eo magis est vitandum, quod vix eiusmodi vitri frusta reperire liceat, quae nullis plane inaequalitatibus sint obnoxia. Interim tamen haud difficile erit has vitri inaequalitates ab ipso obiecto distinguere tubum quodammodo convertendo; tum enim mox apparebit, quid ad obiectum pertineat quidve ad lentem. Istud autem incommodum tantum locum habet, quando lens in ipso imaginis loco collocatur; simulatque ea tantillum inde removetur, illud mox insensibile evadit. Ceterum hanc investigationem ab hoc casu sum exorsus, quod lens in loco imaginis constituta terminum quasi constituat lentium, quae vel propius ad obiectivam vel ad ocularem collocabuntur; quas ideo distingui convenit, quod illae magis ad obiectivam, hae vero magis ad ocularem sint referendae, quemadmodum etiam his, quotquot fuerint, commune nomen lentium ocularium tribui solet, quae appellatio illis lentibus, quae obiectivae sunt propiores, utiquam certe conveniet.

SCHOLION 2

233. Si marginem coloratum non tantopere reformidemus, ut velimus tam insigne campi apparentis augmentum repudiare, casus in solutione memoratus omnem attentionem meretur. Ponamus igitur, ut ibi animadvertimus, $q = \frac{2\alpha}{m+1}$, ut statui possit $\pi = -\pi' = \frac{1}{4}$, et campi apparentis semidiameter erit

$$\Phi = \frac{1}{2(m+1)} \quad \text{sive} \quad \Phi = \frac{1718}{m+1} \text{ minut.},$$

atque tam lentem secundam quam tertiam utrinque fieri oportebit aeque convexam; hac facta positione pro margine colorato tollendo aequatio fiet

$$0 = \frac{m+1}{2m},$$

quae cum duplo sit minor quam ea, quae capite praecedente debebat ad nihilum redigi, hic istud lucrum adipiscimur, ut margo coloratus, dum penitus tolli nequit, duplo tamen minor fiat, ita ut vix sensibilis evadat; quod si ergo vitro communi, pro quo $n = 1{,}55$, utamur, limes distantiae focalis lentis

ae erit

$$a = kmy\sqrt[3]{0,9381(\lambda m + 1,6299)},$$

loco oculi reperitur distantia

$$O = \frac{\pi' r}{m\Phi},$$

$$\frac{\pi'}{\Phi} = \frac{(m+1)q}{q}\ a = \frac{m+1}{2} \quad \text{et} \quad r = \frac{a}{m}$$

hinc

$$O = \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{a}{m},$$

iam oculus duplo propius lenti oculari admoveri debeat quam casu entis capitis. Distantia autem huius lentis ab obiectiva est ut ibi $1{,}16 \cdot a$. Unde sequens oritur constructio.

Constructio telescopii ex tribus lentibus compositi ex eadem vitri specie formatis pro qua $n = 1,55$

Lens obiectiva pro lubitu sive simplex existente $\lambda = 1$, sive duplicata $= 0,1918$, sive triplicata pro $\lambda = 0,0422$, sive denique quadruplicata pro $0,0102$ eligatur et ita ut in capite praecedente ex distantia focali a detur.

tius lentis semidiameter aperturae esto $x = my$; intervallum usque ad am lentem $= a$.

. Lentis secundae radius utriusque faciei $= 1,10 \cdot \frac{2a}{m+1}$.

us aperturae semidiameter $= \frac{a}{2(m+1)}$.

tervallum ad lentem ocularem $= \frac{a}{m}$.

I. Lentis ocularis radius faciei utriusque $= 1,10 \cdot \frac{a}{m}$.

ius semidiameter aperturae $= \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{m}$.

ro loco oculi eius distantia ab oculari $O = \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{a}{m}$.

ampi vero visi semidiameter $= \frac{1718}{m+1}$ minut.

iam monitum, quantitas a ita est definienda, ut sit

$$a > kmy\sqrt[3]{0,9381(\lambda m + 1,6299)},$$

nisi forte hic valor minor prodeat, quam ut apertura praescripta locum habere possit; quo casu semper distantia focalis ex apertura definiri debet, ut hactenus fecimus.

PROBLEMA 2

234. *Inter lentem obiectivam et imaginem realem eiusmodi lentem constituere, qua omnis confusio ab apertura lentium oriunda destruatur simulque margo coloratus, si fieri queat, tollatur.*

SOLUTIO

Cum hic iterum tres lentes in computum sint ducendae, formula pro multiplicatione dabit $m = -\frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{c}$, ubi, cum inter primam et secundam lentem non detur imago realis, sed ea inter secundam et tertiam cadat, fractio $\frac{\alpha}{b}$ erit negativa, at fractio $\frac{\beta}{c}$ erit positiva. Ponamus ergo

$$\frac{\alpha}{b} = -k$$

eritque $\frac{\beta}{c} = \frac{m}{k}$, unde colligimus

$$b = -\frac{\alpha}{k}, \quad \beta = Bb = \frac{-B\alpha}{k} \quad \text{et} \quad c = \frac{k\beta}{m} = \frac{-B\alpha}{m}.$$

Intervalla autem, quae debent esse positiva, erunt $\alpha + b = \frac{k-1}{k}\alpha$, ita ut $(k-1)\alpha$ debeat esse positivum, et $\beta + c = -B\alpha\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right)$, sicque $B\alpha$ debet esse negativum hincque etiam $\frac{B}{k-1} < 0$.

His notatis consideremus formulas generales

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\alpha}{b} = -k \quad \text{ideoque} \quad \pi = \frac{(1-k)\Phi}{\mathfrak{B}}.$$

Tum vero est $\Phi = \frac{\pi - \pi'}{m+1}$; unde patet, ut valor π aliquid conferat ad campum augendum, debere esse $\pi > 0$ seu $\frac{1-k}{\mathfrak{B}} > 0$; at quia $\frac{B}{k-1} < 0$, erit $-\frac{B}{\mathfrak{B}} < 0$ ideoque $\frac{B}{\mathfrak{B}} > 0$; hoc scilicet requiritur, si campum augere velimus. Nunc consideremus aequationem pro margine colorato tollendo

$$0 = \frac{\pi b}{\Phi p} - \frac{\pi'}{m\Phi},$$

quae ob

$$p=\alpha,\quad b=-\frac{\alpha}{k},\quad \frac{\pi}{\Phi}=\frac{1-k}{\mathfrak{B}}\quad \text{et}\quad \frac{\pi'}{\Phi}=\frac{1-k}{\mathfrak{B}}-m-1$$

abit in hanc

$$0=-\frac{(1-k)}{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}\right)+\frac{(m+1)}{m},$$

unde invenimus

$$\mathfrak{B}=\frac{(1-k)(m+k)}{k(m+1)}\quad \text{ideoque}\quad B=\frac{(1-k)(m+k)}{2km-m+k^2}.$$

Ex his autem valoribus fit

$$\frac{B}{\mathfrak{B}}=\frac{k(m+1)}{2km-m+k^2};$$

unde patet, ut etiam secunda lens campum augeat, esse debere $2km-m+k^2>0$, ad quod requiritur, ut sit $k>\sqrt{(m^2+m)}-m$ sive $k>\frac{1}{2}$; cum igitur esse debeat $(k-1)\alpha$ positivum, duo hic casus sunt constituendi:

I. quo $\alpha>0$; tum esse debet $k>1$, unde fit

$$\mathfrak{B}=\frac{-(k-1)(m+k)}{k(m+1)}\quad \text{et}\quad B=\frac{-(k-1)(m+k)}{2km-m+k^2}.$$

Nunc igitur erit

$$\pi=\frac{-(k-1)\Phi}{\mathfrak{B}}=\frac{+k(m+1)\Phi}{m+k}\quad \text{et}\quad \pi'=\frac{-m(m+1)\Phi}{m+k}$$

et

$$\frac{\pi}{\pi'}=\frac{-k}{m},$$

unde patet, si ponatur $-\pi'=\frac{1}{4}$, fore

$$\pi=+\frac{1}{4}\cdot\frac{k}{m}.$$

Ambae ergo fractiones π et π' non aequales sumi poterunt, nisi sit $k=m$, quo casu statui poterit $\pi=\frac{1}{4}$ et $-\pi'=\frac{1}{4}$, ita ut campus fiat maximus. Tum autem erit

$$b=-\frac{\alpha}{m}\quad \text{et}\quad \beta=c=\frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)}$$

ob

$$\mathfrak{B}=-\frac{2(m-1)}{m+1}\quad \text{et}\quad B=-\frac{2(m-1)}{3m-1},$$

ita ut nunc sit distantia focalis lentis secundae

$$\mathfrak{B}b = \frac{2(m-1)\alpha}{m(m+1)}$$

et lentis tertiae

$$c = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)}.$$

II. Sin autem sit $\alpha < 0$, debet esse $k < 1$ et tamen $k > \frac{1}{2}$, et litterae $\mathfrak{B}$ et B fiunt positivae. Hincque habebitur

$$\frac{\pi}{\Phi} = \frac{k(m+1)}{m+k} \quad \text{et} \quad \frac{\pi'}{\Phi} = \frac{k(m+1)}{m+k} - m - 1 = \frac{-m(m+1)}{m+k}$$

ideoque

$$\frac{\pi}{\pi'} = \frac{-k}{m},$$

ita ut ob $k < 1$ littera π multo minor sit quam $-\pi'$; ideoque campus apparens hoc casu vix ullum accipiat augmentum.

Nunc denique id, in quo cardo rei versatur, perpendamus, formulam scilicet pro semidiametro confusionis, quae est:

$$\frac{\mu m x^3}{4\alpha^3}\left(\lambda - \frac{1}{\mathfrak{B}k}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right) - \frac{\lambda''}{B^3 m}\right);$$

quae ut ad nihilum redigi queat, necesse est, ut $\mathfrak{B}$ sit quantitas positiva, unde casus prior ante memoratus locum habere nequit, ex quo necesse est, ut sit $k < 1$ ideoque etiam $\alpha < 0$ et $B > 0$; ex quo sequitur capi debere $k > \frac{1}{2}$, ita ut k intra limites $\frac{1}{2}$ et 1 contineri debeat; quare, cum hoc casu sit $\frac{B}{\mathfrak{B}} > 0$, campus quoque augmentum quoddam accipiet, propterea quod sit $\pi : -\pi' = k : m$, quod autem vix erit sensibile. Si itaque statuatur semidiameter confusionis $= 0$, habebitur

$$\lambda = \frac{1}{\mathfrak{B}k}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right) + \frac{\lambda''}{B^3 m},$$

ubi notandum est litteras λ' et λ'' unitate minores esse non posse.

Quo resolutio huius aequationis clarius perspiciatur, primum observo sumi non posse $k = 1$, tum quia duae priores lentes fierent contiguae, tum vero quod prodiret $\mathfrak{B} = 0$ et $B = 0$; sin autem poneretur $k = \frac{1}{2}$, fieret quidem

$$\mathfrak{B} = \frac{2m+1}{2(m+1)} \quad \text{et} \quad B = 2m+1;$$

unde nostrae distantiae erunt

$$b = -2\alpha, \quad \beta = -2(2m+1)\alpha, \quad c = \frac{-(2m+1)\alpha}{m}$$

ideoque intervalla

$$\alpha + b = -\alpha \quad \text{et} \quad \beta + c = -(2m+1)\alpha\left(2 + \frac{1}{m}\right) = -\frac{(2m+1)^2}{m}\cdot\alpha;$$

quod posterius in enormem longitudinem excresceret, nisi $-\alpha$ perexiguum caperetur, quod autem fieri nequit, quia primae lentis apertura[1]) ob claritatem per se definitur; ex quo manifestum est numerum k intra limites 1 et $\frac{1}{2}$ accipi debere.

COROLLARIUM 1

235. Hoc ergo modo duplicem perfectionem his telescopiis conciliare licet, alteram, qua margo coloratus prorsus destruitur, alteram vero, qua confusio ab apertura oriunda ad nihilum redigitur. Neque vero campo apparenti ullum augmentum sensibile addi potest.

COROLLARIUM 2

236. Quod ad lentium harum aperturas attinet, pro prima quidem erit semidiameter $x = my$; pro secunda autem $\pi q \pm \frac{qx}{\mathfrak{P}p}$ (§ 23) sive

$$\frac{-(1-k)(m+k)\pi\alpha}{k^2(m+1)} + \frac{x}{k};$$

quia autem est $\pi = -\frac{k}{m}\cdot\pi'$ capique potest $\pi' = -\frac{1}{4}$, siquidem lens ocularis fiat utrinque aequaliter convexa, erit $\pi = \frac{k}{4m}$ ideoque semidiameter aperturae secundae lentis

$$= \frac{-(1-k)(m+k)\alpha}{4mk(m+1)} + \frac{x}{k},$$

cuius pars prior prae posteriore quasi evanescit, ita ut sufficiat hanc semidiametrum statuisse $= \frac{x}{k}$, quae utique maior est quam x ob $k < 1$.

Lens autem ocularis utrinque aequaliter convexa esse debet, unde, cum eius distantia focalis sit

$$c = \frac{-(1-k)(m+k)\alpha}{m(2km - m + k^2)},$$

eius pars quarta dabit semidiametrum aperturae.

1) Editio princeps: *quia eius apertura.* Correxit E. Ch.

COROLLARIUM 3

237. Quod autem ad locum oculi attinet post lentem ocularem, eius distantia reperitur

$$O = -\frac{\pi' r}{m\Phi};$$

quia autem est

$$-\frac{\pi'}{\Phi} = \frac{m(m+1)}{m+k} \quad \text{et} \quad r = \frac{-(1-k)(m+k)\alpha}{m(2km-m+k^2)},$$

erit

$$O = \frac{-(1-k)(m+1)\alpha}{m(2km-m+k^2)},$$

quae est quantitas positiva.

SCHOLION 1

238. Labor certe esset maxime operosus, si hos valores pro B et $\mathfrak{B}$ inventos vellemus in ultima aequatione substituere indeque numeros λ et λ' investigare atque adeo coacti essemus pro quavis multiplicatione calculum de novo suscipere, cui incommodo medela est quaerenda. Perpendamus igitur istos tam complicatos valores pro $\mathfrak{B}$ et B ex aequatione pro margine tollendo esse erutos, ut scilicet illi aequationi summo rigore satisfieret; quoniam autem superfluum est hanc aequationem perfectissime adimplere, propterea quod locus oculi ob aperturam pupillae haud mediocrem latitudinem patitur exiguaque eius mutatione margo coloratus, si quis forte observatur, facillime evitabitur, sufficiet ei quam proxime satisfecisse; quare, cum semper m denotet numerum satis magnum, k autem sit unitate minor, prae m facile licebit k negligere et m quasi infinitum spectare; unde nanciscemur hos valores

$$\mathfrak{B} = \frac{(1-k)}{k}, \qquad B = \frac{1-k}{2k-1},$$

quibus itaque in evolutione nostri problematis utemur; ex iis autem nostra elementa ita simplicius exprimentur:

$$b = -\frac{\alpha}{k}, \quad \beta = \frac{-(1-k)\alpha}{k(2k-1)} \quad \text{et} \quad c = \frac{-(1-k)\alpha}{m(2k-1)};$$

hinc intervalla

$$\alpha + b = \frac{-(1-k)\alpha}{k} \quad \text{et} \quad \beta + c = \frac{-(1-k)}{2k-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right)\alpha = \frac{-(1-k)(k+m)\alpha}{(2k-1)km}$$

et pro oculi loco

$$O = \frac{-(m+1)(1-k)}{m(2k-1)} \cdot \frac{\alpha}{m}.$$

Lentium autem harum distantiae focales erunt

$$p = \alpha, \quad q = \frac{-(1-k)\alpha}{k^2}, \quad r = c = \frac{-(1-k)\alpha}{m(2k-1)}$$

earumque aperturae semidiametri

$$\text{primae } x = my, \quad \text{secundae } \frac{x}{k} = \frac{my}{k}, \quad \text{tertiae } = \frac{1}{4} r = \frac{-(1-k)\alpha}{4m(2k-1)}.$$

Campi denique apparentis semidiameter erit

$$\Phi = \frac{\frac{1}{4}\left(1+\frac{k}{m}\right)}{m+1} \quad \text{sive} \quad \Phi = 859\left(\frac{m+k}{m(m+1)}\right) \text{ minut.}$$

Nunc autem aequatio adhuc resolvenda erit

$$\lambda = \frac{1}{1-k}\left(\frac{\lambda' k^2}{(1-k)^2} + \frac{\nu(2k-1)}{1-k}\right) + \frac{\lambda''(2k-1)^3}{(1-k)^3 m}$$

seu

$$\lambda = \frac{1}{(1-k)^3}\left(\lambda' k^2 + \nu(1-k)(2k-1) + \frac{\lambda''(2k-1)^3}{m}\right).$$

Nihil aliud igitur superest, nisi ut pro quibusdam valoribus ipsius k hanc aequationem resolvamus, ubi notandum est λ'' poni debere $= 1{,}6299$, siquidem vitro communi, pro quo est $n = 1{,}55$, uti velimus; quo casu etiam est $\nu = 0{,}2326$.

EXEMPLUM 1

239. Statuamus $k = \frac{3}{4}$, ut intra limites suos 1 et $\frac{1}{2}$ medium teneat, et aequatio nostra resolvenda induet hanc formam:

$$\lambda = 64\left(\frac{9\lambda'}{16} + \frac{1}{8}\nu + \frac{\lambda''}{8m}\right) \quad \text{sive} \quad \lambda = 36\lambda' + 8\nu + \frac{8\lambda''}{m},$$

$$\lambda = 36\lambda' + 1{,}8608 + \frac{13{,}0392}{m};$$

quia nunc λ' unitate minus esse nequit, statuamus $\lambda' = 1$ fietque

$$\lambda = 37{,}8608 + \frac{13{,}0392}{m},$$

qui valor cum tam sit enormis, nunquam sperandum est ullum artificem huiusmodi lentem parare posse; unde hanc telescopiorum speciem praetermitti conveniet.

EXEMPLUM 2

240. Ut tantos numeros evitemus, sumamus $k=\frac{3}{5}$, ut fiat $1-k=\frac{2}{5}$ et $2k-1=\frac{1}{5}$, et aequatio nostra fiet

$$\lambda=\frac{125}{8}\left(\frac{9}{25}\lambda'+\frac{2}{25}\nu+\frac{\lambda''}{125\,m}\right),\qquad \lambda=\frac{45}{8}\lambda'+\frac{5}{4}\nu+\frac{\lambda''}{8\,m};$$

sumto igitur $\lambda'=1$ erit

$$\lambda=5{,}9157+\frac{0{,}2037}{m},$$

qui valor etsi satis magnus tamen in praxi tolerari poterit. Interim conveniet singula huic valori $k=\frac{3}{5}$ convenienter definire:

$$b=-\frac{5\alpha}{3},\quad \beta=-\frac{10}{3}\alpha,\quad c=-\frac{2\alpha}{m}.$$

Hinc intervalla

$$\alpha+b=-\frac{2}{3}\alpha \quad \text{et} \quad \beta+c=-\alpha\left(\frac{10}{3}+\frac{2}{m}\right)$$

et pro aperturis lentium semidiameter primae $=x$, secundae $=\frac{5}{3}x$ et tertiae $=-\frac{\alpha}{2m}$ oculique post lentem distantia

$$O=-\frac{2(m+1)}{m}\cdot\frac{\alpha}{m}.$$

SCHOLION 2

241. Si huiusmodi casus pro variis multiplicationibus evolvere vellemus, ex superioribus intelligitur duos tantum casus sufficere posse, ut inde formulae generales pro quavis multiplicatione elici queant, dum scilicet altero pro m numerus modice magnus veluti 20 assumatur, altero vero numerus quasi infinitus; quae investigatio cum omni attentione digna videatur, eam in sequente problemate instituamus.

---

1) In editione principe loco numerorum 241 et qui sequuntur falso numeri 249 et qui sequuntur scripti sunt. E. Ch.

PROBLEMA 3

242. *In casu praecedentis problematis si capiatur* $k=\frac{5}{9}$, *pro quacunque multiplicatione maiore m telescopium construere, in quo non solum margo coloratus prorsus evanescat, sed etiam confusio ex apertura oriunda ad nihilum redigatur.*

SOLUTIO

Cum hic sit $k=\frac{5}{9}$, erit

$$\mathfrak{B}=\frac{4(9m+5)\cdot 9}{9\cdot 9\cdot 5(m+1)}=\frac{4(9m+5)}{45(m+1)},\qquad B=\frac{4(9m+5)\cdot 9^2}{9\cdot 9(9m+25)}=\frac{4(9m+5)}{9m+25}.$$

Nunc igitur duos casus evolvamus, in quorum priore sit $m=20$, in posteriore vero $m=\infty$.

I. Ob $m=20$ erit $\mathfrak{B}=\frac{148}{189}$ et $B=\frac{148}{41}$; unde nostra aequatio, quae est

$$\lambda=\frac{9\lambda'}{5\mathfrak{B}^3}+\frac{9\nu}{5\mathfrak{B}B}+\frac{\lambda''}{B^3m},$$

si omnes lentes ex vitro communi, pro quo $n=1{,}55$ et $\nu=0{,}2326$, lentem autem ocularem utrinque aeque convexam assumamus, ut sit $\lambda''=1{,}6299$, sequentem induet formam; in subsidium vocatis logarithmis

$$\text{Log. }\mathfrak{B}=9{,}8937999,\quad \text{Log. }B=0{,}5574778$$

hincque

$$\text{Log. }\frac{1}{\mathfrak{B}}=0{,}1062000,\quad \text{Log. }\frac{1}{B}=9{,}4425221$$

et

$$\text{Log. }\frac{9}{5}=0{,}2552725:$$

$$\lambda=3{,}7486\lambda'+0{,}14812+0{,}00173;$$

$$\text{Log. }3{,}7486\lambda'=0{,}5738728+\text{Log. }\lambda'.$$

Hic circa numerum λ' observasse iuvabit, quod, cum lens secunda maximam aperturam habere debeat, cuius scilicet semidiameter sit $\frac{9}{5}x=\frac{9}{5}\cdot my$, expediat hanc lentem utrinque aeque convexam reddere; quam ob causam statui oportet

$$\sqrt{(\lambda'-1)}=\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\cdot\frac{\beta-b}{\beta+b}=\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\cdot\frac{B-1}{B+1}$$

hincque

$$\lambda'=1+\left(\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\right)^2\cdot\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^2.$$

Cum autem constet esse $\left(\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\right)^2 = 0{,}6299$, erit

$$\lambda' = 1 + 0{,}6299 \cdot \left(\frac{107}{189}\right)^2 \quad \text{seu} \quad \lambda' = 1{,}20189$$

hincque

$$\lambda = 4{,}50544 + 0{,}14812 + 0{,}00173, \quad \lambda = 4{,}65529.$$

Unde fit

$$\lambda - 1 = 3{,}65529 \quad \text{et} \quad \tau\sqrt{\lambda - 1} = 1{,}7304.$$

Pro formatione igitur primae lentis habebimus

$$F = \frac{\alpha}{\sigma \pm 1{,}7304} = \frac{\alpha}{-0{,}1030} = -\,9{,}7087\,\alpha,$$

$$G = \frac{\alpha}{\varrho \mp 1{,}7304} = \frac{\alpha}{+1{,}9211} = +\,0{,}52053\alpha,$$

cuius lentis aperturae semidiameter debet esse $x = my$. At intervallum secundae lentis ab hac est

$$\alpha + b = -\,0{,}8\,\alpha.$$

Pro secunda autem lente, cum sit eius distantia focalis

$$q = \mathfrak{B}b = -\frac{9}{5}\mathfrak{B}\alpha = -\,1{,}4095\,\alpha,$$

erit radius utriusque faciei $= 1{,}10q = -\,1{,}5504\,\alpha$, eius aperturae semidiameter $= \frac{9}{5}x = \frac{9}{5}\cdot my$. Ab hac autem lente ad tertiam intervallum est

$$\beta + c = -\,B\alpha\left(\frac{m+k}{mk}\right) = -\,6{,}4975\,\alpha - 3{,}6097 \cdot \frac{\alpha}{m} = -\,6{,}6780\,\alpha.$$

Pro lente tertia, cuius distantia focalis est

$$c = -\frac{148}{41}\cdot\frac{\alpha}{m} = -\,3{,}6097\cdot\frac{\alpha}{m},$$

radius faciei utriusque $= 1{,}1\,c = -\,3{,}9707 \cdot \frac{\alpha}{m}$; hincque ad oculum usque erit distantia

$$O = -\frac{(m+1)B\alpha}{(m+k)\,m} = -\frac{4\cdot 9\cdot 21}{5\cdot 41}\cdot\frac{\alpha}{m} = -\,3{,}6878\cdot\frac{\alpha}{m}.$$

II. Sit nunc $m = \infty$, erit $\mathfrak{B} = \frac{4}{5}$, $B = 4$, unde nostra aequatio induet hanc formam:

$$\lambda = \frac{225}{64}\lambda' + \frac{9}{16}\nu.$$

Hic iterum lentem secundam aequaliter convexam reddamus et ob $\beta = Bb = 4b$ erit

$$\sqrt{\lambda'-1} = \frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\cdot\frac{\beta-b}{\beta+b} = \frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\cdot\frac{3}{5}.$$

Hincque $\lambda' = 1 + 0{,}6299\cdot\frac{9}{25}$, $\lambda' = 1{,}2267$, ex quo colligimus

$$\lambda = 4{,}3126 + 0{,}1308 = 4{,}4434$$

hincque

$$\lambda - 1 = 3{,}4434 \quad \text{et} \quad \tau\sqrt{(\lambda-1)} = 1{,}6796;$$

quare sequens habetur constructio:

I. Pro prima lente

$$F = \frac{\alpha}{\sigma \pm 1{,}6796} = \frac{\alpha}{-0{,}0522} = -19{,}1570\,\alpha,$$

$$G = \frac{\alpha}{\varrho \mp 1{,}6796} = \frac{\alpha}{+1{,}8703} = +\ 0{,}5346\,\alpha.$$

Apertura est ut ante aeque ac distantia ad secundam lentem.

II. Pro secunda lente

Quum eius distantia focalis $= -\frac{9}{5}\mathfrak{B}\alpha = -\frac{36}{25}\cdot\alpha = -1{,}44\,\alpha$,

fiet radius utriusque faciei $= -1{,}584\,\alpha$

eiusque aperturae semidiameter $= \frac{9}{5}x$;

at distantia ad lentem tertiam $= -7{,}2\,\alpha - 4\cdot\frac{\alpha}{m}$.

III. Pro tertia lente

cuius distantia focalis $= -4\cdot\frac{\alpha}{m}$,

radius utriusque faciei $= -4{,}4\cdot\frac{\alpha}{m}$

eiusque aperturae semidiameter $= -1{,}1\cdot\frac{\alpha}{m}$.

Ab hac lente ad oculum usque erit distantia $O = -4\cdot\frac{\alpha}{m}$.

His duobus casibus evolutis solutionem quaestionis nostrae generalis pro multiplicatione quacunque m maiore quam 20 ita adstruamus:

I. Pro prima lente

statuamus radium faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = -\left(19{,}1570 + \dfrac{f}{m}\right)\alpha \\ \text{posterioris} & = +\left(\ 0{,}5346 + \dfrac{g}{m}\right)\alpha \end{cases}$

et adplicatione ad casum $m = 20$ facta reperietur

$$19{,}1570 + \frac{f}{20} = 9{,}7087, \quad \text{unde fit} \quad f = -188{,}966;$$

porro

$$0{,}5346 + \frac{g}{20} = 0{,}5205, \quad \text{hinc} \quad g = -0{,}2820.$$

II. Pro secunda lente

statuatur radius utriusque faciei $= -\left(1{,}584 + \dfrac{h}{m}\right)\alpha$,

cumque esse debeat $1{,}584 + \dfrac{h}{20} = 1{,}5504$, erit $h = -0{,}6720$.

Eius distantia focali existente

$$= -\left(1{,}440 - \frac{0{,}6100}{m}\right)\alpha,$$

et aperturae semidiametro $= \frac{9}{5}x$.

Pro distantia ad tertiam lentem inveniemus

$$-\left(7{,}2 - \frac{14{,}0500}{m}\right)\alpha - \left(4{,}00 - \frac{7{,}8060}{m}\right)\frac{\alpha}{m}$$

sive

$$-7{,}200\alpha + 10{,}0500 \cdot \frac{\alpha}{m} + \frac{7{,}8060}{m^2}\alpha$$

sive

$$-\left(7{,}200 - \frac{10{,}0500}{m} - \frac{7{,}8060}{mm}\right)\alpha.$$

III. Pro tertia lente

cuius distantia focalis reperitur $= -\left(4{,}00 - \dfrac{7{,}8060}{m}\right)\dfrac{\alpha}{m}$,

sumi debet radius utriusque faciei $= -\left(4{,}400 - \dfrac{8{,}5860}{m}\right)\dfrac{\alpha}{m}$,

cuius parti quartae semidiameter aperturae aequalis statui potest.

Distantia denique oculi ab hac lente reperitur

$$O = -\left(4 - \frac{6,2440}{m}\right)\frac{\alpha}{m}.$$

Campi vero apparentis semidiameter erit $\frac{859}{m+1}$ minut.

COROLLARIUM 1

243. Cum intervallum primae lentis et secundae sit $= -0,8\,\alpha$, prodibit tota telescopii longitudo ab obiectiva usque ad oculum

$$-\left(8 - \frac{6,0500}{m} - \frac{14,0500}{mm}\right)\alpha,$$

ita ut haec longitudo fere sit octuplo maior quam distantia focalis α, qua circumstantia haec telescopia non admodum commendari merentur.

COROLLARIUM 2

244. Cum primae lentis semidiameter aperturae debeat esse $x = my = \frac{m}{50}$ dig., quae autem maior esse nequit parte quarta radii minoris, quae est

$$-0,1336\,\alpha = -\frac{1}{8}\alpha \text{ circiter,}$$

patet capi debere $-\alpha > \frac{16\,m}{100}$ vel $-\alpha > 0,16\,m$.

Quia autem lentis secundae semidiameter aperturae esse debet

$$= \frac{9}{5}x = \frac{9m}{250} \text{ dig.,}$$

haec quoque minor esse debet parte quarta radii, quae est $-0,396\,\alpha$; unde esse debet $-\alpha > 0,0909\,m$; qui limes cum minor sit praecedente, illum observari oportet.

SCHOLION

245. Cum igitur $-\alpha$ maius esse debeat quam $0,16\,m$, statuamus $-\alpha = \frac{2}{10}m$ sive $\alpha = -0,2\,m$ atque sequentem constructionem pro telescopiis huius speciei obtinebimus.

Constructio telescopiorum pro quacunque multiplicatione m lentibus ex vitro communi confectis

I. Pro lente obiectiva in digitis

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = +3{,}8314\,m - 37{,}7932\\ \text{posterioris} & = -0{,}1069\,m + 0{,}0564.\end{cases}$$

Eius aperturae semidiameter $= \frac{m}{50}$.

Intervallum ad lentem secundam $= 0{,}16\,m$.

II. Pro lente secunda in digitis

Distantia focalis $= +0{,}2880\,m - 0{,}12$.

Radius faciei utriusque $= +0{,}3168\,m - 0{,}13$.

Eius aperturae semidiameter $= \frac{9}{250}\,m = 0{,}036\,m$.

Intervallum ad lentem tertiam $= +1{,}4400\,m - 2{,}01 - \frac{1{,}56}{m}$.

III. Pro tertia lente in digitis

Distantia focalis $= +0{,}800 - \frac{1{,}56}{m}$.

Radius utriusque faciei $= +0{,}88 - \frac{1{,}72}{m}$,

cuius pars quarta $= \frac{1}{5}$ dig. dat semidiametrum aperturae.

Hinc ad oculum usque distantia erit

$$O = 0{,}8 - \frac{1{,}25}{m}.$$

Campi apparentis semidiameter $= \frac{859}{m+1}$ minut.

Tota autem telescopii longitudo erit

$$= \left(-1{,}21 + 1{,}6\,m - \frac{2{,}81}{m}\right) \text{ dig.}$$

Ita v. gr. pro $m = 100$ erit longitudo $= 158\frac{3}{4}$ dig. sive 13 ped. $2\frac{3}{4}$ dig.

Cum igitur supra tubo unum pedem vix superante fere tantam multiplicationem produxerimus, haec telescopiorum species nunc quidem erit repudianda, etsi respectu vulgarium tuborum astronomicorum maxime foret aestimanda, cum quod nullum marginem coloratum praebeat, tum vero etiam

quia confusio ab apertura oriunda prorsus sit sublata. Quamobrem nobis inquiri conveniet, num duabus lentibus inter obiectivam et imaginem collocandis hoc incommodum evitari possit.

PROBLEMA 4

246. *Inter lentem obiectivam et imaginem eiusmodi duas lentes interponere, ut non solum margo coloratus, sed etiam confusio ab apertura oriunda penitus destruatur.*

SOLUTIO

Cum hic quatuor lentes sint considerandae, multiplicatio dabit hanc formulam $m = \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{c}\cdot\frac{\gamma}{d}$, quarum trium fractionum binae priores negativae, tertia vero affirmativa esse debebit. Statuatur ergo

$$\frac{\alpha}{b} = -k, \quad \frac{\beta}{c} = -k' \quad \text{eritque} \quad \frac{\gamma}{d} = \frac{m}{kk'}.$$

Unde erit

$$b = -\frac{\alpha}{k}, \quad c = -\frac{\beta}{k'}, \quad d = \frac{\gamma kk'}{m};$$

praeterea vero est $\beta = Bb$, $\gamma = Cc$, unde omnia haec elementa ex α ita definientur:

$$b = -\frac{\alpha}{k}, \quad \beta = -\frac{B\alpha}{k}, \quad c = \frac{B\alpha}{kk'}, \quad \gamma = \frac{BC\alpha}{kk'}, \quad d = \frac{BC\alpha}{m};$$

hinc intervalla lentium fient

$$1. \quad \alpha + b = \frac{k-1}{k}\cdot\alpha$$

$$2. \quad \beta + c = \frac{B\alpha}{k}\left(\frac{1-k'}{k'}\right)$$

$$3. \quad \gamma + d = BC\alpha\left(\frac{1}{kk'} + \frac{1}{m}\right),$$

unde, quia k, k' et m sunt per se numeri positivi, hae sequuntur conditiones:

$$1. \quad \alpha(k-1) > 0, \quad 2. \quad B\alpha(1-k') > 0, \quad 3. \quad BC\alpha > 0,$$

quae eliso α reducuntur ad has duas

$$4. \quad \frac{B(1-k')}{k-1} > 0, \quad 5. \quad \frac{C}{1-k'} > 0 \quad \text{seu} \quad C(1-k') > 0.$$

Iam ex superioribus vidimus marginem coloratum destrui non posse, nisi ante fractiones π, π' et π'' definiantur; quem in finem sequentes aequationes considerari debent:

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\alpha}{b} = -k, \qquad \frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = \frac{B\alpha}{c} = kk' \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{\pi - \pi' + \pi''}{m+1},$$

ex quibus assequimur

$$\frac{\pi}{\Phi} = \frac{1-k}{\mathfrak{B}}, \qquad \frac{\pi'}{\Phi} = \frac{1-k}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \frac{kk'-1}{\mathfrak{C}},$$

$$\frac{\pi''}{\Phi} = \frac{\pi'}{\Phi} - \frac{\pi}{\Phi} + m + 1 = \frac{1-k}{\mathfrak{B}C} + \frac{kk'-1}{\mathfrak{C}} + m + 1;$$

quibus valoribus substitutis ad marginem coloratum tollendum requiritur haec aequatio divisione per $\frac{dn}{n-1}$ facta:

$$0 = -\frac{\pi}{\Phi}\cdot\frac{1}{k} + \frac{\pi'}{\Phi}\cdot\frac{1}{kk'} + \frac{\pi''}{\Phi}\cdot\frac{1}{m}$$

sive

$$0 = \frac{k-1}{\mathfrak{B}k} + \frac{1-k}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}kk'} + \frac{kk'-1}{\mathfrak{C}kk'} + \frac{1-k}{\mathfrak{B}Cm} + \frac{kk'-1}{\mathfrak{C}m} + \frac{m+1}{m},$$

ex qua aequatione vel $\mathfrak{B}$ vel $\mathfrak{C}$ definiri potest; tum vero, ut semidiameter confusionis ad nihilum redigatur, debet esse

$$0 = \lambda - \frac{1}{\mathfrak{B}k}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right) + \frac{1}{B^3\mathfrak{C}kk'}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2} + \frac{\nu}{C}\right) + \frac{\lambda'''}{B^3C^3m};$$

quae ut resolvi possit, littera $\mathfrak{B}$ debet esse positiva, vel si $\mathfrak{B}$ esset negativum, ob B quoque negativum littera $\mathfrak{C}$ debet esse positiva.

COROLLARIUM 1

247. Aequatio pro margine colorato tollendo ad hanc formam reducitur:

$$0 = \frac{1-k}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}\left(\frac{1}{kk'} + \frac{1}{m}\right) - \frac{1-k}{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right) + \frac{kk'-1}{\mathfrak{C}}\left(\frac{1}{kk'} + \frac{1}{m}\right) + \frac{m+1}{m}$$

seu ad hanc:

$$0 = \frac{1-k}{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{\mathfrak{C}}\left(\frac{1}{kk'} + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right) + \frac{kk'-1}{\mathfrak{C}}\left(\frac{1}{kk'} + \frac{1}{m}\right) + \frac{m+1}{m},$$

unde reperitur

$$\frac{k-1}{\mathfrak{B}} = \frac{\frac{kk'-1}{\mathfrak{C}}\left(\frac{1}{kk'}+\frac{1}{m}\right)+\frac{m+1}{m}}{\frac{1}{\mathfrak{C}}\left(\frac{1}{kk'}+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{k}-\frac{1}{m}}$$

sive

$$\frac{k-1}{\mathfrak{B}} = \frac{(kk'-1)(m+kk')+(m+1)kk'\mathfrak{C}}{m+kk'-k'm\mathfrak{C}-kk'\mathfrak{C}},$$

$$\frac{k-1}{\mathfrak{B}} = \frac{(kk'-1)(m+kk')+\mathfrak{C}kk'(m+1)}{m+kk'-\mathfrak{C}k'(m+k)},$$

$$\frac{k-1}{\mathfrak{B}} = kk'-1+\frac{\mathfrak{C}k'(m(k-1)+kk'(k+m))}{m+kk'-\mathfrak{C}k'(m+k)}.$$

COROLLARIUM 2

248. Si haec aequatio statim a fractionibus liberetur, habebitur

$$0=(1-k)(m+kk')-\mathfrak{C}(1-k)k'(m+k)+\mathfrak{B}(kk'-1)(m+kk')+\mathfrak{B}\mathfrak{C}kk'(m+1),$$

unde reperitur

$$\mathfrak{C} = \frac{(m+kk')(k-1+\mathfrak{B}(1-kk'))}{\mathfrak{B}kk'(m+1)+(k-1)k'(m+k)}.$$

SCHOLION

249. Inprimis autem notatu dignus est casus, quo numerus B fit infinitus et numerus $C=0$, quem supra iam alia occasione evolvimus [§ 183]; quae operatio cum supra difficilior sit visa, nunc sequenti modo planiore expediatur. Considerabimus scilicet numerum B ut praegrandem sitque $B=\frac{1}{\omega}$, denotante ω fractionem minimam, ita ut ω loco B in calculum introducatur. Tum igitur erit $\mathfrak{B}=\frac{1}{1+\omega}$; iam, ne secundum intervallum $\beta+c$ nimis excrescat, statuatur

$$\beta+c=\frac{\eta\alpha}{k}$$

eritque

$$c=\frac{\eta\alpha}{k}-\beta,\quad \frac{\beta}{c}=-k'=\frac{k\beta}{\eta\alpha-k\beta},$$

et quia est

$$\beta k=-B\alpha=-\frac{\alpha}{\omega},$$

erit

$$+k'=\frac{1}{\eta\omega+1}\quad \text{et}\quad 1-k'=\frac{\eta\omega}{1+\eta\omega},$$

ita ut nunc loco litterae k' in calculum introducatur littera η; denique, ne tertium intervallum nimis excrescat ob $B=\frac{1}{\omega}$, statuamus $C=\theta\omega$, ut fiat $BC=\theta$; ita ut hic loco litterae C θ in calculum ingrediatur. Hinc erit $\mathfrak{C}=\frac{\theta\omega}{1+\theta\omega}$ atque hinc porro

$$\frac{\pi}{\Phi}=(1-k)+\omega(1-k),$$

$$\frac{\pi'}{\Phi}=\frac{1+\theta\omega}{(1+\eta\omega)\theta}(1-k-\eta k+\eta\omega(1-k))$$

hincque posito $\omega=0$ erit

$$\frac{\pi}{\Phi}=1-k,\quad \frac{\pi'}{\Phi}=\frac{1}{\theta}(1-k-\eta k)\quad \text{hincque}\quad \frac{\pi''}{\Phi}=\frac{1-k-\eta k}{\theta}+k+m.$$

Quare, cum pro margine tollendo inventa sit haec aequatio:

$$0=-\frac{\pi}{\Phi}\cdot\frac{1}{k}+\frac{\pi'}{\Phi}\cdot\frac{1}{kk'}+\frac{\pi''}{\Phi}\cdot\frac{1}{m},$$

ob $k'=1$, si illi valores substituantur, prodibit

$$0=\frac{k-1}{k}+\frac{1-k-\eta k}{k\theta}+\frac{1-k-\eta k}{m\theta}+\frac{k+m}{m}$$

sive

$$0=m\theta(k-1)+m(1-k-\eta k)+k(1-k-\eta k)+k\theta(k+m),$$

$$0=\theta(k^2+(2k-1)m)+(k+m)(1-k-\eta k)$$

hincque invenietur

$$\theta=\frac{+(k+m)(k+\eta k-1)}{(2k-1)m+k^2};$$

hinc autem nostra elementa erunt

$$b=-\frac{\alpha}{k},\quad \beta=\infty,\quad c=-\infty,\quad \gamma=\frac{\theta\alpha}{k},\quad d=\frac{\theta\alpha}{m}$$

et intervalla

$$\alpha+b=\frac{k-1}{k}\cdot\alpha,\quad \beta+c=\frac{\eta\alpha}{k},\quad \gamma+d=\theta\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{k}\right),$$

quae debent esse positiva; ideoque

$$\eta(k-1)>0,\quad \theta(k-1)>0\quad \text{et}\quad \theta\eta>0.$$

Pro loco oculi autem habebimus

$$O = \frac{\pi''}{m\Phi} \cdot d = \frac{1-k-\eta k}{mm} \cdot \alpha + \frac{(k+m)\theta\alpha}{m^2}$$

et valore pro θ substituto

$$O = \frac{1-k-\eta k}{m^2} \cdot \alpha + \frac{(k+m)^2(k+\eta k-1)\alpha}{m^2((2k-1)m+k^2)},$$

$$O = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{k+\eta k-1}{(2k-1)m+k^2} \cdot \alpha;$$

his denique observatis resolvenda restat haec aequatio:

$$0 = \lambda - \frac{\lambda'}{k} + \frac{\lambda''}{\theta^3 k} + \frac{\lambda'''}{\theta^3 m},$$

quae, cum secundum membrum per se sit negativum, facile resolvi poterit, id quod in sequente problemate ostendemus.

PROBLEMA 5

250. *In casu praecedentis problematis si binae priores lentes ita fuerint comparatae, ut radii iterum paralleli evadant, constructionem huiusmodi telescopiorum exponere.*

SOLUTIO

Cum hoc casu fiat $B = \infty$ et $C = 0$, in scholio praecedente elementa iam sunt definita, unde ea hic repetere superfluum foret; quo autem clarius solutionem evolvamus, duo sunt casus perpendendi, alter, quo distantia α est positiva, alter, quo ea est negativa.

I. Sit igitur $\alpha > 0$ debebitque esse $k > 1$, $\eta > 0$ et $\theta > 0$, quae ultima conditio sponte impletur; sitque etiam O positivum, tum vero fiet

$$\frac{\pi}{\Phi} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\pi'}{\Phi} < 0,$$

nempe

$$\frac{\pi'}{\Phi} = \frac{1-k-\eta k}{\theta} = \frac{-(2k-1)m-k^2}{k+m}.$$

Ex ultima igitur formula colligetur semidiameter campi visi

$$\Phi = \frac{\pi''\theta}{1-k-\eta k+(k+m)\theta} \quad \text{seu} \quad \Phi = \frac{(m+k)\pi''}{m(m+1)},$$

substituto scilicet valore θ, si modo praecedentes formulae non praebeant campum minorem. Ad quod diiudicandum comparentur valores π et π' cum π'' et ob $\frac{\pi''}{\Phi} = \frac{m(m+1)}{m+k}$ erit

$$\frac{\pi}{\pi''} = \frac{(1-k)(m+k)}{m(m+1)} \quad \text{et} \quad \frac{\pi'}{\pi''} = \frac{-(2k-1)m-k^2}{m(m+1)}$$

hincque

$$\frac{\pi-\pi'}{\pi''} = \frac{k}{m};$$

at ex illis formulis patet tam π quam π' minores esse quam π'', dummodo sit k minus quam $\frac{5}{12}m$, et cum sit $\Phi = \frac{\pi-\pi'+\pi''}{m+1}$, ob $\frac{\pi-\pi'}{\pi''} > 0$ campus apparens hinc aliquod augmentum accipiet eritque $\Phi = \frac{k+m}{m(m+1)}\pi''$, qui utique maior est quam simplex, scilicet $\Phi = \frac{\pi''}{m+1}$, idque in ratione $m+k : m$.

Iam porro aequatio resolvenda est ut ante.

II. Sin autem α sit negativum, fieri debet $k<1$, $\eta<0$, $\theta<0$, ad quod necessarium est, ut sit $k>\frac{1}{2}$.

Quia nunc pro casu praecedente habuimus $\frac{\pi-\pi'}{\pi''} = \frac{k}{m}$, hinc campus apparens multo minus augmentum accipit in hoc casu quam in illo, quod adeo vix erit sensibile, et pro loco oculi distantia O etiam hoc casu fit positiva; quam ob causam casus prior huic posteriori anteferendus videtur.

Etsi autem priori casu campus apparens notabiliter augeri posse est inventus, dum scilicet k usque ad valorem $\frac{5}{12}m$ augetur, tamen resolutio nostrae aequationis hoc non permittit, quoniam numerus λ' nimis magnus accipi deberet, quocirca littera k vix ultra binarium vel ternarium ad summum crescere potest, uti in subiunctis exemplis magis fiet manifestum, quae ex casu priore derivabimus, quoniam facile est praevidere posteriorem casum eo etiam vitio esse laboraturum, quod longitudo telescopii nimis excrescat.

EXEMPLUM

251. Statuamus $k=2$ et multiplicationem $m=50$, quandoquidem hic de tubis astronomicis agitur, eritque

$$\theta = \frac{52(1+2\eta)}{154} = \frac{26}{77}(1+2\eta);$$

qui valor ne fiat nimis parvus, quia tum in nostra aequatione terminus $\frac{\lambda''}{\theta^3 k}$ fieret nimis magnus, ita ut λ' enormem adipisceretur valorem, statuamus insuper $\eta = 1$, ut fiat $\theta = \frac{78}{77}$, hincque elementa nostra ita se habebunt:

$$b = -\frac{\alpha}{2}, \quad \beta = \infty, \quad c = -\infty, \quad \beta + c = \frac{\alpha}{2}, \quad \gamma = \frac{39}{77}\alpha, \quad d = \frac{39\alpha}{25 \cdot 77};$$

tum vero aequatio resolvenda ita est comparata:

$$0 = \lambda - \frac{\lambda'}{2} + \frac{77^3 \lambda''}{78^3 \cdot 2} + \frac{77^3 \lambda'''}{78^3 \cdot 50}$$

hincque

$$\lambda' = 2\lambda + \frac{77^3 \lambda''}{78^3} + \frac{77^3 \lambda'''}{78^3 \cdot 25}.$$

Iam ut tam prima lens quam ultima maximam admittat aperturam, ponamus $\lambda = \lambda''' = 1{,}6299$, dum scilicet omnes lentes ex vitro communi $n = 1{,}55$ factae assumuntur, at λ'' sit $= 1$; quibus positis colligemus

$$\lambda' = 3{,}2598 + 0{,}9620 + 0{,}0628, \qquad \lambda' = 4{,}2846,$$

hinc ergo

$$\lambda' - 1 = 3{,}2846 \quad \text{et} \quad \tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = 1{,}64031;$$

quare constructio singularum lentium ita se habebit:

I. Pro prima lente

quae cum sit aeque utrinque convexa eiusque distantia focalis $= \alpha$, erit radius utriusque faciei $= 1{,}10\,\alpha$, tum vero eius semidiameter aperturae $x = my = 1$ dig. ob $m = 50$ et $y = \frac{1}{50}$ dig. et intervallum ab hac lente ad secundam $= \frac{1}{2}\alpha$.

II. Pro secunda lente

ob $\beta = \infty$ erit

$$F' = \frac{b}{\varrho \pm 1{,}64031} = \frac{b}{1{,}8310}, \quad G' = \frac{b}{\sigma \mp 1{,}64031} = \frac{b}{-0{,}0129},$$

hinc

$$F' = -0{,}2730\,\alpha, \quad G' = +38{,}7597\,\alpha;$$

tum vero semidiameter eius aperturae $= \frac{1}{2}$ dig. ex § 23 et intervallum ad lentem sequentem $= \frac{1}{2}\alpha$.

III. Pro tertia lente

ob $c = -\infty$ et $\lambda'' = 1$ erit

$$F'' = \frac{\gamma}{\sigma} = 0{,}31123\,\alpha, \qquad G'' = \frac{\gamma}{\varrho} = 2{,}6559\,\alpha,$$

tum vero aperturae semidiameter $= \frac{1}{2}$ dig. et intervallum ad sequentem lentem $= \frac{78\cdot 13}{77\cdot 25}\alpha$ seu $= \frac{1}{2}\alpha$ proxime.

IV. Pro quarta lente

radius utriusque faciei $= 1{,}10\,d$ existente $d = \frac{39}{25\cdot 77}\alpha$, cuius pars quarta dat semidiametrum aperturae; hinc denique intervallum usque ad oculum erit $= \frac{3\cdot 51}{50\cdot 154}\alpha = \frac{1}{50}\alpha$ proxime.

Quod ad distantiam α attinet, si ad solam primam lentem respiceremus, quia ea aperturam admittit, cuius semidiameter $= \frac{1}{4}\alpha$, sumi posset $\alpha = 4$ dig.; sed ad secundam lentem respiciendo, cuius minor radius est circiter $\frac{1}{4}\alpha$, huius pars quarta $\frac{1}{16}\alpha$ semidiametro aperturae $\frac{1}{2}$ dig. aequalis posita dabit $\alpha = 8$ dig., quam mensuram etiam retinere oportet; unde longitudo telescopii excederet 12 dig. Huius rei causa est, quod primam lentem utrinque aeque convexam assumsimus.

Adiungamus igitur aliam insuper solutionem sumendo $\lambda = 1$; unde fit

$$\lambda' = 2 + 0{,}9620 + 0{,}0628, \quad \lambda' = 3{,}0248,$$

$$\lambda' - 1 = 2{,}0248 \quad \text{et} \quad \tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = 1{,}2879;$$

unde haec sequitur lentium constructio:

I. Pro prima lente

$$F = \frac{\alpha}{\sigma} = 0{,}6145\,\alpha, \qquad G = \frac{\alpha}{\varrho} = 5{,}2439\,\alpha.$$

II. Pro secunda lente

$$F' = \frac{b}{0{,}1907 \pm 1{,}2879} = \frac{-0{,}5\,\alpha}{1{,}4786}, \quad G' = \frac{b}{1{,}6274 \mp 1{,}2879} = \frac{-0{,}5\,\alpha}{0{,}3395},$$

$$F' = -0{,}3382\,\alpha, \quad G' = -1{,}4723\,\alpha.$$

Reliqua manent ut ante. Hic igitur statim patet secundam lentem debitam aperturam $\frac{1}{2}x$ recipere posse, si prima patiatur aperturam x. Primae autem radius minor, cum sit circiter $\frac{6}{10}a$, eius pars quarta $\frac{3}{20}a$ ipsi $x = 1$ dig. aequata dat $a = \frac{20}{3}$ dig. $= 6\frac{2}{3}$ dig.; quin etiam tertia lens postulat, ut sit $\frac{3}{40}a = \frac{1}{2}$ dig., unde a iterum $6\frac{2}{3}$ dig., sicque tota telescopii longitudo vix superabit 10 dig.

Quocirca notari merebitur sequens constructio telescopii quinquagies multiplicantis lentibus ex vitro communi paratis.

I. Pro prima lente

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = 4{,}10 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} = 34{,}96 \text{ dig.}\end{cases}$$

Aperturae semidiameter $= 1$ dig.

Intervallum ad secundam lentem $= 3\frac{1}{3}$ dig.

II. Pro secunda lente

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = 2{,}25 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} = -9{,}82 \text{ dig.}\end{cases}$$

Semidiameter aperturae $= \frac{1}{2}$ dig.

Intervallum ad tertiam lentem $= 3\frac{1}{3}$ dig.

III. Pro tertia lente

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = 2{,}07 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} = 17{,}71 \text{ dig.}\end{cases}$$

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{2}$ dig.

Intervallum ad lentem ocularem $= 3\frac{1}{3}$ dig.

IV. Pro quarta lente

Radius utriusque faciei $= 0{,}15$ dig.

Semidiameter aperturae $= \frac{3}{80}$ dig.

et distantia oculi $= \frac{2}{15}$ dig. proxime,

unde tota longitudo $= 10\frac{2}{15}$ dig.

Campi vero visi semidiameter ut hactenus $= \frac{859}{51}$ minut. $= 16$ minut. 51 sec.

SCHOLION

252. Maiores multiplicationes calculo hic non subiicio, quia ab huiusmodi telescopiis etiam maior campus quam vulgo exspectari solet. Quamobrem nostram investigationem ad campum apparentem augendum prosequamur idque retentis commodis, quae ternae lentes priores nobis sunt largitae. Hinc possemus valoribus hic assumtis uti, scilicet $k=2$, $\eta=1$ et $\theta=1$, sed quia hoc modo duo priora intervalla satis fiunt magna, scilicet $\frac{1}{2}\alpha$, quo pacto tota longitudo non parum augetur, praestare videtur haec duo intervalla multo minora efficere, ita ut tantum non evanescant neque lentes se immediate contingere debeant. Hunc in finem pro k numerus unitatem vix superans assumi debebit, unde simul hoc lucrum nanciscimur, ut pro λ' numerus binarium vix superans reperiatur. Statuamus igitur

$$k=1+\omega,$$

denotante ω fractionem minimam, ita ut sit

$$b=-\frac{\alpha}{1+\omega}=-(1-\omega)\alpha, \quad \alpha+b=\omega\alpha;$$

ob eandemque rationem statuatur etiam $\eta=\omega$, ut secundum intervallum etiam fiat $\omega\alpha$. Quod deinde ad litteram θ attinet, quae hic ex margine colorato est definita, factis his hypothesibus multo minor unitate esset preditura, scilicet $\theta=2\omega$, qui valor maximis incommodis foret obnoxius; primo enim elementa γ et d evanescerent, nisi α in immensum augeretur, deinde etiam valor ipsius λ' fieret enormis. Sed probe hic notandum est has hypotheses non casui hic tractato, ubi unica lens ocularis admittitur, destinari, sed propositum nobis esse iis uti in sequentibus, ubi duae pluresve lentes oculares considerabuntur; quibus, cum novae litterae in calculum introducantur, non amplius opus erit ex aequatione marginem coloratum tollente hanc litteram θ definire, sed eam poterimus ut arbitrariam contemplari, ita ut iam nihil obstet, quominus ponatur $\theta=1$. Quod autem hunc valorem elegerim, duae sunt causae: altera est, quod, cum distantia γ hic sit $\theta\alpha$, si θ ultra unitatem augeretur, longitudo telescopii maior esset proditura; altera autem suadet, ne θ minus unitate capiatur, quia tum λ' mox enormem valorem esset obtenturum; sit igitur ratum statuere

$$1.\ k=1+\omega, \quad 2.\ \eta=\omega, \quad 3.\ \theta=1;$$

unde, quotcunque lentes adhibeantur, pro tribus prioribus semper erit

$$b = -(1-\omega)\alpha, \quad \beta = \infty, \quad c = -\infty, \quad \beta + c = \omega\alpha, \quad \gamma = \alpha.$$

Deinde pro litteris π et π' erit quoque semper

$$\frac{\pi}{\Phi} = -\omega, \quad \frac{\pi'}{\Phi} = -2\omega;$$

ceterum notetur esse

$$B = \infty, \quad \mathfrak{B} = 1, \quad C = \mathfrak{C} = 0 \quad \text{et} \quad BC = 1$$

atque hinc aequatio pro margine tollendo semper his duobus terminis exordietur $+\omega - 2\omega$; ita ut hi duo termini semper coalescant in $-\omega$. Denique etiam aequatio pro confusione tollenda semper incipiet ab his tribus terminis

$$0 = \lambda - \frac{\lambda'}{1+\omega} + \frac{\lambda''}{1+\omega} \cdots\cdots,$$

unde facile erit calculum pro quotvis lentibus ocularibus prosequi, ubi potissimum nobis erit propositum campum apparentem multiplicare, idque quousque libuerit.

PROBLEMA 6

253. *Tribus lentibus prioribus ita ante imaginem realem dispositis, uti paragrapho praecedente est indicatum, si post imaginem duae lentes constituantur, efficere, ut campus apparens evadat maximus.*

SOLUTIO

Cum hic habeantur quinque lentes, formula pro multiplicatione erit

$$m = -\frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\gamma}{d} \cdot \frac{\delta}{e},$$

quarum fractionum ista $\frac{\gamma}{d}$ erit positiva, reliquae negativae. Cum igitur sit

$$\frac{\alpha}{b} = -1 - \omega, \quad \frac{\beta}{c} = -1,$$

statuatur

$$\frac{\gamma}{d} = i \quad \text{et} \quad \frac{\delta}{e} = -l$$

habebimusque sequentia elementa:

$$b = -\frac{\alpha}{1+\omega}, \quad \beta = -\infty, \quad c = \infty, \quad \gamma = \alpha, \quad d = \frac{\alpha}{i}, \quad \delta = \frac{D\alpha}{i}, \quad e = -\frac{D\alpha}{il},$$

existente $m = (1+\omega)\, il$.

Deinde distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = b, \quad r = \gamma, \quad s = \mathfrak{D} d \quad \text{et} \quad t = e.$$

Porro intervalla lentium

$$\alpha + b = \omega\alpha, \quad \beta + c = \omega\alpha, \quad \gamma + d = \frac{1+i}{i}\alpha, \quad \delta + e = D\left(\frac{l-1}{il}\right)\alpha,$$

quorum trium priora cum per se sint positiva, tantum superest, ut sit $D(l-1)$ positivum.

Pro fractionibus π, π' etc. iam habemus

$$\frac{\pi}{\Phi} = -\omega, \quad \frac{\pi'}{\Phi} = -2\omega$$

ideoque

$$\frac{\pi - \pi'}{\Phi} = \omega.$$

Pro binis reliquis vero habentur hae aequationes:

$$\frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\alpha}{d} = i,$$

$$\frac{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = \frac{D\alpha}{e} = -il = -m.$$

Ex quibus elicitur

$$\frac{\pi''}{\Phi} = \frac{1+i-\omega}{\mathfrak{D}} = \frac{1+i}{\mathfrak{D}},$$

$$\frac{\pi'''}{\Phi} = \frac{1+i}{\mathfrak{D}} + \omega - 1 - m.$$

Unde pro loco oculi statim habemus

$$O = -\frac{\pi'''}{m\Phi} \cdot t = \left(\frac{1+i}{\mathfrak{D}} + \omega - 1 - m\right)\frac{D\alpha}{m^2},$$

$$O = \left(\frac{1+i}{\mathfrak{D}} - 1 - m\right)\frac{D\alpha}{m^2};$$

quae ut fiat positiva, necesse est, ut D sit negativum, adeoque ob $D(l-1)>0$ erit quoque $l<1$. Quare, cum distantia O facta sit positiva, pro margine colorato tollendo habebitur haec aequatio:

$$0=-\omega+\frac{\pi''}{\Phi}\cdot\frac{1}{i}-\frac{\pi'''}{\Phi}\cdot\frac{1}{m}$$

seu

$$0=-\omega+\frac{1+i}{\mathfrak{D}i}-\frac{(1+i)}{\mathfrak{D}m}+\frac{1+m}{m}$$

seu reiectis ω

$$0=\frac{1+i}{\mathfrak{D}}\cdot\frac{l-1}{il}+\frac{1+m}{m}$$

seu

$$0=\frac{(1+i)(l-1)}{\mathfrak{D}}+1+m;$$

hinc

$$\mathfrak{D}=\frac{-(1+i)(l-1)}{m+1}=\frac{(1+i)(1-l)}{m+1}$$

et

$$D=\frac{(1+i)(1-l)}{2m-i+l},$$

qui valor debet esse negativus ob $l<1$ hincque esse oporteret

$$l<\frac{i}{2i+1}\quad\text{sive}\quad l<\frac{1}{2},$$

ita ut hinc esse debeat $i>2m$ et

$$D=\frac{-(1+i)(1-l)}{i(1-2l)-l}.$$

His circa valores D et l definitis examinemus campum apparentem, cuius semidiameter Φ duplici modo exprimitur:

$$1.\quad \Phi=\frac{\mathfrak{D}\pi''}{1+i}=\frac{(1-l)\pi''}{m+1},\qquad 2.\quad \Phi=\frac{\mathfrak{D}\pi'''}{1+i-\mathfrak{D}(m+1)}=\frac{(1-l)\pi'''}{(m+1)l},$$

quorum minor tantum locum habet, siquidem π'' et π''' maximum valorem, qui est circiter $\frac{1}{4}$, obtineant. Cum autem sit $\pi'':\pi'''=1:l$, tantum sumi poterit $\pi''=\frac{1}{4}$ fietque $\pi'''=\frac{l}{4}$, hincque campus prodiret

$$\Phi=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-l}{m+1}$$

ideoque minor, quam si lente oculari simplici uteremur, contra nostrum institutum, ita ut hoc problema pro nostro scopo resolvi nequeat.

IDEM PROBLEMA PRAECEDENS

254. *Ubi ceteris manentibus omnibus tantum quarta lens ante imaginem realem collocatur.*

SOLUTIO

In solutione ergo etiam omnia manebunt ut ante, nisi quod binarum quantitatum i et l signa sint mutanda. Primo ergo erunt elementa

$$b = -\frac{\alpha}{1+\omega}, \quad \beta = -\infty, \quad c = \infty, \quad \gamma = \alpha,$$

$$d = -\frac{\alpha}{i}, \quad \delta = -\frac{D\alpha}{i}, \quad e = -\frac{D\alpha}{il}.$$

Distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = -\alpha, \quad r = \gamma = \alpha, \quad s = -\frac{\mathfrak{D}\alpha}{i}, \quad t = -\frac{D\alpha}{il}.$$

Lentium vero intervalla

$$\alpha + b = \omega\alpha, \quad \beta + c = \omega\alpha, \quad \gamma + d = +\frac{(i-1)}{i}\alpha, \quad \delta + e = \frac{-(l+1)}{il}\cdot D\alpha;$$

unde patet esse debere D negativum, at $i > 1$; tum vero notetur esse $m = il$.

Deinde inveniemus

$$\frac{\pi}{\Phi} = -\omega, \quad \frac{\pi'}{\Phi} = -2\omega, \quad \frac{\pi''}{\Phi} = -\frac{(i-1)}{\mathfrak{D}}, \quad \frac{\pi'''}{\Phi} = -\frac{(i-1)}{\mathfrak{D}} - 1 - m$$

hincque pro loco oculi

$$O = \left(-\frac{(i-1)}{\mathfrak{D}} - 1 - m\right)\frac{D\alpha}{mm},$$

qui ergo valor est positivus ob $D < 0$. Quare, ut margo coloratus evanescat, debet esse

$$\mathfrak{D} = \frac{-(i-1)(1+l)}{m+1}, \quad D = \frac{-(i-1)(1+l)}{2m+i-l},$$

qui valor, cum sit negativus, conditionibus praecedentibus satisfit, si modo sit $i > 1$, atque his valoribus substitutis erit

$$b = -\alpha, \quad \beta = -\infty, \quad c = \infty, \quad \gamma = \alpha, \quad d = -\frac{\alpha}{i},$$

$$\delta = \frac{(i-1)(1+l)\alpha}{(2m+i-l)i}, \quad e = \frac{(i-1)(1+l)\alpha}{(2m+1-l)il},$$

$$p=\alpha,\quad q=-\alpha,\quad r=\alpha,\quad s=\frac{(i-1)(1+l)\alpha}{(m+1)i},\quad t=\frac{(i-1)(1+l)\alpha}{(2m+i-l)il},$$

$$a+b=\omega\alpha,\quad \beta+c=\omega\alpha,\quad \gamma+d=\frac{i-1}{i}\alpha,\quad \delta+e=\frac{(i-1)(1+l)^2\alpha}{(2m+i-l)il},$$

$$\frac{\pi}{\Phi}=-\omega,\quad \frac{\pi'}{\Phi}=-2\omega,\quad \frac{\pi''}{\Phi}=+\frac{m+1}{l+1},$$

$$\frac{\pi'''}{\Phi}=+\frac{m+1}{l+1}-1-m=-\frac{l(m+1)}{1+l}$$

hincque

$$O=\frac{l(i-1)(m+1)}{2m+i-l}\cdot\frac{\alpha}{m^2}.$$

Cum igitur sit $\pi'':\pi'''=1:-l$, pro campo duo casus sunt perpendendi.

I. Si $l>1$, tum poterit capi $\pi'''=-\frac{1}{4}$, ut fiat

$$\pi''=\frac{1}{4l}<\frac{1}{4}$$

hincque semidiameter campi

$$\Phi=\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\frac{1}{l}}{m+1}.$$

II. Si $l<1$, capi poterit $\pi''=\frac{1}{4}$, ut fiat

$$\pi'''=-\frac{l}{4}>-\frac{1}{4}$$

hincque

$$\Phi=\frac{1}{4}\cdot\frac{1+l}{m+1}.$$

Utroque ergo casu campus maior erit, quam si unica adesset lens ocularis, quo casu invenimus

$$\Phi=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{m+1}.$$

Maximus igitur campus obtinebitur, si capiatur $l=1$, quo casu ob $il=m$ fit $i=m$, tum vero

$$\Phi=\frac{1}{2(m+1)}=\frac{1718}{m+1}\text{ minut.},$$

qui est duplo maior. Conveniet igitur sumi $l=1$, si modo resolutio postremae

aequationis id permittat, quae est

$$0 = \lambda - \frac{\lambda'}{1+\omega} + \frac{\lambda''}{1+\omega} - \frac{1}{\mathfrak{D}i}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^2} + \frac{v}{D}\right) - \frac{\lambda''''}{D^3 m},$$

ubi, si capiatur $l = 1$, ut sit $i = m$, fit

$$\mathfrak{D} = -2 \cdot \frac{m-1}{m+1}, \quad D = -2 \cdot \frac{m-1}{3m-1};$$

quare, si m sit numerus praemagnus, erit $\mathfrak{D} = -2$, $D = -\frac{2}{3}$, ex quo manifestum est resolutionem illius aequationis hoc modo non solum non impediri, sed et adiuvari, ita ut haec positio $l = 1$ nostro scopo maxime conveniat. Hinc ergo consequimur

$$\lambda' = (1+\omega)\lambda + \lambda'' - \frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3 m} - \frac{\lambda''''}{D^3 m} - \frac{v}{\mathfrak{D}Dm},$$

ad quam resolvendam primo notetur, quia duae postremae lentes maximam requirunt aperturam, eas utrinque aeque convexas capi debere; unde pro ultima lente sumi debebit $\lambda'''' = 1{,}6299$, pro penultima vero habetur

$$\sqrt{(\lambda''' - 1)} = \frac{\sigma - \varrho}{2\tau} \cdot \frac{\delta - d}{\delta + d} = \frac{\sigma - \varrho}{2\tau} \cdot \frac{-5m+3}{m+1}.$$

Cum nunc sit

$$\left(\frac{\sigma - \varrho}{2\tau}\right)^2 = 0{,}6299,$$

erit

$$\lambda''' = 1 + 0{,}6299 \cdot \left(\frac{-5m+3}{m+1}\right)^2;$$

deinde vero sumamus $\lambda = 1$ et $\lambda'' = 1$, pro ω autem commode sumi posse videtur $\omega = \frac{1}{m}$, quoniam hoc modo intervalla lentium priorum non fiunt nimis parva, quam ut in praxi locum habere queant.

COROLLARIUM 1

255. Quodsi ergo statuamus $l = 1$, ut sit $i = m$, tum vero $\omega = \frac{1}{m}$, nostra elementa ita se habebunt:

$$b = -\frac{m\alpha}{m+1}, \quad \beta = -\infty, \quad c = \infty, \quad \gamma = \alpha,$$

$$d = -\frac{\alpha}{m}, \quad \delta = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)}, \quad e = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)},$$

ita ut sit $\delta = e$ et imago realis inter binas lentes postremas media interiaceat.

Distantiae autem focales erunt

$$p = \alpha, \quad q = -\frac{m\alpha}{m+1}, \quad r = \alpha, \quad s = \frac{2(m-1)\alpha}{m(m+1)}, \quad t = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)},$$

intervalla vero lentium

$$\alpha + b = \frac{\alpha}{m}, \quad \beta + c = \frac{\alpha}{m}, \quad \gamma + d = \frac{m-1}{m}\alpha, \quad \delta + e = \frac{4(m-1)\alpha}{m(3m-1)}$$

et

$$O = \frac{mm-1}{3m-1} \cdot \frac{\alpha}{mm}.$$

COROLLARIUM 2

256. Adiecta igitur unica lente hoc insigne commodum feliciter sumus adepti, quod amplitudo campi duplo maior sit facta, quam si unica lente oculari uteremur, ubi probe notandum est, quod haec nova lens adiecta non post imaginem realem, sed ante eam debeat collocari.

SCHOLION 1

257. Quo haec, quae invenimus, commodissime ad praxin accommodemus, methodo iam supra tradita utamur ac primo constructionem telescopii pro multiplicatione quapiam modica veluti $m = 25$ investigemus, deinde vero pro $m = \infty$; ex quorum casuum comparatione non difficulter pro qualibet multiplicatione media constructionem colligere licebit.

EXEMPLUM 1

258. Pro $m = 25$ constructionem telescopii exhibere.

Cum hic sit $m = 25$, erit

$$\mathfrak{D} = -\frac{24}{13} = -1{,}84615, \quad D = -\frac{24}{37} = -0{,}64865,$$

hinc erit

$$\frac{1-D}{1+D} = \frac{1{,}64865}{0{,}35134} \quad \text{hinc} \quad \text{Log.}\left(\frac{1-D}{1+D}\right)^2 = 1{,}3428018,$$

unde colligitur

$$\lambda''' = 14{,}8699.$$

Iam cum sit

$$\text{Log.}\,(-\mathfrak{D}) = 0{,}2662669, \quad \text{Log.}\,(-D) = 9{,}8120104,$$

reperiemus

$$\lambda' = 1{,}04 + 1 + 0{,}094529 + 0{,}23888 - 0{,}00777,$$

$$\lambda' = 2{,}3656, \quad \lambda' - 1 = 1{,}3656 \quad \text{et} \quad \tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = 1{,}0577.$$

Constructio igitur lentium ita se habebit:

I. Pro prima lente

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 0{,}6145\,\alpha \\ \text{posterioris} & = 5{,}2439\,\alpha. \end{cases}$$

Semidiameter aperturae $= \frac{25}{50}$ dig. $= \frac{1}{2}$ dig.

Intervallum ad lentem sequentem $= \frac{1}{25}\alpha = 0{,}04\,\alpha$.

II. Pro secunda lente

calculus ita se habebit:

$$F = \frac{b}{\varrho \pm 1{,}0577} = \frac{-0{,}96\,\alpha}{1{,}2484}, \qquad G = \frac{b}{\sigma \mp 1{,}0577} = \frac{-0{,}96\,\alpha}{0{,}5697}$$

seu

$$F = -0{,}7690\,\alpha, \quad G = -1{,}6851\,\alpha.$$

Intervallum ad sequentem ut ante $= 0{,}04\,\alpha$.

III. Pro tertia lente

Cum eius distantia focalis sit revera

$$\gamma = \frac{\alpha}{1+\omega} = (1-\omega)\,\alpha \quad \text{et} \quad \lambda'' = 1,$$

ex prima lente haec ita definitur:

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 0{,}5900\,\alpha \\ \text{posterioris} & = 5{,}0342\,\alpha. \end{cases}$$

Intervallum ad quartam $= \alpha - \frac{2\alpha}{m} = 0{,}92\,\alpha$.

IV. Pro quarta lente

cuius distantia focalis est $1,84615 \cdot \frac{\alpha}{m}$, quia debet esse utrinque aeque convexa, erit utriusque faciei radius $= 2,03076 \cdot \frac{\alpha}{m}$.

Semidiameter aperturae $= 0,50769 \cdot \frac{\alpha}{m}$.

Intervallum ad sequentem $= 1,29730 \cdot \frac{\alpha}{m}$.

V. Pro quinta lente

cuius distantia focalis $= 0,64865 \cdot \frac{\alpha}{m}$,

erit radius utriusque faciei $= 0,71351 \cdot \frac{\alpha}{m}$.

Semidiameter aperturae $= 0,17838 \cdot \frac{\alpha}{m}$.

Hinc intervallum ad oculum usque erit $= 0,3373 \cdot \frac{\alpha}{m}$ existente $m = 25$ et campi apparentis semidiameter erit

$$\Phi = \frac{1718}{26} \text{ minut.} = 66 \text{ minut.}$$

et longitudo totius instrumenti

$$= \alpha + 1,6346 \cdot \frac{\alpha}{m} = 1,06538\,\alpha.$$

EXEMPLUM 2

259. Si $m = \infty$, constructionem telescopii describere.

Erit igitur

$$\mathfrak{D} = -2, \quad D = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \omega = 0, \quad \frac{1-D}{1+D} = 5;$$

unde fit

$$\lambda''' = 1 + 0,6299 \cdot 25 = 16,75.$$

Hincque colligitur

$$\lambda' = 1 + 1 = 2, \quad \lambda' - 1 = 1 \quad \text{ideoque} \quad \tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = \tau = 0,9051.$$

Constructio igitur lentium ita se habebit:

I. Pro prima lente

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 0{,}6145\,\alpha\\ \text{posterioris} & = 5{,}2439\,\alpha.\end{cases}$$

Semidiameter aperturae $= \dfrac{m}{50}$ dig.

Intervallum ad lentem sequentem $= \dfrac{\alpha}{m}$.

II. Pro secunda lente

cuius distantia focalis $b = -\alpha$, habebimus

$$F = \frac{b}{\varrho \pm 0{,}9051} = \frac{-\alpha}{1{,}0958}, \qquad G = \frac{b}{\sigma \mp 0{,}9051} = \frac{-\alpha}{0{,}7223}.$$

Hinc

$$F = -0{,}91257\,\alpha, \qquad G = -1{,}38446\,\alpha.$$

Intervallum ad sequentem $= \dfrac{\alpha}{m}$.

III. Pro tertia lente

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 0{,}6145\,\alpha\\ \text{posterioris} & = 5{,}2439\,\alpha.\end{cases}$$

Intervallum ad sequentem lentem $= \alpha - \dfrac{2\alpha}{m}$.

IV. Pro quarta lente

cuius distantia focalis est $\mathfrak{D}d = +\dfrac{2\alpha}{m}$,

erit radius utriusque faciei $= 2{,}2 \cdot \dfrac{\alpha}{m}$.

Intervallum $= \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{\alpha}{m} = 1{,}333 \cdot \dfrac{\alpha}{m}$.

V. Pro quinta lente

cuius distantia focalis $= 0{,}666 \cdot \frac{\alpha}{m}$,

erit radius utriusque faciei $= 0{,}7333 \cdot \frac{\alpha}{m}$.

Intervallum ad oculum $= \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{m}$.

EXEMPLUM 3

260. Pro multiplicatione quacunque m constructionem huiusmodi telescopii describere.

Hic assumsi omnes lentes ex ea vitri specie parari, pro qua est $n = 1{,}55$. Ex praecedentibus autem sequens constructio concinnabitur:

I. Pro prima lente

erit ut hactenus

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 0{,}6145\,\alpha \\ \text{posterioris} & = 5{,}2439\,\alpha. \end{cases}$$

Semidiameter aperturae $x = \frac{m}{50}$ dig.

Intervallum ad sequentem $= \frac{\alpha}{m}$.

II. Pro secunda lente

ponatur

$$F = -\left(0{,}91257 + \frac{f}{m}\right)\alpha, \quad G = -\left(1{,}38446 + \frac{g}{m}\right)\alpha;$$

erit autem

$$0{,}91257 + \frac{f}{25} = 0{,}7690, \quad 1{,}38446 + \frac{g}{25} = 1{,}6851;$$

unde

$$f = -3{,}59, \quad g = +7{,}52.$$

Intervallum $= \frac{\alpha}{m}$.

III. Pro tertia lente

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 0{,}6145\left(1 - \frac{1}{m}\right)\alpha \\ \text{posterioris} & = 5{,}2439\left(1 - \frac{1}{m}\right)\alpha. \end{cases}$$

Intervallum ad sequentem $= \alpha - \frac{2\alpha}{m}$.

IV. Pro quarta lente

statuatur radius utriusque faciei $=\left(2,2+\frac{h}{m}\right)\frac{\alpha}{m}$

eritque

$$2,2+\frac{h}{25}=2,03076;\quad \text{hinc colligitur}\quad h=-4,231.$$

Intervallum ad sequentem

$$=\left(1,333+\frac{k}{m}\right)\frac{\alpha}{m},\quad \text{hinc}\quad k=-0,90;$$

adeoque intervallum erit

$$=\left(1,333-\frac{0,90}{m}\right)\frac{\alpha}{m}.$$

V. Pro quinta lente

cuius distantia focalis $=\left(0,666-\frac{0,434}{m}\right)\frac{\alpha}{m}$,

erit radius utriusque faciei $=\left(0,7333-\frac{0,495}{m}\right)\frac{\alpha}{m}$.

Distantia ad oculum $=\left(\frac{1}{3}+\frac{l}{m}\right)\frac{\alpha}{m}$,

unde $l=0,097$, adeoque haec distantia erit

$$\left(0,333+\frac{0,097}{m}\right)\frac{\alpha}{m}$$

et tota telescopii longitudo

$$=\alpha+\left(1,666-\frac{0,803}{m}\right)\frac{\alpha}{m}\quad \text{vel}\quad \alpha+1,666\cdot\frac{\alpha}{m}-0,803\cdot\frac{\alpha}{mm}.$$

Perpendamus nunc, quantum valorem ipsi α tribui conveniat, et cum ternae priores lentes ut lens triplicata spectari queant, minimus radius est $0,6145\,\alpha$, cuius pars quarta $\frac{3}{20}\alpha$ ipsi $x=\frac{m}{50}$ aequalis posita dat

$$\alpha=\frac{2m}{15}\ \text{dig.}=\frac{4m}{30}\ \text{dig.}$$

Ponamus igitur $\alpha=\frac{4}{30}m$ dig. et habebitur sequens constructio huiusmodi telescopiorum pro multiplicatione quacunque m, lentibus ex vitro $n=1,55$ factis.

Circa diaphragma his telescopiis inserendum videatur sequens Scholion 3.

I. Pro prima lente

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= 0{,}08193\,m \text{ dig.}\\ \text{posterioris} &= 0{,}69918\,m \text{ dig.}\end{cases}$$

Semidiameter aperturae $= \frac{m}{50}$ dig. Intervallum $= \frac{2}{15}$ dig.

II. Pro secunda lente

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= (-0{,}1217\,m + 0{,}478) \text{ dig.}\\ \text{posterioris} &= (-0{,}18459\,m - 1{,}003) \text{ dig.}\end{cases}$$

Intervallum $= \frac{2}{15}$ dig.

III. Pro tertia lente

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= (-0{,}08193\,m - 0{,}0819) \text{ dig.}\\ \text{posterioris} &= (-0{,}69918\,m - 0{,}699) \text{ dig.}\end{cases}$$

Intervallum $= \left(\frac{2}{15}m - \frac{4}{15}\right)$ dig.

IV. Pro quarta lente

Radius utriusque faciei $= \left(0{,}2933 - \frac{0{,}5641}{m}\right)$ dig.

Intervallum $= \left(0{,}1777 - \frac{0{,}12}{m}\right)$ dig.

V. Pro quinta lente

Radius utriusque faciei $= \left(0{,}098 - \frac{0{,}066}{m}\right)$ dig.

Hinc intervallum ad oculum $= \left(0{,}044 + \frac{0{,}013}{m}\right)$ dig.

Longitudo tota $= \left(\frac{2}{15}m + 0{,}222 - \frac{0{,}107}{m}\right)$ dig.[1]),

ɜa ut pro casu $m = 100$ haec longitudo sit $13\frac{1}{2}$ di
ɜntis semidiameter $= \frac{1718}{m+1}$ minut., seu, quia etiam len
d campum augendum conferunt, $\Phi = \frac{1718}{m}$ minut.,
$\Phi = 17$ minut. 11 sec.

1) Editio princeps: $\left(\frac{2}{15}m - 0{,}11\right)$ dig. Correxit E. Ch.

SCHOLION 2

261. Telescopia haec in suo genere ita omnibus numeris absoluta videntur, ut perfectiora vix desiderari queant, nisi diversas vitri species adhibere velimus. Non solum enim confusionis ab apertura oriundae sunt expertia aeque ac marginis colorati, sed etiam campum apparentem duplo maiorem patefaciunt quam simplicia ac praeterea tam sunt brevia, ut breviora ne sperare quidem liceat. Deinde etiam in executione insigne commodum inde obtineri potest, quod inter tres priores lentes intervalla aliquantillum variari possunt; si enim forte eveniat, ut ob tantillum errorem in praxi commissum hae lentes non exactissime ad intervalla hic praescripta sint accommodata, facile evenire potest, ut iis paulisper mutatis egregium effectum sint praestaturae. Interim tamen semper consultum erit secundam lentem concavam pluries elaborari secundum easdem mensuras, cum enim semper aliquod discrimen deprehendatur, inter plures eiusmodi lentes optima facile eligi poterit. Nihilo minus vero conveniet nostram investigationem ulterius prosequi et in eiusmodi huius generis telescopia inquirere, quorum campus adeo triplo vel quadruplo maior sit proditurus.

SCHOLION 3

262. Quo haec telescopia meliorem effectum praestent, necesse est, ut in loco imaginis verae diaphragma sive septum, quemadmodum supra [§ 224, 225] iam est descriptum, cum foramine debitae magnitudinis constituatur. Cadit autem haec imago ob $\delta = e$ praecise in medium intervalli quartae et quintae lentis ideoque ad distantiam $= \left(0{,}0888 - \frac{0{,}06}{m}\right)$ dig. Deinde cum foramen magnitudini huius imaginis debeat esse aequale et semidiameter imaginis sit in genere

$$= \alpha \Phi BCD = \alpha \Phi D = -2\,\frac{m-1}{3m-1} \cdot \alpha \Phi,$$

debet esse semidiameter foraminis $= -2\,\frac{m-1}{3m-1} \cdot \alpha \Phi$. Iam cum in nostro exemplo evoluto sit $\alpha = \frac{2}{15} m$ et $\Phi = -\frac{1}{2m}$, colligitur ista foraminis semidiameter

$$= \frac{1}{15} \cdot \frac{2(m-1)}{3m-1}\ \text{dig.} = \left(\frac{2}{45} - \frac{4}{135\,m}\right)\ \text{dig.}^{1)}$$

1) Editio princeps: $\left(\frac{2}{45} - \frac{8}{135\,m}\right)$ dig. Correxit E. Ch.

Ceterum etsi his telescopiis multo maiorem claritatis gradum conciliavimus, quam vulgo fieri solet, dum sumsimus $y = \frac{1}{50}$ dig., ex HUGENII regulis autem sequitur $y = \frac{1}{73}$ dig., tamen, si quis vereatur, ne hic ob multitudinem lentium claritas notabilem iacturam patiatur, huic incommodo facile medela afferetur mensuras datas tantum quapiam sui parte augendo seu, quod eodem redit, mensuram unius digiti, quam hactenus indefinitam reliquimus, pro lubitu augendo.

PROBLEMA 7

263. *Si praeter tres lentes priores, ut in praecedente problemate sunt constitutae, adhuc una lens ante locum imaginis collocetur, post eam insuper duas lentes ita disponere, ut maximus campus obtineatur.*

SOLUTIO

Cum hic occurrant sex lentes, erit

$$m = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\gamma}{d} \cdot \frac{\delta}{e} \cdot \frac{\varepsilon}{f},$$

quarum fractionum tres priores sunt negativae, quarta positiva et quinta denuo negativa. Pro prioribus iam sumsimus esse $\frac{\alpha}{b} = -1 - \omega$, $\frac{\beta}{c} = -1$. Pro posterioribus vero statuamus $\frac{\gamma}{d} = -k$, $\frac{\delta}{e} = i$ et $\frac{\varepsilon}{f} = -l$, ut sit $m = (1 + \omega)kli$; unde ob $B = \infty$, $C = 0$ et $BC = 1$ elementa nostra erunt

$$b = -\frac{\alpha}{1+\omega}, \quad \beta = \infty, \quad c = -\infty, \quad \gamma = \frac{\alpha}{1+\omega},$$

$$d = -\frac{\alpha}{k}, \quad \delta = -\frac{D\alpha}{k}, \quad e = -\frac{D\alpha}{ki}, \quad \varepsilon = -\frac{DE\alpha}{ki}, \quad f = \frac{DE\alpha}{kil}.$$

Atque hinc distantiae focales reperientur

$$p = \alpha, \quad q = -(1 - \omega)\alpha, \quad r = \frac{\alpha}{1+\omega},$$

$$s = -\frac{\mathfrak{D}\alpha}{k}, \quad t = -\frac{\mathfrak{E}D\alpha}{ki}, \quad u = \frac{DE\alpha}{kil}.$$

Tum vero intervalla lentium

$$\alpha+b=\omega\alpha,\quad \beta+c=\omega\alpha,\quad \gamma+d=\frac{k-1}{k}\cdot\alpha,$$
$$\delta+e=-D\alpha\cdot\frac{i+1}{ki},\quad \varepsilon+f=DE\alpha\cdot\frac{1-l}{kil};$$

quae ut prodeant positiva, debet esse

$$1.\ k>1,\qquad 2.\ D<0,\qquad 3.\ +E(l-1)>0.$$

Litterae π, π' etc. sequenti modo definientur:

$$\frac{\pi}{\Phi}=-\omega,\quad \frac{\pi'}{\Phi}=-2\omega,$$

et reliquae ex sequentibus formulis determinari debent:

$$\frac{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}{\Phi}=\frac{BC\alpha}{d}=-k,\quad \frac{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}{\Phi}=\frac{BCD\alpha}{e}=-ki,$$
$$\frac{\pi''''-\pi'''+\pi''-\pi'+\pi-\Phi}{\Phi}=m;$$

hinc ergo colligimus

$$\frac{\pi''}{\Phi}=\frac{1-k}{\mathfrak{D}},\quad \frac{\pi'''}{\Phi}=\frac{\pi''}{\mathfrak{E}\Phi}-\left(\frac{1+ki}{\mathfrak{E}}\right)\quad \text{et}\quad \frac{\pi''''}{\Phi}=\frac{\pi'''}{\Phi}-\frac{\pi''}{\Phi}+m+1.$$

Nunc cum pro campo apparente sit

$$\Phi=\frac{\pi-\pi'+\pi''-\pi'''+\pi''''}{m+1},$$

is fiet maximus, si sumatur $\pi''=\frac{1}{4}$, $\pi'''=-\frac{1}{4}$, $\pi''''=\frac{1}{4}$; inde enim fiet $\Phi=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{m+1}$, unde illae aequationes dabunt

$$\frac{m+1}{3}=\frac{1-k}{\mathfrak{D}},\quad \frac{-m-1}{3}=\frac{m+1}{3\mathfrak{E}}-\left(\frac{1+ki}{\mathfrak{E}}\right)$$

et

$$\frac{m+1}{3}=\frac{-m-1}{3}-\frac{m+1}{3}+m+1$$

quae est, uti debet, identica.

Unde pro loco oculi sequitur

$$O = \frac{m+1}{3} \cdot \frac{u}{m} = \frac{m+1}{3} \cdot \frac{DE\alpha}{kilm};$$

quae distantia ut fiat positiva, ob $D < 0$ debet etiam esse $E < 0$ adeoque $l < 1$, siquidem assumamus α positivum. Patet autem, si caperemus $l = 1$, binas postremas lentes sibi immediate iungi et prodire casum lentis ocularis duplicatae iam supra [§ 215] consideratum. Videamus autem, ante quam aequationem pro margine colorato contemplemur, cuiusmodi valores litterae $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ ex binis aequationibus superioribus obtineant, et ex priori quidem invenitur $\mathfrak{D} = -\frac{3(k-1)}{m+1}$; qui cum sit negativus, etiam D fit negativum, uti oportet; et ex altera fit $\mathfrak{E} = \frac{3ki - m + 2}{m+1}$ hincque $E = \frac{3ki - m + 2}{2m - 3ki - 1}$; qui valor cum debeat esse negativus, duo casus sunt considerandi.

I. Si numerator negativus et denominator positivus, erit $3ki + 2 < m$ et $m > \frac{3ki+1}{2}$ seu simpliciter $m > 3ki + 2$.

II. Sin autem numerator sit positivus et denominator negativus, erit $m < 3ki + 2$ et $m < \frac{3ki+1}{2}$ seu simpliciter $m < \frac{3ki+1}{2}$.

Cum autem sit $m = kil$, ob $l < 1$ erit $m < ki$, unde patet priorem casum locum habere non posse, sed solum secundum, ita ut sit $m < ki$, quo pacto omnes conditiones sunt adimpletae. Sicque nihil impedit, quominus resolutionem aequationis pro margine tollendo suscipiamus, quae praeter exspectationem tam facilis evadet, ut nullae difficultates, quales ante occurrebant, negotium turbent. Haec autem aequatio omissis duobus primis terminis utpote minimis ita se habebit:

$$0 = \frac{\pi''}{\Phi} \cdot \frac{d}{p} + \frac{\pi'''}{\Phi} \cdot \frac{e}{Dp} + \frac{\pi''''}{\Phi} \cdot \frac{f}{DEp},$$

quae ob $\pi'' = -\pi''' = +\pi''''$ abit in hanc:

$$0 = \frac{d}{p} - \frac{e}{Dp} + \frac{f}{DEp};$$

cum nunc sit

$$p = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{d}{\alpha} = -\frac{1}{k}, \quad \frac{e}{\alpha} = -\frac{D}{ki}, \quad \frac{f}{\alpha} = \frac{DE}{kil},$$

erit nostra aequatio

$$0 = -\frac{1}{k} + \frac{1}{ki} + \frac{1}{kil}$$

seu per k multiplicando

$$0 = -1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{il}, \quad 0 = -il + l + 1,$$

hincque $i = \frac{l+1}{l}$, ubi debet esse $l > 1$; hinc $il = 1 + l$ et $m = k + ik$, ita ut sit $k = \frac{m}{1+i}$.

Deinde erit

$$\mathfrak{D} = \frac{3(k-1)}{m+1}, \quad \mathfrak{E} = \frac{3ki - m - 2}{m+1}$$

ideoque

$$D = \frac{3(k-1)}{3k+m-2}, \quad E = \frac{3ki - m - 2}{2m - 3ki + 1}.$$

His inventis aequatio pro confusione tollenda erit

$$0 = \lambda - \frac{\lambda'}{1+\omega} + \frac{\lambda''}{1+\omega'} - \frac{1}{\mathfrak{D}k}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{D}^2} + \frac{\nu}{D}\right) - \frac{1}{D^2\mathfrak{E}ki}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{E}^2} + \frac{\nu}{E}\right) + \frac{\lambda''''}{D^2E^2kim},$$

quae, ut hactenus est factum, facile resolvitur, quaerendo scilicet valorem ipsius λ'.

SCHOLION

264. Solutio huius problematis ad sequentes investigationes expediendas maximum adiumentum nobis affert, dum ea nobis novam methodum suppeditat aequationem pro margine colorato tollendo, quae supra insignibus difficultatibus erat involuta, expeditissime resolvendi. Huius methodi autem vis in eo consistit, ut litteris π, π', π'' etc. statim determinatos valores tribuamus, qui quidem ita sint comparati, ut maximum campum apparentem producant. Hoc enim facto istae litterae ex memorata aequatione statim tolluntur et loco litterarum d, e, f valores ante inventos substituendo etiam litterae maiusculae sponte ex calculo evanescunt, ita ut tota aequatio nulla amplius alia elementa involvat praeter litteras k, i, l; quarum una inde sine ulla difficultate definitur; deinde vero ex illis valoribus pro litteris π assumtis facile determinantur litterae $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ etc. indeque etiam D, E etc., quarum valores in ultimam aequationem translati totum negotium facile conficiunt; quin etiam haec methodus pro prioribus lentibus in usum vocari potest, ubi autem notandum est, quia hae lentes quasi ad obiectivam constituendam concurrunt, ex earum litteris π et π' nihil vel perparum ad campum amplificandum redundare posse. Quocirca his litteris non ut sequentibus valor $\frac{1}{4}$, sed potius quam minimus, puta $\frac{1}{4}\omega$ et $\frac{1}{4}\omega'$, tribui debet, denotantibus sci-

licet ω et ω' fractiones quam minimas. Quare, quo haec nova methodus clarius perspiciatur, ea ad sequens problema generale huc spectans solvendum utemur.

PROBLEMA 8

265. *Telescopium huius generis ex sex lentibus construere, quarum tres priores inserviant omni confusioni tollendae, tres autem posteriores campo triplicando, dum scilicet lenti oculari simplici campum simplicem assignamus.*

SOLUTIO

Hic igitur quinque sequentes fractiones considerandae veniunt:

$$\frac{\alpha}{b},\ \frac{\beta}{c},\ \frac{\gamma}{d},\ \frac{\delta}{e},\ \frac{\varepsilon}{f},$$

quarum omnes praeter unicam debent esse negativae. Quare, si statuamus:

$$\frac{\alpha}{b} = -P, \quad \frac{\beta}{c} = -Q, \quad \frac{\gamma}{d} = -R, \quad \frac{\delta}{e} = -S \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon}{f} = -T,$$

evidens est harum quinque litterarum P, Q, R, S, T unicam fore negativam reliquis existentibus positivis. Quaenam autem sit negativa, hic nondum opus est definire. Hoc posito nostra elementa aeque ac distantiae focales cum intervallis lentium sequenti modo conspectui repraesententur:

Distantiae determinatrices		Distantiae focales	Intervalla lentium
		$p = \alpha$	
$b = \dfrac{-\alpha}{P}$	$\beta = \dfrac{-B\alpha}{P}$	$q = \mathfrak{B}b$	$\alpha + b = \alpha\left(1 - \dfrac{1}{P}\right) > 0$
$c = \dfrac{B\alpha}{PQ}$	$\gamma = \dfrac{BC\alpha}{PQ}$	$r = \mathfrak{C}c$	$\beta + c = \dfrac{-B\alpha}{P}\left(1 - \dfrac{1}{Q}\right) > 0$
$d = \dfrac{-BC\alpha}{PQR}$	$\delta = \dfrac{-BCD\alpha}{PQR}$	$s = \mathfrak{D}d$	$\gamma + d = \dfrac{BC\alpha}{PQ}\left(1 - \dfrac{1}{R}\right) > 0$
$e = \dfrac{BCD\alpha}{PQRS}$	$\varepsilon = \dfrac{BCDE\alpha}{PQRS}$	$t = \mathfrak{E}e$	$\delta + e = \dfrac{-BCD\alpha}{PQR}\left(1 - \dfrac{1}{S}\right) > 0$
$f = \dfrac{-BCDE\alpha}{PQRST}$		$u = f$	$\varepsilon + f = \dfrac{BCDE\alpha}{PQRS}\left(1 - \dfrac{1}{T}\right) > 0$

ubi, cum productum $PQRST$ sit negativum, pro multiplicatione erit

$$m = -PQRST.$$

Deinde, cum pro campo apparente habeatur

$$\Phi = \frac{\pi - \pi' + \pi'' - \pi''' + \pi''''}{m+1},$$

sit ξ maximus valor, quem hae litterae π, π' etc. recipere possunt, et statuamus

$$\pi = \omega\xi, \quad \pi' = -\omega'\xi, \quad \pi'' = \xi, \quad \pi''' = -\xi, \quad \pi'''' = \xi,$$

ut sit

$$\Phi = \frac{\omega + \omega' + 3}{m+1}\xi.$$

Cum igitur hinc sit

$$\frac{\pi''''}{\Phi} = \frac{m+1}{\omega + \omega' + 3},$$

pro distantia oculi habebimus

$$O = \frac{\pi''''}{\Phi} \cdot \frac{u}{m} = \frac{m+1}{\omega + \omega' + 3} \cdot \frac{-BCDE\alpha}{PQRSTm}$$

seu

$$O = \frac{m+1}{\omega + \omega' + 3} \cdot \frac{BCDE\alpha}{mm}.$$

Ut igitur O fiat positivum, quia $\frac{\pi''''}{\Phi}$ est positivum, debet esse $u > 0$ ideoque ultima lens convexa, quae conditio insuper est probe observanda.

Nunc igitur aequatio pro margine colorato tollendo ita se habebit:

$$0 = \omega \cdot \frac{b}{\alpha} - \omega' \cdot \frac{c}{B\alpha} + \frac{d}{BC\alpha} - \frac{e}{BCD\alpha} + \frac{f}{BCDE\alpha},$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$0 = +\omega \cdot \frac{1}{P} + \omega' \cdot \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PQR} + \frac{1}{PQRS} + \frac{1}{PQRST},$$

in qua duos priores terminos ob parvitatem negligere licet, ita ut adhuc sit

$$0 = 1 + \frac{1}{S} + \frac{1}{ST},$$

quae aequatio facile resolvitur, dummodo litterarum S et T altera sit negativa; unde patet tres priores litteras P, Q, R necessario esse positivas.

Nunc ordo postulat, ut etiam litteras $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. ex aequationibus fundamentalibus determinemus:

$$\frac{\mathfrak{A}\pi - \Phi}{\Phi} = P, \qquad \frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = PQ,$$

$$\frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = PQR, \qquad \frac{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = PQRS,$$

ex quibus, si brevitatis gratia ponamus

$$\frac{\omega + \omega' + 3}{m + 1} = M,$$

colligimus

$$\mathfrak{A} = \frac{(1 - P)M}{\omega}, \qquad B = \frac{\mathfrak{A}}{1 - \mathfrak{A}},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{(1 - PQ)M - \omega}{\omega'}, \qquad C = \frac{\mathfrak{C}}{1 - \mathfrak{C}},$$

$$\mathfrak{D} = (1 - PQR)M - \omega' - \omega, \qquad D = \frac{\mathfrak{D}}{1 - \mathfrak{D}},$$

$$\mathfrak{E} = (1 - PQRS)M - \omega' - \omega - 1, \qquad E = \frac{\mathfrak{E}}{1 - \mathfrak{E}},$$

adeoque

$$B = \frac{(1 - P)M}{\omega - (1 - P)M}, \qquad C = \frac{(1 - PQ)M - \omega}{\omega' + \omega - (1 - PQ)M},$$

$$D = \frac{(1 - PQR)M - \omega' - \omega}{1 + \omega + \omega' - (1 - PQR)M}, \qquad E = \frac{(1 - PQRS)M - \omega' - \omega - 1}{2 + \omega + \omega' - (1 - PQRS)M}.$$

Nunc denique aequatio pro confusione aperturae tollenda considerari debet, quae est

$$0 = \lambda - \frac{1}{\mathfrak{A}P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{B}\right) + \frac{1}{B^3\mathfrak{C}PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C}\right) - \frac{1}{B^3C^3\mathfrak{D}PQR}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3} + \frac{\nu}{D}\right)$$

$$+ \frac{1}{B^3C^3D^3\mathfrak{E}PQRS}\left(\frac{\lambda''''}{\mathfrak{E}^3} + \frac{\nu}{E}\right) - \frac{1}{B^3C^3D^3E^3\mathfrak{F}PQRST}\cdot\lambda''''';$$

propemodum destruere debeant, unde proxime statuendum erit

$$0=\lambda-\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3P}+\frac{\lambda''}{B^3\mathfrak{C}^3PQ}$$

ideoque

$$\lambda'=\mathfrak{B}^3P\lambda+\frac{\mathfrak{B}^3\lambda''}{B^3\mathfrak{C}^3Q},$$

ubi pro felici exsecutione optandum esset, ut prodiret $\lambda=1$, $\lambda'=1$ et $\lambda''=1$, quia tum leves errores in praxi commissi minimi sunt momenti. Quare, cum sequentes termini parvi sint positivi, necesse erit, ut sit $1>\mathfrak{B}^3P+\frac{\mathfrak{B}^3}{B^3\mathfrak{C}^3Q}$; unde, si esset $P=1$ et $Q=1$ et ut supra $B\mathfrak{C}=1$, deberet esse $1>2\mathfrak{B}^3$ seu $\mathfrak{B}<\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ sive $\mathfrak{B}<\frac{4}{5}$; quod praeceptum in adplicatione attendi meretur.

COROLLARIUM 1

266. Cum igitur nunc certum sit quinque litteras P, Q, R, S, T omnes esse positivas praeter S vel T, si sumamus distantiam α semper esse positivam, ex primo intervallo concludimus esse $P>1$, et quia hoc intervallum statuitur minimum, P parum tantum superabit unitatem, et quia etiam secundum intervallum sumitur minimum, littera Q parum quoque ab unitate discrepabit. Deinde quia quoque f debet esse quantitas positiva ideoque productum $BCDE$ positivum, ob $\varepsilon=-Tf$ ultimum intervallum fit $(1-T)f$ statimque hanc praebet conditionem $T<1$, unde, si T sit positivum, conditio postulat, ut sit $T<1$; sin autem T sit negativum, nulla restrictione opus est.

COROLLARIUM 2

267. Quia in ultima aequatione omnia membra praeter secundum sunt positiva, ita ut solum secundum omnia reliqua destruere debeat, necesse est, ut $\mathfrak{B}$ sit positivum et propemodum, uti notavimus, valorem habeat unitate aliquantillum minorem. Quare, cum inventum sit $\mathfrak{B}=\frac{(1-P)M}{\omega}$, littera autem M semper sit positiva, at $1-P$ negativum, sequitur fore particulam ω negativam.

COROLLARIUM 3

268. Si igitur intervallum primum statuamus $=\eta\alpha$ pariterque secundum etiam $=\eta\alpha$, existente η fractione minima, quoniam tantum hic illum casum evitare volumus, quo hae lentes quasi in unam coalescere deberent, η tam parvum assumi convenit, quam exsecutio permittit; ad quod sufficere videtur, si sit $\eta = 0{,}03$; hinc igitur erit $1 - \frac{1}{P} = \eta$ adeoque $P = \frac{1}{1-\eta}$, et nunc ω propius definire poterimus, scilicet $\omega = \frac{-\eta M}{(1-\eta)\mathfrak{B}}$, et quia $M = \frac{3}{m+1}$, erit $\omega = \frac{-3\eta}{(m+1)\mathfrak{B}}$ sicque littera $\mathfrak{B}$ adhuc nostro arbitrio relinquitur.

COROLLARIUM 4

269. Quia $\mathfrak{B} > 0$ et parumper minus unitate, erit B positivum; unde pro secundo intervallo habebimus $Q = \frac{B}{B+\eta P}$ ideoque $Q < 1$ sive $Q = \frac{(1-\eta)B}{(1-\eta)B+\eta}$ seu proxime $Q = 1 - \frac{\eta}{B}$; hincque definire licet ω', scilicet

$$\omega' = \frac{(1-PQ)M - \omega}{\mathfrak{C}} \quad \text{sive} \quad \omega' = \frac{6\eta}{(m+1)B\mathfrak{C}},$$

ita ut etiam $\mathfrak{C}$ nostro arbitrio relinquatur.

SCHOLION 1

270. Hinc casus supra tractatus, quo erat $B = \infty$ et $\mathfrak{C} = 0$, facile deducitur; tum enim erit $Q = 1$ manente

$$P = 1 + \eta, \quad \omega = \frac{-3\eta}{m+1}, \quad \omega' = \frac{6\eta}{(m+1)B\mathfrak{C}},$$

et quia tam $\beta = \infty$ quam $c = -\infty$, fiet γ distantia focalis tertiae lentis $r = \frac{B\mathfrak{C}\alpha}{PQ}$, ubi $B\mathfrak{C}$ ita definiri poterit, ut tertia lens primae perfecte evadat aequalis, quod ad praxin valde est conveniens; statuatur nempe

$$B\mathfrak{C} = PQ = 1 + \eta.$$

Quia autem tum fit $\mathfrak{B} = 1$, postremae conditioni [§ 265] satisfieri nequit; quae cum sit maioris momenti quam praecedens, statuamus potius $\mathfrak{B} = \frac{4}{5}$, ut sit $B = 4$, et sumto $P = 1{,}03$ reperitur sumi debere $\mathfrak{C} > 0{,}256$, quare

sumatur $\mathfrak{C} = 0{,}257$ eritque

$$C = \frac{0{,}257}{0{,}743} = 0{,}34589,$$

quod notasse sufficiat pro iis, qui tali resolutione uti velint.

COROLLARIUM 5

271. Quia nunc tam BC quam PQ sunt numeri positivi, ut tertium quoque intervallum fiat positivum, necesse est, ut sit $R > 1$, quae conditio sponte impletur, quoniam R erit numerus multo adhuc maior. Pro quarto intervallo $-\frac{BCD}{PQR}\left(1-\frac{1}{S}\right)\alpha$ necesse est, ut $-D\left(1-\frac{1}{S}\right)$ sit positivum; ex praecedentibus autem patet $\mathfrak{D}$ ideoque et D esse negativum; unde fieri debet $1-\frac{1}{S} > 0$, quod fit, si fuerit vel S negativum vel $S > 1$, si sit positivum. De quinto intervallo iam supra vidimus.

SCHOLION 2

272. Hic ergo duo casus sunt considerandi, alter, quo S est numerus negativus, alter vero, quo T est negativum.

I. Sit $S < 0$ et ponatur $S = -K$ habebiturque ista aequatio

$$0 = 1 - \frac{1}{K} - \frac{1}{KT} \quad \text{eritque} \quad K = 1 + \frac{1}{T};$$

verum hic est $T < 1$, uti supra vidimus, unde erit $K > 2$, et KT continetur intra limites 1 et 2; unde, cum sit $RKT = m$, continebitur R intra limites m et $\frac{1}{2}m$; hoc porro casu erit

$$\mathfrak{E} = (1 + RK)M - 1,$$

qui valor ob $RK > m$ et $M = \frac{3}{m+1}$ erit

$$\mathfrak{E} > \frac{3(m+1)}{m+1} - 1 > 2$$

e E semper negativum, uti reliqua conditio postulat, scilicet ut $BCDE$ sit positivum.

II. Sit iam $T < 0$ et ponatur $T = -K$ eritque

$$0 = 1 + \frac{1}{S} - \frac{1}{SK} \quad \text{ideoque} \quad S = \frac{1}{K} - 1,$$

ubi quidem ratione ultimi intervalli K pro lubitu accipi posset, nunc vero requiritur, ut sit $K < 1$. Cum igitur sit $RSK = m$, erit $RS = \frac{m}{K}$ adeoque $RS > m$ et littera $\mathfrak{E}$ manifesto fit negativa ideoque etiam E; quibus notatis evolutio exemplorum nulla plane laborat difficultate; id tantum hic adhuc adiungere visum est, ut tres posteriores lentes maximam aperturam accipiant, eas utrinque aeque convexas confici debere; qua conditione numeri λ''', λ'''', λ''''' sequenti modo determinantur, uti quidem iam supra est ostensum, scilicet, si pro indole vitri ponatur $\frac{\sigma - \varrho}{2\tau} = N$, reperitur

$$\lambda''' = 1 + N^2\left(\frac{1-D}{1+D}\right)^2,$$

quae forma ob $D = \frac{\mathfrak{D}}{1-\mathfrak{D}}$ erit

$$\lambda''' = 1 + N^2(1 - 2\mathfrak{D})^2,$$

similique modo

$$\lambda'''' = 1 + N^2(1 - 2\mathfrak{E})^2, \quad \lambda''''' = 1 + N^2.$$

Superfluum autem iudico hanc investigationem exemplo illustrare, cum quia pro casu quinque lentium plurima exempla iam sunt allata, tum vero, inprimis si quis campum maiorem desideraverit, consultum potius erit duas vitri species adhibere, ut etiam ultima confusionis species penitus removeatur. Quod argumentum in sequente adhuc capite fusius nobis explicandum restat.

CAPUT III

DE ULTERIORI TELESCOPIORUM SECUNDI GENERIS PERFECTIONE DIVERSAS VITRI SPECIES ADHIBENDO

PROBLEMA 1

273. *Si telescopium ex tribus lentibus sit componendum, invenire momenta ad eius perfectionem facientia.*

SOLUTIO

Incipiendum igitur est a duabus fractionibus, quae methodo ante exposita ponantur $\frac{\alpha}{b} = -P$ et $\frac{\beta}{c} = -Q$, ita ut litterarum P et Q altera sit positiva, altera vero negativa, ita ut sit $PQ = -m$. Tum igitur erunt

$$\text{distantiae determinatrices:}\quad b = -\frac{\alpha}{P},\quad \beta = -\frac{B\alpha}{P},\quad c = \frac{B\alpha}{PQ},$$

$$\text{distantiae focales:}\quad p = \alpha,\quad q = \frac{-\mathfrak{B}\alpha}{P},\quad r = \frac{B\alpha}{PQ} = \frac{-B\alpha}{m}$$

$$\text{et bina intervalla:}\quad \alpha + b = \alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right),\quad \beta + c = -\frac{B\alpha}{P}\left(1 - \frac{1}{Q}\right).$$

Deinde, cum sit pro campo $\Phi = \frac{\pi - \pi'}{m+1}$ et media lens parum confert, statuamus

$$\pi = \omega\xi \quad \text{et} \quad \pi' = -\xi,$$

ut fiat

$$\Phi = \frac{\omega + 1}{m+1}\cdot\xi,$$

unde pro distantia oculi habetur

$$O = -\frac{\pi'}{\Phi}\cdot\frac{r}{m} = -\frac{(m+1)}{\omega+1}\cdot\frac{B\alpha}{mm} = -\frac{B\alpha}{m}\cdot\frac{m+1}{m(1+\omega)},$$

ita ut nunc $-B\alpha$ debeat esse positivum; seu his tribus conditionibus erit satisfaciendum:

$$1.\ \alpha\left(1-\frac{1}{P}\right)>0,\quad 2.\ -\frac{B\alpha}{P}\left(1-\frac{1}{Q}\right)>0,\quad 3.\ -B\alpha>0$$

hincque

$$\frac{1}{P}\left(1-\frac{1}{Q}\right)>0.$$

Porro autem fiet

$$\mathfrak{B}\omega=(1-P)M,\quad B=\frac{(1-P)M}{\omega-(1-P)M}$$

existente

$$M=\frac{\omega+1}{m+1}.$$

Iam pro margine colorato tollendo aequatio est [§ 49], siquidem pro fractionibus $\frac{dn}{n-1}$, $\frac{dn'}{n'-1}$ et $\frac{dn''}{n''-1}$ litteras N, N', N'' statuamus

$$0=N'\omega\cdot\frac{1}{P}+N''\cdot\frac{1}{PQ}\quad\text{seu}\quad 0=N'\omega+N''\cdot\frac{1}{Q},$$

unde fit

$$Q=-\frac{N''}{N'\omega}.$$

Ut autem haec confusio penitus tollatur, requiritur [§ 53], ut sit

$$0=N\alpha-\frac{N'\alpha}{\mathfrak{B}P}+\frac{N''\alpha}{BPQ},$$

quae loco Q valore substituto fit

$$0=N-\frac{N'}{P}\left(\frac{1}{\mathfrak{B}}+\frac{\omega}{B}\right);$$

est vero

$$\omega=\frac{1-P}{(m+1)\mathfrak{B}+P-1},$$

in qua si ponatur valor ipsius ω, erit

$$0=N-\frac{N'}{P}\left(\frac{m+P}{(m+1)\mathfrak{B}+P-1}\right);$$

deinde aequatio pro Q inventa ob $PQ=-m$ dabit quoque

$$m=\frac{N''P((m+1)\mathfrak{B}+P-1)}{N'(1-P)},$$

ex qua, si in praecedente aequatione pro $(m+1)\mathfrak{B}+P-1$ scribatur valor ipsius $\frac{N'm(1-P)}{N''P}$, orietur haec aequatio:

$$0 = NP((m+1)\mathfrak{B}+P-1) - N'(m+P), \quad 0 = \frac{NN'm(1-P)}{N''} - N'(m+P)$$

indeque porro

$$P = \frac{m(N-N'')}{Nm+N''};$$

ideoque, cum sit

$$\frac{mN'(1-P)}{N''P} = (m+1)\mathfrak{B}+P-1,$$

colligitur

$$\mathfrak{B} = \frac{N'}{N-N''} + \frac{N''}{Nm+N''} \quad \text{sive} \quad \mathfrak{B} = \frac{NN'm+NN''+N'N''-N''N''}{(N-N'')(Nm+N'')},$$

hinc

$$1-\mathfrak{B} = \frac{NNm-NN'm-NN''m-N'N''}{(N-N'')(Nm+N'')}$$

adeoque

$$B = \frac{NN'm+NN''+N'N''-N''N''}{NNm-NN'm-NN''m-N'N''}.$$

Iam videamus, quomodo hae determinationes cum superioribus conditionibus subsistere queant, et cum esse debeat $\frac{1}{P}\left(1-\frac{1}{Q}\right)>0$ sive ob $Q=-\frac{m}{P}$ $\frac{1}{P}+\frac{1}{m}>0$, erit $\frac{N}{N-N''}>0$ et $N>N''$.

Primum autem intervallum $\alpha\left(1-\frac{1}{P}\right)>0$ abit in hoc $\frac{-N''(m+1)}{m(N-N'')}\cdot\alpha$ ideoque $\frac{-N''\alpha}{N-N''}>0$, et quia denominator iam inventus est positivus, restat, ut sit $-N''\alpha>0$. Conditio vero $-B\alpha>0$ dabit nunc $B>0$, [sed ex

$$B = \frac{NN'm+NN''+N'N''-N''N''}{NNm-NN'm-NN''m-N'N''} = -\frac{NN'm+N'N''+N''(N-N'')}{mN(N'+N''-N)+N'N''}$$

ob $N>N''$ et $N'+N''-N>0$ prodit $B<0$][1]); quod cum sit impossibile, etiam impossibile est, ut ope trium lentium haec duo commoda, quibus altera confusio penitus tollitur, obtineantur.

1) Editio princeps: *unde etiam fiet* $\mathfrak{B}>0$, *quare cum sit* $N-N''>0$ *erit quoque* $\frac{NN'm+NN''+N'N''-N''N''}{Nm+N''}>0$, *adeoque necesse est ut in hac fractione, tam numerator quam denominator simul sit aut positivus aut negativus, poni autem nequit* $Nm+N''<0$, *quia tum foret* $m<-\frac{N''}{N}$, *neque* $NN'm+NN''+N'N''-N''N''>0$ *nam inde sequeretur esse* $m<\frac{N''(N''-N-N')}{NN'}$, *quod cum . . .* Correxit E. Ch.

SCHOLION

274. Hoc ergo problema resolvi nequit, siquidem posteriorem confusionem penitus tollere velimus. Omissa autem ultima aequatione solutio facilis fuisset, sed tum plus non essemus consecuti quam in praecedente capite, ubi unica vitri specie sumus usi. Quoniam igitur non convenit duas vitri species adhibere ad telescopia conficienda, quae ex unica specie aeque felici successu obtineri possunt, huic investigationi non immorabimur, sed tantum eiusmodi in medium producere conabimur, quae praeter superiores qualitates etiam omni confusione, quae ibi erat relicta, destituantur. Causa autem, cur ista investigatio hic non successit, in eo manifesto consistit, quod numerus litterarum indefinitarum erat nimis parvus, siquidem ad tres aequationes adimplendas tantum tres litterae praesto erant. Quare si plures lentes constituamus, plures etiam habebimus eiusmodi litteras, quibus non solum his tribus aequationibus, sed reliquis etiam conditionibus satisfieri poterit.

PROBLEMA 2

275. *Si telescopium ex quatuor lentibus sit componendum, determinare momenta ad eius perfectionem facientia.*

SOLUTIO

Tres fractiones hic considerandae ponantur

$$\frac{a}{b} = -P, \quad \frac{\beta}{c} = -Q, \quad \frac{\gamma}{d} = -R,$$

ita ut harum litterarum P, Q, R una sit negativa et $m = -PQR$, unde erunt distantiae determinatrices

$$b = -\frac{a}{P}, \quad \beta = -\frac{Ba}{P}, \quad c = \frac{Ba}{PQ}, \quad \gamma = \frac{BCa}{PQ}, \quad d = -\frac{BCa}{PQR},$$

distantiae autem focales

$$p = a, \quad q = -\frac{\mathfrak{B}a}{P}, \quad r = \frac{B\mathfrak{C}a}{PQ}, \quad s = \frac{-BCa}{PQR}$$

et intervalla lentium

$$a + b = a\left(1 - \frac{1}{P}\right), \quad \beta + c = -\frac{Ba}{P}\left(1 - \frac{1}{Q}\right), \quad \gamma + d = \frac{BCa}{PQ}\left(1 - \frac{1}{R}\right).$$

Pro campo autem apparente

$$\Phi = \frac{\pi - \pi' + \pi''}{m+1}$$

statuatur

$$\pi = \omega\xi, \quad \pi' = -i\xi \quad \text{et} \quad \pi'' = \xi,$$

existente ξ valore maximo, quem hae litterae accipere possunt, scilicet $\frac{1}{4}$; ita ut sit

$$\Phi = \frac{\omega + i + 1}{m+1} \cdot \xi$$

sive

$$\Phi = M\xi,$$

posito

$$M = \frac{\omega + i + 1}{m+1}.$$

Ex his igitur obtinemus

$$\mathfrak{B}\omega = (1-P)M, \quad \mathfrak{C}i = (1-PQ)M - \omega.$$

Pro loco autem oculi erit

$$O = \frac{\pi''}{\Phi} \cdot \frac{s}{m} = \frac{m+1}{m^2} \cdot \frac{BC\alpha}{\omega + i + 1} = \frac{BC\alpha}{m^2 M};$$

quod ut fiat positivum, debet esse $BC\alpha > 0$.

His positis tribus sequentibus aequationibus satisfieri debet [§ 49, 53, 42]:

$$\text{I. } 0 = \frac{N'\omega}{P} + \frac{N''i}{PQ} + \frac{N'''}{PQR},$$

$$\text{II. } 0 = N - \frac{N'}{\mathfrak{B}P} + \frac{N''}{B\mathfrak{C}PQ} - \frac{N'''}{BCPQR},$$

$$\text{III. } 0 = \mu\lambda - \frac{\mu'}{\mathfrak{B}P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu'}{B}\right) + \frac{\mu''}{B^3\mathfrak{C}PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2} + \frac{\nu''}{C}\right) - \frac{\mu'''\lambda'''}{B^3C^3PQR};$$

quae resolutio quo facilius institui possit, consideremus primo casum, quo duae priores lentes sibi immediate iunguntur, ut supra de lentibus duplicatis assumsimus.

Primus casus, quo $a + b = 0$ ideoque $P = 1$ et $\omega = 0$; tum littera $\mathfrak{B}$ manet indeterminata hincque etiam B; quo facto resolutio facile institui poterit.

'rima enim aequatio dat

$$0 = N'''i + \frac{N''}{R},$$

sequitur

$$R = -\frac{N''}{N'''i},$$

R sit quantitas negativa, siquidem i sit positivum, id quod ratio postulat. Hinc ergo, cum sit $P = 1$, erit

$$PQR = -\frac{QN''}{N'''i} = -m$$

ae

$$Q = \frac{N'''mi}{N''}.$$

ecunda autem aequatio, in qua iam duo postremi termini evadunt parvi, siquidem multiplicatio m sit magna, statim dat

$$0 = N - \frac{N'}{\mathfrak{B}} \quad \text{adeoque} \quad \mathfrak{B} = \frac{N'}{N}$$

c fit

$$R = \frac{N'}{N - N'}.$$

si libuerit, valor ipsius $\mathfrak{B}$ adcuratius definiri poterit; habebitur nempe

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} = \frac{N}{N'} + \frac{N'''(N - N')}{N'N''\mathfrak{C}mi} + \frac{N''(N - N')}{N'N''Cm};$$

aque autem sufficit his duabus aequationibus proxime satisfecisse.
'ertia autem adcurate resolvi debet; cuius secundus terminus cum sit vus, reliquis existentibus positivis, ut mox videbimus, ille reliquis aequalis lebet; erit enim

$$\mathfrak{C}i = \frac{N''' - N''mi}{N'''} \cdot \frac{i+1}{m+1},$$

e $\mathfrak{C}$ est negativum simulque etiam C, unde conditiones supra memo- sunt perpendendae.

'rimum autem intervallum est per hypothesin $= 0$.

ecundum fit $\beta + c = \frac{-N'(N''mi - N''')}{(N - N')N''mi} \cdot \alpha$, pro quo, si α sit positivum, debet $\frac{N'}{N - N'}$ positivum seu $N < N'$; contra autem, si α sit negativum, debet $N > N'$.

Tertium porro intervallum est $\frac{N'C\alpha}{(N-N')Q}\left(1+\frac{N''i}{N'''}\right)$; quia hic Q est positivum, C negativum, requiritur, ut sit $-\frac{N'\alpha}{N-N'}$ positivum uti pro secundo intervallo; ita ut, si secundum intervallum fuerit positivum, tertium sponte evadat positivum.

Denique formula pro loco oculi $O=\frac{BC\alpha}{m^2M}$ etiam fit positiva sub conditionibus iisdem. Ex quibus sequitur, si lens prima sit ex vitro coronario, secunda vero ex crystallino sive $N'>N$, tunc debere esse α positivum seu $p>0$, $q<0$, $r>0$, $s>0$.

Sin autem primam lentem ex vitro crystallino, secundam vero ex coronario faciamus, ita ut sit $N'<N$, debebit esse α negativum ideoque $p<0$, $q>0$, $r>0$, $s>0$, quare pro utroque casu facile erit tertiam aequationem resolvere.

His conditionibus perpensis, quae etiam nunc locum habebunt, dummodo ω sit fractio quam minima, statuamus primum intervallum $\alpha\left(1-\frac{1}{P}\right)=\eta\alpha$ existente η fractione minima, sive positiva, si $\alpha>0$, sive negativa, si $\alpha<0$, eritque $P=\frac{1}{1-\eta}$; deinde maneat $\mathfrak{B}$ adhuc indefinita et quaeratur ω eritque

$$\mathfrak{B}\omega=\frac{-\eta}{(1-\eta)}\cdot\frac{(\omega+i+1)}{(m+1)};$$

in quo postremo factore ω tuto omittitur, ita ut hinc sit

$$\omega=\frac{-\eta}{(1-\eta)}\cdot\frac{i+1}{(m+1)\mathfrak{B}},$$

qui valor ob duplicem causam diminuitur: primo enim η est valde parvum, deinde ea dividitur per $m+1$, numerum satis magnum; porro vero tam $\mathfrak{B}$ quam $i+1$ ab unitate parum discrepant; quam ob causam valor ω recte pro evanescente haberi poterit; unde prima aequatio nobis dabit ut ante

$$0=N''i+\frac{N'''}{R} \quad \text{et} \quad R=\frac{-N'''}{N''i};$$

quem valorem siquis adhuc adcuratius desideret, erit

$$-\frac{1}{R}=\frac{N'\omega Q}{N'''}+\frac{N''i}{N'''},$$

ita ut nunc P et R sint quantitates cognitae; in primo termino utpote minimo sufficit Q proxime nosse, quem adeo ex casu praecedente desumere licet, quia

ω iam est definitum et $\mathfrak{B}$ mox definietur. Hinc igitur $Q = \frac{-m}{PR}$. Secunda aequatio iterum ut in casu praecedente proxime dabit ut ante $\mathfrak{B} = \frac{N'}{N}$; si quis eum vero exactius desideret, erit ei hac aequatione utendum:

$$\frac{N'}{\mathfrak{B}} = NP + \frac{N''}{B\mathfrak{C}Q} - \frac{N'''}{BCQR},$$

ubi pro B sufficit valorem prope verum nosse, nempe $B = \frac{N'}{N - N'}$. Tum vero habebitur

$$\mathfrak{C}i = \left(1 + \frac{m}{R}\right)\left(\frac{\omega + i + 1}{m + 1}\right) - \omega,$$

quem valorem manifestum est propter valorem ipsius R esse negativum ideoque etiam C. Quocirca conditiones praescriptae iisdem casibus implentur ut in praecedente, ubi $\omega = 0$, ita ut nunc tantum supersit aequationem tertiam resolvere, si modo meminerimus ob $\pi'' = \xi$ quartam lentem fieri debere aeque convexam, quae forma etiam tertiae lenti tribui deberet, si esset $i = 1$. Verum si sumeretur $i = 1$, unde haec lens fieret utrinque aeque convexa, ob $\mathfrak{C} = -2$ propemodum pro hac lente statui deberet

$$\lambda'' = 1 + N^2(1 - 2\mathfrak{C})^2 = 1 + N^2 \cdot 25,$$

ubi, ut ante sumsimus, est $N = \frac{\sigma - \varrho}{2\tau}$ [1]), sicque numerus λ'' satis magnum obtineret valorem; quod incommodum evitabimus sumendo $i < 1$ et plerumque sufficiet statuere $i = \frac{1}{2}$.

COROLLARIUM

276. Hic ergo differentia refractionis vitri tantum in duabus prioribus lentibus in considerationem venit ideoque sufficiet unicam tantum lentem ex vitro crystallino conficere et reliquas omnes ex vitro coronario; sicque duos tantum casus habebimus evolvendos, alterum, quo prima lens ex vitro crystallino conficitur, alterum, quo secunda.

---

1) Notandum est hoc in capite litteram N duplicem significationem habere: alteram $\frac{dn}{n-1}$, alteram $\frac{\sigma - \varrho}{2\tau}$. E. Ch.

CASUS 1

277. Sit igitur prima lens crystallina, reliquae omnes ex vitro coronario factae; erit $n = 1{,}58$ et $n' = n'' = n''' = 1{,}53$, tum vero secundum DOLLONDI experimenta $N = 10$, $N' = N'' = N''' = 7$. His positis et sumto $i = \frac{1}{2}$ erit α negativum ideoque etiam η. Sumatur autem $\eta = -0{,}03$; hinc ergo habebimus $P = \frac{1}{1{,}03} = \frac{100}{103}$, et quia erit proxime $\mathfrak{B} = \frac{7}{10}$ et $B = \frac{7}{3}$, invenimus $\omega = \frac{45}{721(m+1)}$.

Deinde, cum sit proxime $R = -2$ ideoque $Q = \frac{103\,m}{200}$, adcuratius habebimus

$$-\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{927\,m}{28840(m+1)} \quad \text{seu} \quad R = \frac{-28840(m+1)}{15347m + 14420}\,[1],$$

qui est valor correctus ipsius R, ex quo etiam adcuratius Q definiri poterit, scilicet $Q = \frac{-m}{PR}$.

Ut nunc etiam $\mathfrak{B}$ adcuratius definiatur, erit

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} = \frac{10\,P}{7} + \frac{3 \cdot 200}{7 \cdot 103\,m\,\mathfrak{C}} + \frac{3 \cdot 200}{7 \cdot 2 \cdot 103\,m\,C}.$$

Est vero

$$\mathfrak{C} = \left(1 + \frac{m}{R}\right)\left(\frac{3 + 2\omega}{m+1}\right) - 2\omega \quad \text{et} \quad C = \frac{\mathfrak{C}}{1 - \mathfrak{C}};$$

unde etiam B definiri potest.

His igitur valoribus definitis tertia aequatio principalis resolvi debet statuendo $\lambda''' = 1 + \left(\frac{\sigma - \varrho}{2\tau}\right)^2$, ut quarta lens aeque convexa utrinque reddatur. Pro tertia autem lente videtur statui posse $\lambda'' = 1$.

Denique inventis singulis litteris λ etiam singularum lentium constructio habebitur. Utemur autem methodo iam aliquoties usitata, scilicet pro casu quodam determinato, puta $m = 25$, deinde pro casu $m = \infty$ evolutionem instituamus indeque constructionem pro quacunque multiplicatione derivemus.

EXEMPLUM 1

278. Si prima lens ex vitro crystallino, tres sequentes autem ex coronario sint parandae, pro multiplicatione $m = 25$ constructionem telescopii investigare.

---

1) Editio princeps: $-\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{927\,m}{36050(m+1)}$ *seu* $R = \frac{-36050(m+1)}{18952m + 18025}$. Correxit E. Ch.

Sumto igitur $\eta = -0{,}03$, ut intervallum duarum priorum lentium fiat $-\frac{3\alpha}{100}$ ob α negativum, habemus statim

$$P = \frac{100}{103} = 0{,}97087, \quad \text{Log. } P = 9{,}9871628, \quad \text{hinc} \quad \omega = 0{,}00240,$$

deinde

$$R = \frac{-36050\cdot 26}{18952\cdot 25 + 18025}\,^{1)} \quad \text{seu} \quad R = \frac{-36050\cdot 26}{491825} = -1{,}90576,$$

$$\text{Log. } R = 0{,}2800680\ (-)$$

hincque

$$Q = 13{,}51160, \quad \text{Log. } Q = 1{,}1307092;$$

nunc pro $\mathfrak{C}$ inveniendo notetur esse

$$PQ = 13{,}11810, \quad \text{Log. } PQ = 1{,}1178720$$

hincque erit

$$\mathfrak{C} = -12{,}1181\frac{(3{,}00480)}{26} - 0{,}00480 \quad \text{seu} \quad \mathfrak{C} = -1{,}40528,$$

$$\text{Log. } \mathfrak{C} = 0{,}1477628\ (-)$$

hincque

$$C = -0{,}58425, \quad \text{Log. } C = 9{,}7665972\ (-).$$

Nunc denique pro B inveniendo nulla approximatione utamur, quia ob $\frac{1}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{B} + 1$ adcurate habemus

$$1 - \frac{1}{\mathfrak{C}Q} + \frac{1}{CQR} = \left(\frac{10}{7}P - 1\right)B$$

sive

$$1 + 0{,}05266 + 0{,}06647 = (1{,}38696 - 1)B$$

adeoque

$$1{,}11913 = 0{,}38696\,B$$

ideoque

$$B = 2{,}89210, \quad \text{Log. } B = 0{,}4612145,$$

consequenter

$$\mathfrak{B} = \frac{2{,}89210}{3{,}89210} = 0{,}74307, \quad \text{Log. } \mathfrak{B} = 9{,}8710305.$$

---

1) Vide notam p. 482; ob falsum valorem litterae R omnes sequentes de R dependentes valores (§§ 278—282) quoque falsi sunt; quos errores, cum sint tantum parvi nec magni momenti, corrigere neglegimus. E. Ch.

His valoribus definitis primo quaeramus nostra elementa ac reperiemus

$$b = -1{,}03000\,\alpha$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Log. } \dfrac{b}{\alpha} = 0{,}0128372\ (-) & \\
\text{Log. } B = \underline{0{,}4612145} & \\
\text{Log. } \dfrac{\beta}{\alpha} = 0{,}4740517\ (-) & \beta = -2{,}97887\,\alpha \\
\text{Log. } Q = \underline{1{,}1307092} & \\
\text{Log. } \dfrac{c}{\alpha} = 9{,}3433425 & c = +0{,}22046\,\alpha \\
\text{Log. } C = \underline{9{,}7665972}\ (-) & \\
\text{Log. } \dfrac{\gamma}{\alpha} = 9{,}1099397\ (-) & \gamma = -0{,}12880\,\alpha \\
\text{Log. } R = \underline{0{,}2800680}\ (-) & \\
\text{Log. } \dfrac{d}{\alpha} = 8{,}8298717\ (-) & d = -0{,}06759\,\alpha.
\end{array}$$

Hinc porro etiam distantias focales

$$p = \alpha, \quad q = -0{,}76536\,\alpha, \qquad \text{Log. } \frac{q}{\alpha} = 9{,}8838677\ (-)$$

$$r = -0{,}30982\,\alpha, \qquad \text{Log. } \frac{r}{\alpha} = 9{,}4911053\ (-)$$

$$s = -0{,}06759\,\alpha, \qquad \text{Log. } \frac{s}{\alpha} = 8{,}8298717\ (-).$$

Porro intervalla lentium erunt

$$\alpha + b = -0{,}03000\,\alpha, \quad \beta + c = -2{,}75841\,\alpha, \quad \gamma + d = -0{,}19639\,\alpha.$$

Distantia denique oculi ab ultima lente

$$O = -1{,}12480 \cdot \frac{m+1}{mm} \cdot \alpha$$

ideoque intervallum inter primam et ultimam lentem $= -2{,}98480\,\alpha$.

Tertiam iam consideremus aequationem, quae resoluta et per μ divisa pro hoc casu dabit

$$0 = \lambda - \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3 P} + \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\lambda''}{B^3 \mathfrak{C}^3 P Q} - \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\nu'}{B \mathfrak{B} P} + \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\nu'}{B^3 C \mathfrak{C} P Q} - \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\lambda'''}{B^3 C^3 P Q R},$$

ubi $\mu = 0{,}8724$ et $\mu' = 0{,}9875$ et $\nu' = 0{,}2196$, unde habebitur haec aequatio ad numeros reducta

$$0 = \lambda - 2{,}84162\lambda' + 0{,}00128\lambda''$$

$$(\text{Log. } 7{,}1080175)$$

$$- 0{,}00938\lambda''' + 0{,}11913$$

$$(\text{Log. } 7{,}9724463) + 0{,}00085.$$

Ut nunc hanc aequationem resolvamus, primo notandum est quartam lentem esse utrinque aeque convexam ideoque $\lambda''' = 1{,}60006$, unde, cum eius distantia focalis sit $s = -0{,}06759a$, erit radius utriusque faciei

$$= 1{,}06s = -0{,}07164a.$$

Pro tertia autem lente, cuius distantia focalis est $r = \mathfrak{C}c$, quia eius semidiameter aperturae esse debet $= \frac{1}{8}\mathfrak{C}c$, cui ergo quarta pars minoris radii aequalis esse debet, inde minor radius esse debet $\frac{1}{2}\mathfrak{C}c$, ex quo λ'' definiri oportet. Hunc in finem hanc lentem nunc definiamus. Eius autem radius anterioris faciei est

$$= \frac{c\gamma}{\rho\gamma + \sigma c \pm \tau(c+\gamma)\sqrt{(\lambda''-1)}} = \frac{Cc}{\rho C + \sigma \pm \tau(1+C)\sqrt{\lambda''-1}}$$

et radius faciei posterioris

$$= \frac{Cc}{\sigma C + \rho \pm \tau(1+C)\sqrt{\lambda''-1}},$$

ita ut habeamus

$$\text{radium faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{Cc}{1{,}5277 \mp 0{,}41575\tau\sqrt{\lambda''-1}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{Cc}{-0{,}7432 \pm 0{,}41575\tau\sqrt{\lambda''-1}},\end{cases}$$

ubi signa superiora valere debent; tum vero prior radius est minor ideoque ponatur $= \frac{1}{2}\mathfrak{C}c$; unde colligitur

$$\frac{C}{1{,}5277 - 0{,}41575\tau\sqrt{\lambda''-1}} = \frac{1}{2}\mathfrak{C}$$

sicque erit

$$0{,}41575\tau\sqrt{\lambda''-1} = 0{,}6961$$

adeoque

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{\gamma}{0,8316} = -0,15489\,\alpha \\ \text{posterioris} = \dfrac{\gamma}{-0,0471} = +2,73475\,\alpha,\end{cases}$$

cuius ergo lentis semidiameter aperturae erit $= 0,03872\,\alpha$; at ex valore ipsius x colligemus $\sqrt{(\lambda''-1)} = 1,80969$ hincque $\lambda'' = 4,27497$.

Nunc revertamur ad nostram aequationem, quae erit

$$0 = \lambda - 2,84162\lambda' - 0,00549 - 0,01501 - 0,11818;$$

quia nunc λ' unitate minus esse nequit, statuamus $\lambda' = 1$ eritque

$$\lambda = 2,98030, \quad \lambda - 1 = 1,98030 \quad \text{et} \quad \tau\sqrt{\lambda - 1} = 1,23484;$$

ex quo prima lens ita erit construenda:

$$F = \frac{\alpha}{\sigma \pm 1,23484} = \frac{\alpha}{0,3479} = 2,87439\,\alpha,$$

$$G = \frac{\alpha}{\varrho \mp 1,23484} = \frac{\alpha}{1,3762} = 0,72664\,\alpha.$$

Tandem pro secunda lente habemus

$$F = \frac{b\beta}{\varrho\beta + \sigma b} = \frac{Bb}{2,3157} = -1,28638\,\alpha,$$

$$G = \frac{b\beta}{\sigma\beta + \varrho b} = \frac{Bb}{5,0279} = -0,59247\,\alpha;$$

cuius minoris radii pars quarta seu $0,14812\,\alpha$ dat semidiametrum aperturae tam pro lente prima quam pro lente secunda. Quare hinc deducitur sequens constructio telescopii pro multiplicatione $m = 25$.

I. Pro lente prima, Flint Glass,

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = 2,87439\,\alpha \\ \text{posterioris} = 0,72664\,\alpha.\end{cases}$$

Semidiameter aperturae $= 0,14812\,\alpha$.

Intervallum ad secundam $= -0,03\,\alpha$.

II. Pro secunda lente, Crown Glass,

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = -1{,}28638\,\alpha \\ \text{posterioris} = -0{,}59247\,\alpha. \end{cases}$$

Semidiameter aperturae ut ante.
Intervallum $= -2{,}75841\,\alpha$.

III. Pro tertia lente, Crown Glass,

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = -0{,}15489\,\alpha \\ \text{posterioris} = +2{,}73475\,\alpha. \end{cases}$$

Semidiameter aperturae $= 0{,}03872\,\alpha$
Intervallum $= -0{,}19639\,\alpha$.

IV. Pro quarta lente, Crown Glass,
radius utriusque faciei $= -0{,}07164\,\alpha$.
Semidiameter aperturae $= 0{,}01791\,\alpha$.
Distantia ad oculum

$$= -1{,}1248 \cdot \frac{m+1}{m^2}\alpha, \quad \text{seu} \quad O = -1{,}1248\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{\alpha}{m}, \quad O = -0{,}04679\,\alpha,$$

ubi notandum est esse α negativum, ac si semidiametrum aperturae sumamus $= \frac{m}{50}$ dig. $= \frac{1}{2}$ dig., fiet $\alpha = -\frac{7}{2}$ dig. circiter vel maius et longitudo telescopii $= 10\frac{1}{2}$ dig. Denique semidiameter campi erit $\Phi = 49\frac{1}{2}$ minut. circiter.

EXEMPLUM 2

279. Si prima lens ex vitro crystallino, reliquae ex coronario sint parandae, pro multiplicatione maxima constructionem telescopii investigare.

Sit iterum $\eta = -0{,}03$; habebimus ut ante

$$P = 0{,}97087, \quad \text{Log.}\, P = 9{,}9871628;$$

tum vero $\omega = 0$ et

$$R = -\frac{28840}{15347} \quad \text{seu} \quad R = -1{,}87919, \quad \text{Log.}\, R = 0{,}2739707\,(-)^{1)},$$

1) Editio princeps: $R = -\frac{36050}{18952}$ *seu* $R = -1{,}90217$, Log. $R = 0{,}2792503\,(-)$. Vide praeterea notas p. 482 et 483. Correxit E. Ch.

$$Q = 0{,}54148m, \quad \text{Log.}\, \frac{Q}{m} = 9{,}7335868.$$

Porro

$$\mathfrak{C} = \frac{3}{R} = -1{,}57714, \quad \text{Log.}\, \mathfrak{C} = 0{,}1978710\,(-)$$

et

$$C = -0{,}61197, \quad \text{Log.}\, C = 9{,}7867330\,(-).$$

Pro B autem inveniendo habetur haec aequatio

$$1 - \frac{1}{\mathfrak{C}Q} + \frac{1}{CQR} = \left(\frac{10}{7}P - 1\right)B,$$

quae, quia termini per Q divisi evanescunt, abit in hanc

$$1 = 0{,}3869\,B, \quad \text{hinc} \quad B = 2{,}58464, \quad \text{Log.}\, B = 0{,}4124012$$

et

$$\mathfrak{B} = 0{,}72103, \quad \text{Log.}\, \mathfrak{B} = 9{,}8579557.$$

Hinc habebimus distantias determinatrices

$$b = -1{,}03000\,\alpha, \quad \text{Log.}\, \frac{b}{\alpha} = 0{,}0128371\,(-)$$

$$\beta = -2{,}66218\,\alpha, \quad \text{Log.}\, \frac{\beta}{\alpha} = 0{,}4252383\,(-)$$

$$c = +4{,}91645\frac{\alpha}{m}, \quad \text{Log.}\, c\cdot\frac{m}{\alpha} = 0{,}6916515$$

$$\gamma = -3{,}00874\frac{\alpha}{m}, \quad \text{Log.}\, \gamma\cdot\frac{m}{\alpha} = 0{,}4783845\,(-)$$

$$d = -1{,}58173\frac{\alpha}{m}, \quad \text{Log.}\, d\cdot\frac{m}{\alpha} = 0{,}1991342\,(-)$$

atque intervalla lentium

$$\alpha + b = -0{,}03000\,\alpha,$$

$$\beta + c = -2{,}66218\,\alpha + 4{,}91645\cdot\frac{\alpha}{m},$$

$$\gamma + d = -4{,}59047\cdot\frac{\alpha}{m}$$

et distantiam oculi post ultimam lentem

$$O = -1{,}05449\cdot\frac{\alpha}{m}\,{}^{1)},$$

1) Editio princeps: $O = -0{,}63269\cdot\frac{\alpha}{m}$. Correxit E. Ch.

vero distantias focales

$$p=\alpha,\quad q=-0{,}74267\,\alpha,\quad r=-7{,}75394\cdot\frac{\alpha}{m},\quad s=-1{,}58173\cdot\frac{\alpha}{m}.$$

Nunc igitur consideremus aequationem tertiam

$$0=\lambda-\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3P}-\frac{\mu'\nu'}{\mu\mathfrak{B}BP},$$
$$0=\lambda-3{,}11022\,\lambda'-0{,}13738,$$

sumto ut ante $\lambda'=1$ dat

$$\lambda=3{,}24760,\quad\text{hinc}\quad\lambda-1=2{,}24760\quad\text{et}\quad\tau\sqrt{\lambda-1}=1{,}31555,$$

lentium constructio sequenti modo expedietur:

I. Pro prima lente ex vitro crystallino

$$F=\frac{\alpha}{\sigma-1{,}31555}=\frac{\alpha}{0{,}2672}=3{,}74251\,\alpha,$$

$$G=\frac{\alpha}{\varrho+1{,}31555}=\frac{\alpha}{1{,}4569}=0{,}68639\,\alpha.$$

II. Pro secunda lente ex vitro coronario

$$F=\frac{b\beta}{\varrho\beta+\sigma b}=\frac{\beta}{2{,}2461}=-1{,}18525\,\alpha,$$

$$G=\frac{b\beta}{\sigma\beta+\varrho b}=\frac{\beta}{4{,}5175}=-0{,}58931\,\alpha.$$

III. Pro tertia lente ex Crown Glass

$$F=\frac{Cc}{C\varrho+\sigma\mp x},\qquad G=\frac{Cc}{C\sigma+\varrho\pm x},$$

$$F=\frac{\gamma}{1{,}5214\mp x},\qquad G=\frac{\gamma}{-0{,}7892\pm x}.$$

Cum nunc ut ante radius faciei anterioris fiat minor, is semissi di-
iae focalis $=\frac{1}{2}\mathfrak{C}c$ aequalis ponatur eritque

$$1{,}5214-x=\frac{2C}{\mathfrak{C}}=2(C+1)\quad\text{seu}\quad x=0{,}7454.$$

statim habetur

$$F=\frac{\gamma}{0{,}7760}=-3{,}87697\cdot\frac{\alpha}{m},\qquad G=\frac{\gamma}{-0{,}0438}=+68{,}69269\cdot\frac{\alpha}{m}.$$

erit $H = + 2,862$, ex quibus conficitur sequens constructio telescopii multiplicatione quacunque m.

I. Pro prima lente, Crystall Glass,

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = -3,742 \cdot a \quad 21,70 \cdot \dfrac{a}{m}\\[2ex] \text{posterioris} = -0,6864\, a + 1,005 \cdot \dfrac{a}{m}\end{cases}$$

Eius distantia focalis $= a$.

Semidiameter aperturae $= \frac{m}{50}$ dig.

Intervallum ad lentem secundam $= 0,03\, a$.

II. Pro secunda lente, Crown Glass,

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = 1,1853\, a \quad 2,52 \cdot \dfrac{a}{m}\\[2ex] \text{posterioris} = 0,5893\, a \quad 0,08 \cdot \dfrac{a}{m}\end{cases}$$

Distantia focalis $= 0,7427\, a \quad \frac{0,5665\, a}{m}$.

Semidiameter aperturae quoque $= \frac{m}{50}$ dig.

Intervallum ad tertiam $= 2,6622\, a \quad 2,998 \cdot \frac{a}{m} + \frac{14,88}{m} \cdot \frac{a}{m}$

III. Pro tertia lente, Crown Glass,

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = -3,8769 \cdot \dfrac{a}{m} + 0,114 \cdot \dfrac{a}{mm}\\[2ex] \text{posterioris} = +68,6929 \cdot \dfrac{a}{m} - 8,098 \cdot \dfrac{a}{mm}.\end{cases}$$

Distantia focalis $= -7,7539 \cdot \frac{a}{m} + 0,210 \cdot \frac{a}{mm}$,

cuius pars octava dat semidiametrum aperturae.

Intervallum ad quartam $= -4,5904 \cdot \frac{a}{m} - 7,984 \cdot \frac{a}{mm}$.

At distantia imaginis realis post hanc lentem

$$= \gamma = -3,0087 \cdot \frac{a}{m} - 5,288 \cdot \frac{a}{mm}.$$

IV. Pro quarta lente, Crown Glass,

$$\text{radius utriusque faciei} = 1{,}6766\cdot\frac{a}{m} - \frac{2{,}862\,a}{mm}.$$

Eius distantia focalis $= 1{,}5817\,\frac{a}{m} - \frac{2{,}70\,a}{mm}$,

cuius pars quarta dat semidiametrum aperturae.

Et intervallum ad oculum

$$O = 1{,}0545\cdot\frac{a}{m} - 2{,}8815\cdot\frac{a}{mm}.$$

Hinc totius telescopii longitudo erit

$$\begin{aligned}
= \quad & 0{,}03\,a - 2{,}998\,\frac{a}{m} + 14{,}88\,\frac{a}{mm}\\
& 2{,}6622\,a - 4{,}590\,\frac{a}{m} - 7{,}98\,\frac{a}{mm}\\
& \qquad\quad - 1{,}054\,\frac{a}{m} - 2{,}88\,\frac{a}{mm}\\
= \quad & 2{,}6922\,a - 8{,}642\,\frac{a}{m} + 4{,}02\,\frac{a}{mm}.^{1)}
\end{aligned}$$

Semidiameter vero campi apparentis erit $= \frac{1289}{m+1}$ minut.

Hic vero notandum est a esse negativum, cuius valor definietur ex radio posteriore lentis secundae, cuius pars quarta $= 0{,}1473\,a$ seu circiter $= -\frac{1}{7}\,a$ ipsi $\frac{m}{50}$ aequalis posita dabit $a = -\frac{7m}{50}$; statui igitur poterit $a = -\frac{m}{7}$.

COROLLARIUM

281. Si igitur statuamus $a = -\frac{m}{7}$, habebitur sequens constructio determinata telescopii in ratione $m:1$ multiplicantis.

I. Pro prima lente, Flint Glass,

$$\text{radius faciei in digitis}\begin{cases}\text{anterioris} = -0{,}5346\,m + 3{,}10\\ \text{posterioris} = -0{,}0981\,m - 0{,}14.\end{cases}$$

---

1) Editio princeps: $= -2{,}6922\cdot a - 8{,}220\,\frac{a}{m} - 0{,}30\cdot\frac{a}{mm}$. Vide notas p. 482–491. E. Ch.

Distantia focalis $= \frac{m}{7}$

Semidiameter aperturae $= \frac{m}{50}$

Intervallum $= 0,0043\,m$.

II. Pro secunda lente, Crown Glass,

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = +\,0,1693\,m + 0,36\\ \text{posterioris} & = +\,0,0842\,m + 0,01\end{cases}$$

Distantia focalis $= +\,0,1061\,m + 0,081$

Semidiameter aperturae $= \frac{m}{50}$

Intervallum $= +\,0,3803\,m + 0,43 \quad \frac{2,12}{m}$

III. Pro tertia lente, Crown Glass,

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = +\,0,55 \quad \frac{0,02}{m}\\ \text{posterioris} & = \quad 9,81 + \frac{1,16}{m}\end{cases}$$

Distantia focalis $= +\,1,11 \quad \frac{0,03}{m}$.

Intervallum $= 0,66 + \frac{1,14}{m}$.

Distantia imaginis realis post hanc lentem

$$= 0,43 + \frac{0,75}{m}.$$

IV. Pro quarta lente, Crown Glass,

radius utriusque faciei $= +\,0,24 + \frac{0,41}{m}$.

Distantia focalis $= 0,23 + \frac{0,4}{m}$.

Semidiameter aperturae $= 0,06 + \frac{0,1}{m}$.

Intervallum usque ad oculum $= 0,15 + \frac{0,4}{m}$

et tota telescopii longitudo

$$= 0{,}3846\, m + 1{,}23 - \frac{0{,}6}{m}$$

et semidiameter campi $= \frac{1289}{m+1}$ minut.

SCHOLION

282. Haec itaque telescopia multo fiunt longiora quam ea, quae praecedente capite sunt inventa, pro eadem utrinque multiplicatione. Hic enim pro multiplicatione $m = 100$ prodit longitudo $= 40$ dig., dum in praecedente capite sufficiebat longitudo $= 13\frac{1}{3}$ dig., hoc est triplo minor. Hic igitur merito quaeritur, utrum qualitas, qua etiam spatium diffusionis a diversa radiorum refrangibilitate oriundae ad nihilum redigitur, tanti sit habenda, ut longitudo telescopii triplicetur, quae quaestio non nisi per praxin diiudicari poterit, quae autem eo erit difficilior, quo minus accuratissimam exsecutionem horum praeceptorum exspectare licet. Quocirca nisi haec conditio praescripta felicissime succedat, semper praestabit telescopia praecedentis capitis praeferre, ita ut duplici vitri specie carere possimus. Ceterum in evolutione casus secundi huiusmodi evolutionibus numericis non immorabimur, cum quia methodus tales calculos tractandi iam satis est explicata, tum vero quia propositum est huic operi singularem librum subiungere, in quo sola praecepta pro praxi dirigenda in gratiam artificum colligentur.[1]

CASUS 2

283. Sit iam secunda lens ex vitro crystallino, reliquae vero ex vitro coronario, ita ut sit $n' = 1{,}58$ et $n = n'' = n''' = 1{,}53$ indeque etiam $N = N'' = N'''$, et ponatur $\frac{N'}{N} = \zeta$, ut sit secundum Dollondum $\zeta = \frac{10}{7}$. His positis et sumto $i = \frac{1}{2}$ erit α positivum ideoque etiam η. Sumatur igitur $\eta = 0{,}03$, unde habebimus $P = \frac{1}{1-\eta}$. Quia nunc, ut vidimus, est $\mathfrak{B} = \zeta$ proxime, erit

$$\omega = \frac{-\eta}{1-\eta} \cdot \frac{i+1}{(m+1)\zeta} = \frac{-9}{194\,\zeta(m+1)}.$$

Deinde, cum sit proxime $R = -2$ ideoque $Q = \frac{m}{2P}$, ubi $P = +\frac{100}{97}$, adcura-

1) Vide Opus 446 (indicis Enestroemiani): *Instruction détaillée pour porter les lunettes de toutes les différentes espèces au plus haut degré de perfection dont elles sont susceptibles tirée de la théorie dioptrique de M. Euler le père et mise à la portée de tous les ouvriers en ce genre par Nicolaus Fuss.* St.-Pétersbourg 1774; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series III, vol. 6. E. Ch.

tius habebimus ex prima aequatione

$$0 = \zeta Q m + 1 + \frac{1}{R},$$

quae abit in hanc

$$-\frac{1}{R} = \frac{1}{2} - \frac{9m}{388P(m+1)} \quad \text{seu} \quad \frac{1}{R} = -\frac{1}{2} + \frac{9m}{400(m+1)},$$

ex quo etiam Q adcuratius definiri potest, cum sit $Q = \frac{m}{PR}$.

Ut nunc etiam $\mathfrak{B}$ adcuratius definiatur, colligimus ex aequatione secunda [§ 275]

$$0 = 1 - \frac{\zeta}{\mathfrak{B}P} + \frac{1}{B\mathfrak{C}PQ} - \frac{1}{BCPQR},$$

quae ob $\frac{1}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{B} + 1$ dabit

$$-B(\zeta - P) = \zeta - \frac{1}{\mathfrak{C}Q} + \frac{1}{CQR}.$$

Erat autem proxime $B = \frac{-\zeta}{\zeta - 1}$ idoque negativum. Ex valore porro adcurato ipsius B erit $\mathfrak{B} = \frac{B}{B+1}$.

His igitur definitis tertia aequatio erit

$$0 = \lambda - \frac{\mu'\lambda'}{\mu\mathfrak{B}^3P} + \frac{\lambda''}{B^3\mathfrak{C}^3PQ} - \frac{\lambda'''}{B^3C^3PQR} - \frac{\mu'\nu'}{\mu B\mathfrak{B}P} + \frac{\nu}{B^3C\mathfrak{C}PQ}.$$

Hic duo primi termini utpote valde magni dabunt proxime $\lambda' = \frac{\mu}{\mu'}\mathfrak{B}^3P\lambda$, unde intelligere licet pro lente concava eius valorem λ maiorem prodire quam casu primo, ita ut casus primus ad praxin sit aptior iudicandus.

Ut nunc etiam de longitudine telescopii iudicare possimus, quia praecedente casu ea nimis magna prodierat, considerari debet eius pars praecipua, quae est littera β, cuius valor ante fuerat $= -2,6622\alpha$ circiter, qui autem nunc ob $\beta = \frac{-B\alpha}{P}$ et $B = \frac{-\zeta}{\zeta - 1}$ proxime seu $B = -\frac{10}{3}$ et $P = 1$ reperitur $\beta = \frac{10}{3}\alpha = 3,33\alpha$, ita ut telescopia hinc nata adhuc fiant longiora, quae propterea hic fusius evolvere operae non erit pretium.

SCHOLION

284. Quia longitudo telescopii, quae hinc tanta resultat, perfectioni non parum obstat, disquirendum est, utrum huic incommodo non aliquod remedium adferri possit, quod autem ex hypothesi hic facta, qua lens obiectiva

quasi ex duabus lentibus constare est assumta, neutiquam sperare licet. Quamobrem lentem obiectivam quasi ex tribus lentibus constantem assumi conveniet, quarum vel una vel duae sint concavae et ex vitro crystallino formatae. Ne autem novam investigationem circa maiorem campum suscipere cogamur, hic statim quoque tres lentes quasi oculares introducamus, ut hoc modo, si negotium successerit, non solum breviora telescopia obtineantur, sed etiam simul campus apparens notabile incrementum accipiat.

PROBLEMA 3

285. *Si tres lentes priores ad obiectivam constituendam referantur, tum vero tres quasi lentes oculares adiungantur, definire momenta ad telescopii constructionem necessaria.*

SOLUTIO

Cum igitur hic occurrant sex lentes, statuamus

$$\frac{\alpha}{b} = -P, \quad \frac{\beta}{c} = -Q, \quad \frac{\gamma}{d} = -R, \quad \frac{\delta}{e} = -S, \quad \frac{\varepsilon}{f} = -T,$$

ut sint nostra elementa

$$b = -\frac{\alpha}{P}, \quad c = \frac{B\alpha}{PQ}, \quad d = \frac{-BC\alpha}{PQR}, \quad e = \frac{BCD\alpha}{PQRS} \quad \text{et} \quad f = \frac{-BCDE\alpha}{PQRST},$$

$$\beta = \frac{-B\alpha}{P}, \quad \gamma = \frac{BC\alpha}{PQ}, \quad \delta = \frac{-BCD\alpha}{PQR}, \quad \varepsilon = \frac{BCDE\alpha}{PQRS}$$

adeoque distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = \frac{-\mathfrak{B}\alpha}{P}, \quad r = \frac{B\mathfrak{C}\alpha}{PQ}, \quad s = \frac{-BC\mathfrak{D}\alpha}{PQR}, \quad t = \frac{BCD\mathfrak{E}\alpha}{PQRS}, \quad u = \frac{-BCDE\alpha}{PQRST},$$

existente $m = -PQRST$.

Horum iam numerorum P, Q, R, S, T unicus debet esse negativus; intervalla autem lentium ita exprimentur

$$\alpha + b = \alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right), \quad \beta + c = \frac{-B\alpha}{P}\left(1 - \frac{1}{Q}\right), \quad \gamma + d = \frac{BC\alpha}{PQ}\left(1 - \frac{1}{R}\right),$$

$$\delta + e = \frac{-BCD\alpha}{PQR}\left(1 - \frac{1}{S}\right) \quad \text{et} \quad \varepsilon + f = \frac{BCDE\alpha}{PQRS}\left(1 - \frac{1}{T}\right),$$

quod ultimum intervallum ob $\varepsilon = -Tf$ etiam ita exhibetur $\varepsilon + f = f(1-T)$; unde, quia f debet esse quantitas positiva, statim patet esse debere $T < 1$.

Quia nunc tres priores lentes exiguis intervallis a se invicem distare debent, statuamus utrumque intervallum $= \eta\alpha$ hincque habebimus

$$P = \frac{1}{1-\eta} \quad \text{et} \quad Q = \frac{B}{B+\eta P}.$$

Nunc vero, cum sit campi semidiameter

$$\Phi = \frac{\pi - \pi' + \pi'' - \pi''' + \pi''''}{m+1},$$

statuamus

$$\pi = \omega\xi, \quad \pi' = -\omega'\xi, \quad \pi'' = i\xi, \quad \pi''' = -\xi \quad \text{et} \quad \pi'''' = \xi,$$

ita ut sit

$$\Phi = \frac{\omega + \omega' + i + 2}{m+1}\xi = M\xi,$$

existente

$$M = \frac{\omega + \omega' + i + 2}{m+1} \quad \text{seu proxime} \quad M = \frac{i+2}{m+1}$$

ob ω et ω' fractiones minimas, ut mox videbimus. Hincque ob $\frac{\pi''''}{\Phi} = \frac{1}{M}$ statim oritur distantia oculi

$$O = \frac{1}{M} \cdot \frac{u}{m} = \frac{m+1}{m(i+2)} \cdot u.\text{[1]}$$

Porro considerari oportet sequentes aequationes:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}\omega &= (1-P)M,\\
\mathfrak{C}\omega' &= (1-PQ)M - \omega,\\
\mathfrak{D}i &= (1-PQR)M - \omega' - \omega,\\
\mathfrak{E} &= (1-PQRS)M - \omega' - \omega - i.
\end{aligned}$$

Ex harum aequationum duabus primis quaerantur particulae ω et ω', scilicet

$$\omega = \frac{(1-P)M}{\mathfrak{B}} = \frac{-\eta M}{(1-\eta)\mathfrak{B}},$$

$$\omega' = \frac{(1-PQ)M - \omega}{\mathfrak{C}}$$

[1] Editio princeps: $O = \frac{1}{M} \cdot \frac{t}{m} = \frac{m+1}{m(i+2)} \cdot t$. Correxit E. Ch.

seu

$$\omega' = \frac{\eta(1-B)M}{(B+1-B\eta)\mathfrak{C}} + \frac{\eta M}{(1-\eta)\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$$

seu

$$\omega' = \frac{\eta M}{\mathfrak{C}}\left(\frac{2B+\eta(1-B)}{(B+\eta(1-B))(1-\eta)B}\right);$$

quare, cum η sit fractio valde parva, erit proxime

$$\omega = \frac{-\eta M}{\mathfrak{B}}, \quad \omega' = \frac{2\eta M}{B\mathfrak{C}}$$

atque litterae $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ etiamnunc manent indeterminatae, dum sequentes $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ per formulas hic allatas determinantur.

Nunc igitur considerentur tres aequationes, quas adimpleri oportet

$$\text{I. } 0 = i + \frac{N'\omega}{P} + \frac{N''\omega'}{PQ} + \frac{N'''i}{PQR} + \frac{N''''}{PQRS} + \frac{N'''''}{PQRST}$$

$$\text{II. } 0 = N - \frac{N'}{\mathfrak{B}P} + \frac{N''}{B\mathfrak{C}PQ} - \frac{N'''}{BC\mathfrak{D}PQR} + \frac{N''''}{BCD\mathfrak{E}PQRS} - \frac{N'''''}{BCDE\mathfrak{F}PQRST}$$

$$\text{III. } 0 = \mu\lambda - \frac{\mu'}{\mathfrak{B}P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu'}{B}\right) + \frac{\mu''}{B^2\mathfrak{C}PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2} + \frac{\nu''}{C}\right)$$

$$- \frac{\mu'''}{B^2C^2\mathfrak{D}PQR}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^2} + \frac{\nu'''}{D}\right) + \frac{\mu''''}{B^2C^2D^2\mathfrak{E}PQRS}\left(\frac{\lambda''''}{\mathfrak{E}^2} + \frac{\nu''''}{E}\right) - \frac{\mu'''''\lambda'''''}{B^2C^2D^2E^2PQRST}.$$

In prima autem aequatione duo membra priora prae sequentibus manifesto sunt valde parva, dum etiam per ω multiplicata adhuc multo minora manent sequentibus. Iis omissis habebitur

$$0 = N'''i + \frac{N''''}{S} + \frac{N'''''}{ST},$$

ubi, quia tres posteriores lentes ex eadem vitri specie fieri convenit, erit

$$0 = iST + T + 1;$$

unde patet vel S vel T esse debere quantitatem negativam. Hanc ob rem statuatur $S = -K$, ut unica harum lentium ante imaginem realem cadat, unde fiet $K = \frac{T+1}{iT}$; ante autem iam vidimus esse $T < 1$ ideoque $K > 2$ ob $i < 1$, et si $i = \frac{1}{2}$, fiet adeo $K > 4$; ex quo erit

CASUS 1

286. Quo prima lens est crystallina, secunda et tertia vero ex vitro coronario est parata. Erit ergo $N = 10$, $N' = 7$ et $N'' = 7$ adeoque primo

$$\mathfrak{C} = \frac{7(1-\mathfrak{B})}{7-10\mathfrak{B}} \quad \text{et} \quad C = \frac{7(1-\mathfrak{B})}{3\mathfrak{B}}$$

ideoque

$$B\mathfrak{C} = \frac{7\mathfrak{B}}{7-10\mathfrak{B}} \quad \text{et} \quad BC = \frac{7}{3};$$

hinc ergo fit $\gamma = -\frac{7}{3}\alpha$, unde evidens est sumi debere α negativum; qui valor cum non minor sit quam in problemate praecedente, hunc casum ulterius non prosequimur.

CASUS 2

287. Quo lens secunda est crystallina, prima vero et tertia ex vitro coronario; erit $N = 7$, $N' = 10$, $N'' = 7$ atque hinc

$$C = \frac{7(1-\mathfrak{B})}{3} \quad \text{adeoque} \quad BC = \frac{7}{3}\mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{7(1-\mathfrak{B})}{10-7\mathfrak{B}} \quad \text{et} \quad B\mathfrak{C} = \frac{7\mathfrak{B}}{10-7\mathfrak{B}},$$

unde fit $\gamma = \frac{7}{3}\mathfrak{B}\alpha$. Quo igitur telescopium contrahatur, sumi debet $\mathfrak{B} < 1$; tum vero erit B positivum; at ex tertia aequatione habebimus

$$0 = \mu\lambda - \frac{\mu'\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\mu''\lambda''}{B^3\mathfrak{C}^3}$$

sive

$$0 = \mu\lambda - \frac{\mu'\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\mu\lambda''(10-7\mathfrak{B})^3}{7^3\mathfrak{B}^3},$$

unde fit

$$\frac{\mu'\lambda'}{\mu} = \mathfrak{B}^3\lambda + \frac{(10-7\mathfrak{B})^3\lambda''}{7^3};$$

hic ergo videamus, an litterae λ et λ' et λ'' possint ad unitatem redigi; ad quod requiritur, ut sit

$$\frac{\mu'}{\mu} = \mathfrak{B}^3 + \left(\frac{10}{7} - \mathfrak{B}\right)^3,$$

cuius evolutio ob $\frac{\mu'}{\mu}$ propemodum $= 1$ dat

$$\left(\frac{10}{7}\right)^3 - 3\left(\frac{10}{7}\right)^2\mathfrak{B} + 3\left(\frac{10}{7}\right)\mathfrak{B}^2 = 1,$$

cuius radices sunt prior $\mathfrak{B} = 0{,}97$, qua autem hic nihil in longitudine lucramur, altera vero $\mathfrak{B} = 0{,}46$ sive $\mathfrak{B} = \frac{5}{11}$ hocque modo fiet $\gamma = \frac{7}{6}\alpha$, quod insigne lucrum est; qui ergo casus imprimis meretur, ut adcuratius evolvatur.

CASUS 3

288. Sit nunc tertia lens crystallina, prima et secunda ex vitro coronario, ut sit $N = 7$, $N' = 7$, at $N'' = 10$. Hinc igitur sequitur

$$\mathfrak{C} = \frac{10(1-\mathfrak{B})}{7-7\mathfrak{B}} = \frac{10}{7}, \quad C = -\frac{10}{3}$$

indeque

$$B\mathfrak{C} = \frac{10}{7}B \quad \text{et} \quad BC = -\frac{10}{3}B,$$

unde fit $\gamma = -\frac{10}{3}B\alpha$. Deberet ergo esse $-B < 1$ vel $B > -1$, hinc $\mathfrak{B} < 1$. Hinc ergo tertia aequatio unitate loco cuiuslibet λ scripta erit

$$0 = 1 - \frac{1}{\mathfrak{B}^3} + \frac{343(1-\mathfrak{B})^3}{1000\mathfrak{B}^3}$$

seu

$$0 = \mathfrak{B}^3 - 1 + \frac{343}{1000}(1-\mathfrak{B})^3$$

seu

$$0 = -657 - 1029\mathfrak{B} + 1029\mathfrak{B}^2 + 657\mathfrak{B}^3,$$

qui ergo casus etiam evolutione dignus videtur.

CASUS 4

289. Si prima et secunda lens sint crystallinae et tertia coronaria, erit $N' = N = 10$ et $N'' = 7$; hincque

$$\mathfrak{C} = \frac{7(1-\mathfrak{B})}{10(1-\mathfrak{B})} = \frac{7}{10} \quad \text{et} \quad C = \frac{7}{3}$$

hincque

$$BC = \frac{7B}{3}.$$

Nunc, quia est α negativum, γ autem positivum, debet esse $\gamma = +\frac{7}{3}B\alpha$. Ponamus nunc $\frac{7}{3}B = -1$, erit $B = -\frac{3}{7}$ et $\mathfrak{B} = -\frac{3}{4}$ et $B\mathfrak{C} = -\frac{3}{10}$, unde tertia aequatio fiet

$$0 = \lambda + \frac{\lambda' 4^3}{3^3} - \frac{\mu''}{\mu} \cdot \frac{\lambda'' 10^3}{3^3},$$

ita ut esse debeat

$$\lambda + \frac{64\lambda'}{27} = \frac{\mu''}{\mu} \cdot \frac{1000\lambda''}{27} + \text{etc.},$$

quod cum fieri nequeat, nisi pro λ et λ' numeri maximi accipiantur, hic casus nullo modo in praxi admitti potest.

CASUS 5

290. Sint prima et tertia lens crystallinae, secunda ex vitro coronario; erit $N = N'' = 10$ et $N' = 7$ adeoque

$$\mathfrak{C} = \frac{10(1-\mathfrak{B})}{7-10\mathfrak{B}} \quad \text{et} \quad C = -\frac{10(1-\mathfrak{B})}{3},$$

hinc

$$BC = -\frac{10}{3}\mathfrak{B} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{10}{3}\mathfrak{B}\alpha.$$

Ponatur ergo $\frac{10}{3}\mathfrak{B} = 1$ eritque $\mathfrak{B} = \frac{3}{10}$ et $B = \frac{3}{7}$ et $B\mathfrak{C} = \frac{3}{4}$; unde aequatio tertia dabit

$$0 = \lambda - \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\lambda' 1000}{27} + \frac{64\lambda''}{27} \quad \text{seu} \quad \lambda + \frac{64\lambda''}{27} = \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{1000\lambda'}{27} + \text{etc.},$$

quae aeque parum ad praxin est idonea.

CASUS 6

291. Sint secunda et tertia lens crystallinae, prima ex vitro coronario confecta; erit $N = 7$ et $N' = N'' = 10$, unde colligitur

$$\mathfrak{C} = \frac{10(1-\mathfrak{B})}{10-7\mathfrak{B}} \quad \text{et} \quad C = \frac{10(1-\mathfrak{B})}{3\mathfrak{B}}$$

hincque

$$BC = \frac{10}{3} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{10}{3}\alpha,$$

qui ergo casus iam sponte cadit.

EVOLUTIO ULTERIOR CASUS SECUNDI

292. Quod ad valorem litterae η attinet, pro quavis multiplicatione m, quae lentis obiectivae aperturam postulat, cuius semidiameter sit circiter $\frac{m}{50}$ dig., sumamus accipi $\alpha = \frac{m}{6}$ dig., quia lens plerumque fere est plano-convexa, eritque huius lentis crassities circiter $\frac{1}{64}\alpha$; quare, si intervallum binarum lentium priorum statuamus $\frac{1}{50}\alpha$, metuendum non est, ne duae lentes se mutuo tangant, sed satis relinquetur spatii, ut etiam quodammodo moveri possint. Ponamus ergo $\eta = \pm \frac{1}{50} = \pm 0{,}02$.

Quia nunc prima lens est ex vitro coronario ideoque convexa, erit α positivum et $\eta = + \frac{1}{50} = + 0{,}02$. Hinc reperimus statim

$$P = \frac{50}{49} \quad \text{et} \quad Q = \frac{49\,B}{49\,B+1},$$

ubi de B infra dispiciemus. Hic notasse sufficiat esse proxime $Q = 1$ et $P = 1$.

His praemissis sumta fractione $i = \frac{1}{2}$ et $T = \frac{1}{2}$, quandoquidem esse debet $T < 1$, prima aequatio nostra dabit $K = 6 = -S$ et ob $PQ = 1$ proxime $B = \frac{1}{2}m$; neque opus est, ut hic valor accuratius eruatur.

Secunda autem aequatio, cui pariter proxime tantum satisfecisse sufficit, quia hoc casu est $N = 7$, $N' = 10$, $N'' = N''' = N'''' = N''''' = 7$, nobis praebet

$$0 = 7 - \frac{10}{\mathfrak{B}P} + \frac{7}{B\mathfrak{C}PQ},$$

quae sumto $P = 1$ et $PQ = 1$ dat

$$\mathfrak{C} = \frac{-7(1-\mathfrak{B})}{(7\mathfrak{B}-10)} = \frac{7(1-\mathfrak{B})}{10-7\mathfrak{B}}$$

indeque

$$C = \frac{7(1-\mathfrak{B})}{3} \quad \text{et} \quad BC = \frac{7\mathfrak{B}}{3}.$$

Cum dein ex primis elementis sit $\gamma = \frac{BC\alpha}{PQ}$, quae distantia praecipuam partem totius longitudinis continet, faciamus $\gamma = \alpha$ sive proxime saltem $= \alpha$ adeoque $BC = 1$; unde sequitur $\frac{7}{3}\mathfrak{B} = 1$ et $\mathfrak{B} = \frac{3}{7}$, unde porro

$$B = \frac{3}{4}, \quad \mathfrak{C} = \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad C = \frac{4}{3}$$

ideoque $B\mathfrak{C}=\frac{3}{7}$. Nunc ex valore B invento habebimus praeter $P=\frac{50}{49}$ etiam $Q=\frac{147}{151}$ et $PQ=\frac{150}{151}$ sicque adcurate iam erit $R=\frac{151\,m}{3\cdot 150}$.

Nunc igitur ad aequationem tertiam progrediamur:

$$0=\lambda-\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3P}+\frac{\lambda''}{B^3\mathfrak{C}^3PQ}-\frac{\mu'\nu'}{\mu}\cdot\frac{1}{B\mathfrak{B}P}+\frac{\nu}{B^3C\mathfrak{C}PQ}-\frac{\lambda'''}{B^3C^3\mathfrak{D}^3PQR}$$
$$+\frac{\lambda''''}{B^3C^3D^3\mathfrak{E}^3PQRS}-\frac{\nu}{B^3C^3D\mathfrak{D}PQR}+\frac{\nu}{B^3C^3D^3E\mathfrak{E}PQRS}+\frac{\lambda'''''}{B^3C^3D^3E^3m};$$

quae ut in numeros evolvi possit, ante necesse est valores litterarum D et E investigare, qui ex formulis supra datis inveniuntur:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{D}=(1-PQR)M \quad \text{seu} \quad \mathfrak{D}=\left(1-\frac{1}{3}m\right)\frac{5}{m+1}=-\frac{5}{3}$$

ob m ut valde magnum assumtum, praecipue cum $\mathfrak{D}$ tantum occurrat in numeris per se minimis; adeoque $D=-\frac{5}{8}$. Simili modo erit

$$\mathfrak{E}=\frac{5(1+2m)}{2(m+1)}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2} \quad \text{et} \quad E=\frac{-9}{7}.$$

His igitur valoribus substitutis habebimus

$$\begin{aligned}0=\lambda-\underset{(1,0413348)}{10,9985\,\lambda'}+\underset{(1,1068156)}{12,7884\,\lambda''}-\underset{(9,8332690)}{0,68119}+\underset{(9,8374334)}{0,68775}\end{aligned}$$
$$+\underset{(9,8115752)}{\frac{0,64800\,\lambda'''}{m}}+\underset{(8,3516924)}{\frac{0,02247\,\lambda''''}{m}}-\underset{(9,8010248)}{\frac{0,63245\,^{1)}}{m}}-\underset{(8,8906053)}{\frac{0,07773\,^{1)}}{m}}$$
$$\underset{(0,2849264)}{\frac{+1,92720\,\lambda'''''}{m}}$$

ex qua aequatione, si sumatur $\lambda=1$ et $\lambda''=1$, colligitur

$$\begin{aligned}\lambda'=\;&0,09092+0,0589\,\lambda''':m-\frac{0,06457}{m}\\&+1,16275+0,0020\,\lambda'''':m\\&\underline{+0,00060+0,1752\,\lambda''''':m}\\&\;\;1,25427\end{aligned}$$

1) Editio princeps: $\frac{-0,368245}{m}+\frac{0,07773}{m}$. Correxit E. Ch.

Circa litteras λ''', λ'''', λ''''' observandum est, quia binae postremae ple[n]
aperturam admittere debent, esse debere

$$\lambda''''' = 1{,}60006 \quad \text{et} \quad \lambda'''' = 1 + 0{,}60006(1 - 2\mathfrak{E})^2 = 1 + 0{,}60006 . 64,$$

unde hae duae lentes statim computari possunt.

Pro quarta autem lente in ipso radiorum calculo valor numeri λ''' [de]finiatur. Tum vero lens prima et tertia quoque per calculum determinan[tur]. Quo facto quaeratur valor ipsius λ'; qui cum etiam m involvat, primo [pro] valore determinato ipsius m, v. g. $m = 25$, deinde pro $m = \infty$ radii facie[s] huius lentis investigentur ex iisque pro multiplicatione quacunque eor[um] valores concludantur, ut iam supra aliquoties est factum.

Intervalla autem lentium cum distantiis focalibus sequenti modo [se] habebunt:

$$b = 0{,}98\,\alpha, \quad \beta = -0{,}73500\,\alpha, \quad \log.(-\beta) = 9{,}8662874,$$

$$c = 0{,}75500\,\alpha, \quad \gamma = 1{,}00667\,\alpha, \quad \log.\gamma = 0{,}0028856,$$

$$d = \frac{3\alpha}{m}, \quad \delta = +\frac{1{,}875\alpha}{m},$$

$$e = +\frac{0{,}3125\,\alpha}{m}, \quad \varepsilon = -\frac{0{,}40178\,\alpha}{m}, \quad f = +\frac{0{,}80357\,\alpha}{m}$$

et distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = -0{,}42000\,\alpha, \quad r = 0{,}43143\,\alpha,$$

$$s = \frac{5\alpha}{m}, \quad t = +\frac{1{,}40625\,\alpha}{m}, \quad u = \frac{0{,}80357\,\alpha}{m}.$$

Hincque intervalla lentium

$$\alpha + b = 0{,}02\,\alpha, \quad \beta + c = 0{,}0200\,\alpha, \quad \gamma + d = 1{,}00667\,\alpha - \frac{3\alpha}{m},$$

$$\delta + e = \frac{2{,}1875\,\alpha}{m}, \quad \varepsilon + f = \frac{0{,}40179\,\alpha}{m}$$

et pro loco oculi $O = 0{,}8214 \cdot \frac{\alpha}{m}$[1]).

1) Editio princeps: $O = 0{,}5626 \cdot \frac{\alpha}{m}$. Correxit E. Ch.

CONSTRUCTIO LENTIUM

Investigemus primo constructionem pro singulis lentibus ex vitro coronario parandis positisque pro quavis lente

$$\text{radiis faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = F \\ \text{posterioris} = G. \end{cases}$$

Haec determinatio sequenti modo se habebit:

I. Pro prima lente ob $\lambda = 1$ reperietur

$$F = \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha}{1,6601} = 0,60237\,\alpha, \qquad G = \frac{\alpha}{\varrho} = \frac{\alpha}{0,2267} = 4,41111\,\alpha.$$

II. Pro tertia lente ob $\lambda'' = 1$ erit

$$F = \frac{c\gamma}{\gamma\varrho + c\sigma} = \frac{Cc}{C\varrho + \sigma} = \frac{\gamma}{C\varrho + \sigma}, \qquad G = \frac{c\gamma}{\gamma\sigma + c\varrho} = \frac{Cc}{C\sigma + \varrho} = \frac{\gamma}{C\sigma + \varrho},$$

$$F = \frac{\gamma}{0,9624} = 0,51298\,\alpha, \qquad G = \frac{\gamma}{2,4401} = 0,41255\,\alpha.$$

III. Pro quarta lente ob λ''' etiamnunc incognitum ponatur brevitatis gratia

$$\tau(1 + D)\sqrt{(\lambda''' - 1)} = x$$

eritque

$$F = \frac{\delta}{D\varrho + \sigma \pm x}, \qquad G = \frac{\delta}{\varrho + D\sigma \mp x}$$

adeoque

$$F = \frac{\delta}{1,5184 \pm x}, \qquad G = \frac{\delta}{-0,8109 \mp x}.$$

Ut nunc haec lens aperturam $\frac{1}{2}\xi$ admittat, hoc eveniet, si posterior facies fuerit plana seu denominator $= 0$; valeant igitur signa inferiora et ponatur $x = 0,8109$, unde fiet

$$G = \infty \quad \text{et} \quad F = \frac{\delta}{0,7075} \quad \text{seu} \quad F = \frac{2,650\,\alpha}{m},$$

uti debet esse, quia $F = (n - 1)5\frac{\alpha}{m}$.

Cum igitur sit

$$\tau(1 + D)\sqrt{(\lambda''' - 1)} = 0,8109,$$

erit

$$\sqrt{\lambda''' - 1} = \frac{0,8109}{0,3469} \quad \text{hincque} \quad \lambda''' = 6,4642.$$

IV. Pro quinta lente est $\lambda'''' = 39{,}40384$, et quia haec lens est utrinque aeque convexa, erit

$$\text{radius faciei utriusque} = 1{,}06\,l = 1{,}4906 \cdot \frac{\alpha}{m}.$$

V. Pro sexta lente est, uti vidimus, $\lambda''''' = 1{,}60006$ ideoque

$$\text{radius utriusque faciei} = 1{,}06\,u = 0{,}8518 \cdot \frac{\alpha}{m}.$$

VI. Pro secunda lente reperietur nunc primo

$$\lambda' = 1{,}25427 + \frac{0{,}6894}{m}\,{}^{1)}$$

Statuamus nunc esse $m = 25$ eritque $\lambda' = 1{,}28184$. Quare, cum pro secunda lente sit

$$F = \frac{\beta}{B\varrho' + \sigma' \pm \tau'(1+B)\sqrt{(\lambda'-1)}}, \quad G = \frac{\beta}{B\sigma' + \varrho' \mp \tau'(1+B)\sqrt{(\lambda'-1)}},$$

erit $\tau'(1+B)\sqrt{\lambda'-1} = 0{,}81524$, unde colligitur

$$F = \frac{\beta}{1{,}6888 \pm 0{,}81524} = \frac{\beta}{0{,}8736}, \quad G = \frac{\beta}{1{,}3284 \mp 0{,}81524} = \frac{\beta}{2{,}1436},$$

hinc

$$F = -0{,}84134\,\alpha, \quad G = -0{,}34286\,\alpha.$$

Sit nunc $m = \infty$, erit

$$\lambda' = 1{,}25427 \quad \text{et} \quad \tau'(1+B)\sqrt{\lambda'-1} = 0{,}77434,$$

unde radii facierum

$$F = \frac{\beta}{1{,}6888 \pm 0{,}7743} = \frac{\beta}{0{,}9145}, \quad G = \frac{\beta}{1{,}3284 \mp 0{,}7743} = \frac{\beta}{2{,}1027},$$

hinc

$$F = -0{,}80373\,\alpha, \quad G = -0{,}34955\,\alpha.$$

1) Ob correctionem praecedentem (vide notam p. 506) hic loco $\frac{0{,}6894}{m}$ valor $\frac{0{,}6754}{m}$ substituendus esset; respectu vero valorum sequentium F et G haec substitutio nullius momenti esset; quare hic omittitur. E. Ch.

Ex his igitur duobus casibus pro multiplicatione quacunque concludimus

$$F = -0{,}80373\,\alpha - \frac{f}{m}, \quad F = -0{,}80373\,\alpha - 0{,}940\cdot\frac{\alpha}{m}$$

et

$$G = -0{,}34955\,\alpha - \frac{g}{m}, \quad G = -0{,}34955\,\alpha + 0{,}167\cdot\frac{\alpha}{m}.$$

Denique semidiameter campi visi erit $\Phi = \frac{2148}{m+1}$ minut.

SCHOLION

293. Quia ternae lentes priores communem postulant aperturam, cuius semidiameter sit $\frac{m}{50}$ dig., hic ad radium minimum istarum lentium, qui est $0{,}343\,\alpha$, respici debet, cuius pars quarta $0{,}086\,\alpha$, hoc est circiter $\frac{1}{12}\alpha$, ipsi $\frac{m}{50}$ dig. aequalis posita dabit $\alpha = \frac{6}{25}m$ sive $\alpha = \frac{1}{4}m$, cum ante licuisset statuere $\alpha = \frac{1}{7}m$, neque ergo voti nostri compotes sumus facti, dum longitudinem telescopii contrahere sumus conati; etsi enim hic longitudo telescopii minorem tenet rationem ad α, tamen ipsa quantitas α fere tanto maior hic prodiit. Ex quo intelligitur, si omnes plane perfectiones desideremus, necesse prorsus esse maiorem longitudinem admittere. Interim tamen longitudo hinc resultans aliquanto minor est quam supra inventa; sed probe hic est perpendendum hoc casu elaborationem lentium multo maioribus difficultatibus esse obnoxiam quam ante, ita ut artifex non nisi post plurima tentamina scopum attingere possit. Quocirca his investigationibus non ulterius immoror, cum ex calculis allatis facile sit huiusmodi telescopiorum constructionem in usum artificum depromere.